Теория функций

УДК 517.5

Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК

О НЕКОТОРЫХ ОПЕРАЦИЯХ С ГАРМОНИЧЕСКИМИ И СУБГАРМОНИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Исследуются некоторые операции с гармоническими и субгармоническими функциями. *Комплексный анализ, гармонические функции, субгармонические функции*

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $m \geq 2$, G – область в R^m, $X = (x_1, x_2, ...x_m)$ – текущая точка R^m. Обозначим символом $C^2(G)$ множество всех отображений $u(X)$ G в R, непрерывных в G вместе со своими частными производными первого порядка и имеющих в каждой точке X из G частные производные второго порядка вида $\frac{\partial^2 u(X)}{\partial x_k^2}, k = 1, 2, ...m$. Функция $u(X)$ из $C^2(G)$ называется гармонической в G, если

$$\forall X \in G \, \Delta u(X) := \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u(X)}{\partial x_k^2} = 0,$$

и субгармонической в G, если

$$\forall X \in G, \ \Delta u(X) \geq 0.$$

Множество всех гармонических в G функций обозначается далее символом $Hr(G)$, а совокупность всех субгармонических в G функций – символом $SbHr(G)$.

Пусть u, v – функции из $Hr(G)$ и $\alpha, \beta \in R$. Очевидно, что тогда

$$\alpha u + \beta v \in Hr(G).$$

Аналогично, если $u, v \in SbHr(G)$ и

$$\alpha, \beta \in R^+ = \{t \in R : t \geq 0\},$$

то $\alpha u + \beta v \in SbHr(G)$. В связи с этим естественно вопрос о том, принадлежит ли классу $Hr(G)$ (или $SbHr(G)$) произведение двух гармонических (соответственно, субгармонических) в G функций. Простые примеры показывают, что так бывает не всегда. Например, если

$$u(X) = v(X) = x_k \ (1 \leq k \leq m),$$

то $x_k \in Hr(G)$, но

$$u^2(X) = (x_k)^2 \notin Hr(G).$$

В то же время для любой пары различных номеров $k, l \leq m$, положив

$$u(X) = x_k, \ v(X) = x_l,$$

имеем:

$$u(X) \in Hr(G), \ v(X) \in Hr(G),$$

$$u(X)v(X) \in Hr(G).$$

Поставленный вопрос является частью более общей проблемы, которая в основном и рассматривается в данной статье. Именно, пусть f, g – дважды непрерывно дифференцируемые отображения R в R и пусть $u, v \in Hr(G)$ (или $u, v \in SbHr(G)$). Спрашивается, при каких условиях на f и g имеют место включения $f(u)g(u) \in Hr(G)$ или $f(u)g(u) \in SbHr(G)$.

В п.1 эта проблема исследуется для случая $m = 2$, который в определенном смысле является исключительным в силу общеизвестной связи между гармоническими в области $G \subset R^2$ функциями и аналитическими в этой области функциями. Во втором пункте приводятся (в той мере, как это позволяют ограничения на объем данной статьи) результаты для $m \geq 3$, а также рассматриваются более общие операторы.

1. ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ В ПЛОСКИХ ОБЛАСТЯХ

1. Пусть G – область в R^2 и f, g – дважды непрерывно дифференцируемые отображения R в R. Как легко проверить, для любой пары функций $u(X), v(X)$ из $C^2(G)$ справедливо соотношение

$$\forall X(x, y) \in G \ \Delta(f(u(X))g(v(X))) =$$

$$= f''(u)g(v)\Big((\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2\Big) +$$

$$+ f(u)g''(u)\Big((\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2\Big) +$$

$$+2f'(u)g'(u)\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\Big) +$$

$$+ f'(u)g(v)\triangle u + f(u)g'(v)\triangle v. \quad (1)$$

Предположим сначала, что v, u – сопряженные (в G) гармонические функции. Тогда в силу известных соотношений Коши-Римана (см., например, [1])

$$\forall (x,y) \in G \ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Но тогда равенство (1) принимает следующий вид:

$$\triangle(f(u)g(v)) =$$

$$= f''(u)g(v)\Big((\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2\Big) +$$

$$+ f(u)g''(v)\Big((\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2\Big). \quad (3)$$

Из соотношения (3) немедленно следует

Предложение 1. Если $G \subset R^2$, u, v – сопряженные функции из $Hr(G)$, а f и g – линейные функции (линейные отображения R в R), то

$$f(u(X))g(v(X)) \in Hr(G).$$

В частности, если u, v – пара сопряженных в G гармонических функций, то $uv \in Hr(G)$. Последний результат проще установить непосредственно, если учесть, что функция $f(z) = u(X) + iv(X)$ аналитична в G и что $v(x,y)u(x,y) = \frac{1}{2}Im f^2(z)$. Далее, для любых $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ из R

$$(\alpha u + \beta)(\gamma v + \delta) =$$

$$= \alpha\gamma uv + \alpha\delta u + \beta\gamma v + \beta\delta \in Hr(G),$$

и мы получили другое, столь же простое, доказательство предложения 1.

2. Предложение 1 можно уточнить и дополнить. Предварительно напомним [1], что если u, v – пара сопряженных функций из $Hr(G)$, то $f(z) := u(x,y) + iv(x,y) \in A(G)$, где $z = x + iy$ и $A(G)$ – пространство всех функций $h(z)$, аналитических в $G \in C$.

Соотношение (3) для пары таких функций можно переписать так:

$$\triangle(f(u(X))g(v(X))) =$$

$$= (f''(u)g(v) + f(u)g''(v))|f'(z)|^2. \quad (4)$$

Точку (x_0, y_0) области G назовем регулярной точкой функции $u(X)$ из $C^2(G)$, если

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)_0^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)_0^2 > 0,$$

где, например

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)_0 := \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\Big|_{x=x_0, y=y_0}$$

Далее, точка (x_0, y_0) из G называется особой точкой функции $u(x)$, если

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)_0 = \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)_0 = 0.$$

Ясно, что если u, v – пара сопряженных в G функций из $H\kappa(G)$, то множества всех особых (так же, как и регулярных) точек функций $u(X)$ и $v(X)$ совпадают. Учитывая равенство (4), получаем такие дополнения к предложению 1:

Предложение 2. Пусть u, v – пара сопряженных функций из $Hr(G)$, а f и g – дважды непрерывно дифференцируемые отображения R в R. Пусть, далее, в G нет особых точек функции $u(X)$ (или, что все равно, функции $v(X)$). Тогда $f(u(x,y))g(v(x,y)) \in$ $\in Hr(G) \Leftrightarrow$

$$f''(u(x,y)g(v(x,y)) + f(u(x,y))g''(v(x,y)) = 0,$$
$$\forall (x,y) \in G.$$

Предложение 3. Пусть u, v, f, g – те же, что в предложении 2. Тогда

$$\forall (x,y) \in G \ f(u(x,y))g(v(x,y)) \in SbHr(G) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f''(u(x,y)g(v(x,y)) + f(u(x,y))g''(v(x,y)) \geq 0.$$

Следствие. Пусть (u, v) – пара сопряженных функций из $Hr(G)$, $G \subset R^2$ и f, g – дважды непрерывно дифференцируемые выпуклые (вниз) неотрицательные отображения R в R (точнее, в $R^+ := \{t \in R : t \geq 0\}$). Тогда $f(u(X))g(v(X)) \in SbHr(G)$.

Остановимся отдельно на случае

$$g(t) \equiv 1.$$

Из все того же равенства (1), находим, положив $u(G) := \{u(x,y) : (x,y) \in G\}$:

Предложение 4. Пусть f – дважды непрерывно дифференцируемое отображение R в R. Тогда

1) если f – линейное отображение R в R, то $f(u)$ – оператор из $Hr(G)$ в $Hr(G)$;

2) если f – выпуклая (вниз) неубывающая функция (из R в R), то $f(u)$ – оператор из $SbHr(G)$ в себя;

3) если $u(x,y) \in Hr(G)$, то

$$f(u) \in SbHr(G)$$

тогда и только тогда, когда

$$f''(t) \geq 0, \ \forall t \in u(G).$$

Заметим, что утверждение 1) тривиально и уже отмечалось выше, а утверждение 3 известно в более общей, многомерной, ситуации (см. ниже, п.2).

3. Вернемся к произведению $u(X)v(X)$, предполагая теперь, что v – какая-либо фиксированная функция из $Hr(G)$, а $u(X)$ – также гармоническая, но на этот раз не обязательно сопряженная с v функция. Полагая в (1) $g(t) = f(t) = 1$, находим

$$uv \in Hr(G) \Leftrightarrow \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \forall X(x,y) \in G. \quad (5)$$

Правая часть импликации (5) является линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка относительно функции $u(X)$. Как известно (см., например, [2], гл.VIII, §2), его общее решение находится с помощью первого интеграла обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{\frac{\partial v}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial v}{\partial y}}$$

или, что все равно, уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial y}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy = 0. \quad (6)$$

Так как $v \in Hr(G)$, то $\triangle v = 0$ и (6) – уравнение в полных дифференциалах. Предположим, что в $Hr(G)$ имеется функция $w(X)$, сопряженная с $v(X)$ (так, например, будет, если область G односвязна). Как легко проверить, соотношение

$$w(x,y) = c$$

является первым интегралом уравнения (6). Но тогда, согласно [2], общее решение (в рассматриваемом классе функций) уравнения в правой части (6) имеет вид $u(x,y) = f(w(x,y))$, где f — дважды непрерывно дифференцируемое отображение $w(G)$ в R. При этом, если в G нет особых точек функции $w(X)$ (или, что все равно, особых точек заданной фукции $v(X)$), то из соотношения (1) при

$$u \equiv w, \ g \equiv 1$$

заключаем, что функция $f(w(X))$ гармонична в G тогда и только тогда, когда

$$\forall t \in u(G) \ f''(t) = 0.$$

Таким образом, справедливо

Предложение 5. Пусть G – односвязная область в G, $v \in Hr(G)$ и пусть в G нет особых точек функции v. Тогда для любой функции $u(X)$ из $Hr(G)$ $uv \in Hr(G) \Leftrightarrow u = f(w)$, где w – сопряженная с v функция из $Hr(G)$, а f – дважды непрерывно дифференцируемое отображение $w(G)$ в R такое, что $f''(t) = 0, \ \forall t \in w(G)$.

Неясно, справедливы ли утверждения типа предложений 2-5 в случае, когда в G имеются особые точки функции $v(X)$.

Аналогичным образом можно рассмотреть вопрос о том, когда $u \cdot v$ принадлежит $SbHr(G)$, если $v(X)$ — фиксированная, а $u(X)$ — произвольная функция из $Hr(G)$. Именно, из (1) (при $f(t) = g(t) = t$) следует, что $uv \in SbHr(G)$ тогда и только тогда, когда всюду в G

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \geq 0.$$

Иначе говоря, функция $u(X)$ должна удовлетворять в G линейному неоднородному уравнению в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = \rho(x,y); \quad (7)$$

$$\rho(x,y) \geq 0, \ \forall X(x,y) \in G.$$

Соответствующая этому уравнению система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет такой вид

$$\frac{dx}{\frac{\partial v}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial v}{\partial y}} = \frac{du}{\rho(x,y)}. \quad (8)$$

Предположим, что заданная функция $v(X)$ имеет сопряженную с нею функцию $w(x,y)$ из $Hr(G)$ (Как отмечалось выше, так, например, будет, если область G односвязна). Пусть еще в G нет особых точек функции $v(X)$ (или, что все равно, функции $w(X)$). Тогда согласно [2] систему (8) можно свести к эквивалентному ей обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка. Однако на этом пути осязаемых конкретных результатов получить пока не удалось и приходится довольствоваться фактически уже указанным выше результатом:

Предложение 6. Пусть G — область в R^2 и $v(X)$ - какая-либо фиксированная функция из $Hr(G)$. Для того, чтобы произведение $u(X)v(X)$, в котором $u(X)$ — произвольная функция из $Hr(G)$, принадлежало $SbHr(G)$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall X(x,y) \in G$

$$\frac{\partial u(X)}{\partial x}\,\frac{\partial v(X)}{\partial x}+\frac{\partial u(X)}{\partial y}\,\frac{\partial v(X)}{\partial y}\geq 0.$$

4. Рассмотрим еще один частный случай, когда $f(x)=g(x)=x^\alpha$, где $\alpha\geq 2$. Пусть сначала u,v - пара сопряженных гармонических в G функций. Тогда

$$h(z):=u(x,y)+iv(x,y)\in A(G).$$

Соотношение (1) принимает в данном случае такой вид

$$\triangle((u,v)^\alpha)=\alpha(\alpha-1)u^{\alpha-2}v^\alpha\Big((\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2\Big)+$$

$$+\alpha(\alpha-1)u^\alpha v^{\alpha-2}\Big((\frac{\partial v}{\partial x})^2+(\frac{\partial v}{\partial y})^2\Big)=$$

$$=\alpha(\alpha-1)(uv)^{\alpha-2}|h(z)|^2\cdot|h'(z)|^2, \qquad (9)$$

где $z=x+iy$. Очевидно, что знак лапласиана $\triangle((u,v)^\alpha)$ в области G определяется знаком функции $(u(X)v(X))^{\alpha-2}$. Поэтому справедливо

Предложение 7. Пусть G — область в C, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\in A(G)$ и $\alpha\geq 2$. Тогда

1. если $\alpha=2m,\ m\geq 1, m\in N$, то $(u(X)v(X))^\alpha\in SbHr(G)$;
2. если $u(X)v(X)\geq 0,\ \forall X\in G$, то $(u(X)v(X))^\alpha\in SbHr(G)$;
3. если $\alpha=2m+1,\ m\geq 1, m\in N$ и $u(X)v(X)\leq 0,\ \forall X\in G$, то $(u(X)v(X))^\alpha$ - субгармоническая в G функция.

Пусть, например, $u(x,y)=x,\ v(x,y)=y$ и G - произвольная область в R^2. Тогда

а) если область G лежит в первом или третьем квадранте, то

$$(xy)^m\in SbHr(G),\ \forall m\geq 2,\ m\in N;$$

б) $\forall m\geq 1,\ m\in N\ \forall G\in R^2$

$$(xy)^{2m}\in SbHr(G);$$

в) если G находится во втором или четвертом квадранте, то $(xy)^{2m+1}$ - супергармоническая в G функция.

Отметим еще, что если u,v - сопряженные гармонические функции G, не имеющие особых точек в G, то

$$(u(X)v(X))^\alpha\notin Hr(G),\ \forall\alpha\geq 2.$$

Действительно, если допустить, что

$$(u\cdot v)^\alpha\in Hr(G),$$

то из равенства (9) находим:

$$\forall X(x,y)\in G\ (u(x))^\alpha+(v(x))^\alpha=0.$$

Отсюда

$$\begin{cases}\alpha(u(X))^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha(v(X))^{\alpha-1}\frac{\partial v}{\partial x}=0;\\ \alpha(u(X))^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial y}+\alpha(v(X))^{\alpha-1}\frac{\partial v}{\partial y}=0;\end{cases}$$

$\forall X(x,y)\in G$.

Определитель последней однородной системы относительно неизвестных $(u(X))^{\alpha-1}$, $(v(X))^{\alpha-1}$ равен

$$\alpha^2\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\alpha^2\begin{vmatrix}\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ -\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=$$

$$=\alpha^2\cdot\Big[(\frac{\partial v}{\partial y})^2+(\frac{\partial v}{\partial x})^2\Big]>0$$

в G, и потому система имеет лишь нулевое решение:

$$\forall(x,y)\in G\ u(x,y)=v(x,u)=0.$$

Но тогда все точки G - особые для $v(X)$. По-видимому, аналог предложения 7 справедлив и тогда, когда в G имеются особые точки G, разумеется, исключая тривиальный случай, когда всюду в G

$$u(X)\equiv C_1,\ v(x)\equiv C_2,\ C_k\in R,\ k=1,2.$$

5. Результаты типа предложений 1–7 могут оказаться полезными в различных исследованиях, в которых используются гармонические или субгармонические функции. Покажем это на одном простом примере, в котором G - ограниченная область в R^2, а $u(X)$ и

$v(X)$ – непрерывные на $\overline{G}$ функции из $Hr(G)$. Тогда $\forall m \geq 1$

$$\max_{(x,y)\in\overline{G}} (v(x,y)\cdot u(x,y))^{2m} \leq M_{2m}^G(v)\cdot M_{2m}^G(u), \tag{10}$$

где, например, $M_{2m}^G(u) := \max\limits_{(x,y)\in\overline{G}} (u(x,y))^{2m}$.

Здесь мы воспользовались тем, что, согласно утверждению 3) предложения 4 (при $f(x) = x^{2m}$),

$$(u(X))^{2m} \in SbHr(G),\ (v(X))^{2m} \in SbHr(G).$$

Предположим теперь, что непрерывные на $\overline{G}$ функции $u(X)$, $v(X)$ гармоничны в G и сопряжены. Тогда по предложению 7

$$\max_{(x,y)\in\overline{G}} \big[(v(x,y)\cdot u(x,y)\big]^{2m} \leq M_{2m}^G(uv). \tag{11}$$

Так как всегда $M_{2m}^G(uv) \leq M_{2m}^G(u)\cdot M_{2m}^G(v)$, то оценка (11) более сильная, чем (10). Пусть, например, $G = K_1 = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$, $u(x,y) = x,\ v(x,y) = y$. В данном случае $\forall m \geq 1\ M_{2m}^{K_1}(x) = M_{2m}^{K_1}(y) = 1$, но в то же время $M_{2m}^{K_1}(xy) = \frac{1}{2^{2m}}$. При этом оценка (11) в данной ситуации не только сильнее оценки (10), но и является точной, так как, если

$$x_0 = y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

то $(x_0, y_0) \in K_1$ и $(x_0\cdot y_0)^{2m} = \frac{1}{2^{2m}}$.

6. Выясним теперь, обладают ли множества $Hr(G)$ и $SbHr(G)$ мультипликаторами (относительно операции поточечного умножения в G).

Предложение 8. Пусть G – область в R^2. Тогда

1) общий вид мультипликаторов $u(X)$ в $Hr(G)$ дается формулой

$$u(x,y) = C,$$

где C – произвольная вещественная постоянная;

2) функция $u(x,y)$ из $SbHr(G)$ тогда и только тогда является мультипликатором множества $SbHr(G)$, когда $u(X)$ – неотрицательная постоянная.

Доказательство.

1) Очевидно, что любая вещественная постоянная будет мультипликатором $Hr(G)$.

Пусть, обратно, $u(X) \in Hr(G)$ и $u(X)$ – мультипликатор $Hr(G)$. Тогда всюду в G для любой функции $v(X)$ из $Hr(G)$ справедливо равенство (5). Полагая в нем последовательно $v(x,y) = x$ и $v(x,y) = y$, находим, что всюду в G

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

откуда $u(x,y) \equiv const$ в G.

2) Пусть $u(x,y) \in SbHr(G)$ и $u(x,y)$ – мультипликатор $SbHr(G)$. Тогда

$$\forall v \in SbHr(G),\ \forall (x,y) \in G$$

$$\triangle(u(x,y)\cdot v(x,y)) \geq 0.$$

Полагая в этом неравенстве сначала $v(x,y) = 1$, а затем $v(x,y) = -1$, получаем, что $\triangle u = 0$ в G, то есть, что $u \in Hr(G)$. Но тогда для любой функции v из $SbHr(G)$ имеем из (1):

$$\triangle(u(X)v(X)) =$$

$$= u\cdot\triangle(v) + 2\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\Big) \geq 0$$

в G. Полагая сначала $v = x$, а затем $v = -x$, находим, что всюду в G

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Также, положив $v = y$, а затем $v = -y$, получаем, что

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0,\ \forall (x,y) \in G.$$

Но тогда $u(x,y) \equiv d$ в G. Остается заметить, что вещественная постоянная d является мультипликатором $SbHr(G)$ тогда и только тогда, когда она неотрицательна.

7. Переходя к операторам частного дифференцирования в $Hr(G)$ и $SbHr(G)$, ограничимся в данной статье операторами в пространстве $Hr(G)$. Так как любая гармоническая в области G из R^2 функция $u(x,y)$ имеет согласно [1] непрерывные в G частные производные всех порядков по обоим переменным и

$$\forall \alpha,\beta \in N,\ \forall (x,y) \in G$$

$$\triangle\Big(\frac{\partial^{\alpha+\beta}u(x,y)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\Big) = \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(\triangle u) = 0,$$

то любой оператор частного дифференцирования

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$$

действует из $Hr(G)$ в $Hr(G)$.

Далее оператор

$$L_a^{\alpha,\beta}u := a(x,y)\frac{\partial^{\alpha+\beta}u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta},$$

в котором $a(x,y) \in Hr(G)$, по предложению (8) действует из $Hr(G)$ в $Hr(G)$, если $a(x,y) \equiv a \in R$. При этом согласно тому же предложению 8 оператор $L_a^{0,0}(u)$ действует из $Hr(G)$ в $Hr(G)$ тогда и только тогда, когда $a(x,y) \equiv a \in R$. Из предыдущего ясно, что любой линейный оператор конечного порядка в частных производных с постоянными (вещественными) коэффициентами действует из $Hr(G)$ в $Hr(G)$.

8. Более сложным является вопрос о действии в $Hr(G)$ линейного оператора бесконечного порядка в частных производных с постоянными коэффициентами

$$L_\infty u := \sum_{\alpha+\beta}^{\infty} a_{\alpha,\beta}\frac{\partial^{\alpha+\beta}u(x,u)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta},$$

в котором

$$\alpha, \beta \in N^+ := \{0, 1, 2 \dots\},$$

$$a_{\alpha,\beta} \in R, \ \forall \alpha, \beta \in N^+.$$

Будем говорить, что оператор L_∞ применим в G к классу $Hr(G)$, если для любой функции $u(X)$ из $Hr(G)$ ряд

$$\sum_{\alpha+\beta=0}^{\infty} a_{\alpha,\beta}\frac{\partial^{\alpha+\beta}u(x,y)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$$

и все ряды, полученные его почленным дифференцированием по x и y любое число раз, сходятся равномерно внутри G. Очевидно, что если оператор L_∞ применим в G к классу $Hr(G)$, то он действует из $Hr(G)$ в $Hr(G)$.

В связи с этим стоит, пожалуй, напомнить, что (аналогично определяемая) применимость в G линейного дифференциального оператора бесконечного порядка с аналитическими в G коэффициентами

$$M_\infty y := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z) y^{(k)}(z),$$

где $y(z) \in A(G)$ и

$$\forall k \geq 0 \ a_k(z) \in A(G),$$

к классу $A(G)$ и различным его подклассам изучена довольно подробно. Соответствующие сведения по этому вопросу можно найти например, в монографии [3] (гл. I, §1, п.6) и в библиографии к ней. В то же время результатов подобного рода для оператора L_∞ в пространстве $Hr(G)$, по-видимому, вообще нет. На наш взгляд, было бы интересно восполнить этот пробел.

2. МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

1. Пусть теперь $m \geq 2$, $n \geq 1$, G – область в R^m,

$$\phi : R^n \to R, \ \phi \in C^2(R^n);$$

$$u_k(X) \in C^2(G), \ k = 1, 2, \dots n$$

(здесь $X = (t_1, \dots t_m)$ – текущая точка области G). Тогда $\forall X \in G$

$$\Delta\phi(u_1(X), \dots u_n(X)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial u_k^2} \sum_{l=1}^{m} (\frac{\partial u_k}{\partial t_l})^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial u_k} \Delta(u_k). \quad (12)$$

Из равенства (2.1) выводим такой результат, положив предварительно

$$u_s(G) = \{u_s(X) : X \in G\},$$

$$u(G) = u_1(G) \times u_2(G) \times \dots \times u_n(G).$$

Теорема 1. Пусть $m \geq 2$ и G – область в R^m. Пусть, далее, $\phi(x_1, \dots x_n)$ отображает R^n в R и $\phi \in C^2(R^n)$. Тогда

1. Если при $k = 1, 2, \dots n$ $u_k(X) \in Hr(G)$ и
$$\frac{\partial^2 \phi(u_1, \dots u_n)}{\partial u_k^2} = 0$$
в $u(G)$, то
$$\phi(u_1, \dots u_n) \in Hr(G).$$

2. Если $u_k \in Hr(G)$ и $\frac{\partial^2 \phi}{\partial u_k^2} \geq 0$ в $u(G)$ при $k = 1, 2, \dots n$, то
$$\phi(u_1, \dots u_n) \in SbHr(G).$$

3. Если $\frac{\partial^2 \phi}{\partial u_k^2} \geq 0$ и $\frac{\partial \phi}{\partial u_k} \geq 0$ в $u(G)$, а
$$u_k \in SbHr(G), \ k = 1, 2, \dots n,$$
то $\phi(u_1, \dots u_n) \in SbHr(G)$.

Следствие

1. Если при $k = 1, 2, ...n$ $\frac{\partial^2 \phi(u_1, ...u_n)}{\partial u_k^2} = 0$ в R^2, то оператор $\phi(u_1, ...u_n)$ действует из $Hr(G)$ в $Hr(G)$.
2. Если при $k = 1, 2, ...n$ $\frac{\partial^2 \phi}{\partial u_k^2} \geq 0$ в R^n, то $\phi(u_1, ...u_n)$ – оператор из $Hr(G)$ в $SbHr(G)$.
3. Если при $k = 1, 2, ...n$
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u_k^2} \geq 0, \frac{\partial \phi}{\partial u_k} \geq 0$$
в R^n, то $\phi(u_1, ...u_n)$ – оператор из $SbHr(G)$ в $SbHr(G)$.

Утверждения 2–3 теоремы 1 и ее следствия в случае $n = 1$ получены ранее в [4] (гл. II, §3, теорема 2.2) другим путем, с помощью интегральных средних. При этом определение субгармонической в G функции, принятое в [4] — несколько более общее, чем то, которое используется в настоящей работе.

Можно рассмотреть различные частные случаи этого общего результата, среди которых наиболее интересен, пожалуй, случай, когда
$$\phi(u_1, ...u_n) = \prod_{k=1}^{n} \phi_k(u_k),$$
где $\phi_k : R \to R$ и $\phi_k \in C^2(R)$, $k = 1, 2, ...n$. В этом случае соотношение (2.1) принимает такой вид :
$$\triangle\psi(u_1, ...u_n) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial u_k^2} \prod_{s=1}^{n\ [k]} \phi_s(u_s) \sum_{l=1}^{m} (\frac{\partial u_k}{\partial t_l})^2 +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi_k}{\partial u_k} \prod_{s=1}^{n\ [k]} \phi_s(u_s) \cdot \triangle(u_k) \qquad (13)$$

(полагаем $\prod_{s=1}^{n\ [k]} \phi_s(u_s) := \prod_{s=1\ s\neq k}^{n} \phi_s(u_s)$, $k = 1, 2, ...n$). Положив, в частности $n = 1$ и $n = 2$ с помощью равенства (2.2) можно получить обобщения полученных при $m = 2$ в п.1 результатов. За отсутствием места мы уже не будем останавливаться здесь на этом, также как и на некоторых приложениях изложенных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Маркушевич, А. И.** Теория аналитических функций. / А. И. Маркушевич. М.-Л.: ГИТТЛ. 1950.
2. **Степанов, В. В.** Курс дифференциальных уравнений. / В. В. Степанов. М.: ГИФМЛ. 1952.
3. **Коробейник, Ю. Ф.** О разрешимости в комплексной области некоторых общих классов линейных операторных уравнений. / Ю. Ф. Коробейник. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО "ЦВВР". 2005.
4. **Хейман, У.** Субгармонические функции. / У. Хейман, П. Кеннеди. М.: "Мир". 1980.

ОБ АВТОРЕ

Коробейник Юрий Федорович, Д-р физ.-мат. наук, проф., Южный Федеральный Университет, г. Ростов-на-Дону. Иссл. в области теории функций и комплексного анализа.