Уфа : УГАТУ, 2007 Вестник УГАТУ • Математика Т. 9, №3 (21). С. 31–35

Теория функций

УДК 517.518.837+517.982.3

И. Х. МУСИН, П. В. ФЕДОТОВА

О ПРОСТРАНСТВЕ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ С ОЦЕНКОЙ РОСТА ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ КОНУСА

Установлена полнота полиномов в весовом пространстве функций, бесконечно дифференцируемых в выпуклых конусах вещественного пространства. Дано применение этого результата к описанию сопряжённого пространства в терминах преобразования Фурье-Лапласа. *Преобразование Фурье-Лапласа, целые функции, преобразование Юнга*

Пусть Γ – неограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^n$. В работе [1] было определено пространство $\mathcal{E}_\varphi(\Gamma)$ бесконечно дифференцируемых функций на Γ следующим образом. Пусть $(\widetilde{h}_k)_{k=1}^\infty$ – невозрастающая последовательность положительных выпуклых возрастающих на $\mathbb{R}$ функций, удовлетворяющих условиям:

а) $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists t_0 \in \mathbb{R} : \widetilde{h}_k(t) - \widetilde{h}_{k+1}(t) \ge t$, $t \ge t_0$;

б) $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall \alpha > 0\ \exists s = s(k,\alpha) \in \mathbb{R} : \widetilde{h}_k(t) - \widetilde{h}_{k+1}(t+\alpha) \ge s(k,\alpha)$, $t \in \mathbb{R}$;

в) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\widetilde{h}_k(t)}{t} = +\infty$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Пусть последовательность $(\widetilde{\psi}_k)_{k=1}^\infty$ выпуклых возрастающих неотрицательных на $[0,\infty)$ функций удовлетворяет следующим условиям:

г) $\exists a_k > 0\ \exists b_k \ge 0\ \exists c_k \ge 0\ \ \forall k \in \mathbb{N}\ \ \widetilde{\psi}_k(t) - \widetilde{\psi}_{k+1}(t) \ge a_k t - b_k$, $t \ge 0$;

д) $\forall k \in \mathbb{N}\ \ \forall \alpha \in [0,1]\ \ \widetilde{\psi}_k(t) - \widetilde{\psi}_{k+1}(t+\alpha) \ge -c_k$, $t \ge 0$;

е) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\widetilde{\psi}_k(t)}{t} = +\infty$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Для $u = (u_1,\dots,u_n) \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m)$, $v = (v_1,\dots,v_n) \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m)$ полагаем $< u, v > = u_1v_1 + \dots + u_nv_n$, $\|u\|$ – еклидова норма в $\mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m)$. Через $H(\mathbb{C}^n)$ обозначаем совокупность целых функций в $\mathbb{C}^n$. Через $d(x)$ обозначим расстояние от $x \in \Gamma$ до границы $\partial\Gamma$ множества Γ.

Преобразованием Юнга выпуклой в $\mathbb{R}^n$ функции g называется выпуклая функция

$$g^*(x) = \sup_{\xi \in dom\ g} (< x, \xi > - g(\xi)),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

где $dom\ g = \{\xi \in \mathbb{R}^n : g(\xi) < +\infty\}$.

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ пусть $h_m(x) = \widetilde{h}_m(\ln \frac{1}{d(x)})$, $\psi_m(x) = \widetilde{\psi}_m(\|x\|)$, $x \in \Gamma$. Пусть φ – семейство функций $\varphi_m(x) = h_m(x) + \psi_m(x)$.

С помощью нормированных пространств

$$\mathcal{E}_{\varphi_m}(\Gamma) = \{f \in C^m(\Gamma) : p_m(f) = \sup_{x\in\Gamma, |\alpha|\le m} \frac{|(D^\alpha f)(x)|}{e^{\varphi_m(x)}} < \infty\},\ m \in \mathbb{N},$$

введём пространство $\mathcal{E}_\varphi(\Gamma) = \lim\limits_{m\to\infty} pr\mathcal{E}_{\varphi_m}(\Gamma)$.

Через $\mathcal{E}^*_\varphi(\Gamma)$ обозначим сильное сопряженное пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{E}_\varphi(\Gamma)$.

Для каждого $m \in \mathbb{N}$

$$\varphi^*_m(x) = \sup_{y\in\Gamma}(< x, y > - \varphi_m(y)),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть φ^* – семейство функций φ^*_m.

Определим пространство P_{φ^*} как индуктивный предел нормированных пространств

$$P_{\varphi^*_m} = \{F \in H(\mathbb{C}^n) : \|F\|_{\varphi^*_m} = \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \frac{|F(z)|}{e^{\varphi^*_m(Im\ z)}(1+\|z\|)^m} < \infty\},\ m \in \mathbb{N}.$$

Определение. Преобразованием Фурье-Лапласа функционала $S \in \mathcal{E}'_\varphi(\Gamma)$ называется функция $\hat{S}(z) = (S_\xi, e^{-i<z,\xi>})$, $z \in \mathbb{C}^n$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №05-01-00417), программы государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (грант Президента Российской Федерации НШ 10052.2006.1) и программы фундаментальных исследований РАН "Современные проблемы теоретической математики"(проект "Комплексный анализ и функциональные уравнения").

В [1] установлена

Теорема А. Преобразование Фурье-Лапласа устанавливает эпиморфизм между пространствами $\mathcal{E}^*_\varphi(\Gamma)$ и P_{φ^*}.

Замечание. Условие принадлежности начала области Γ в [1] не существенно.

В данной заметке получено следующее.

Теорема 1. Пусть Γ – открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n (\Gamma \neq \mathbb{R}^n)$. Тогда полиномы плотны в $\mathcal{E}_\varphi(\Gamma)$.

***Доказательство теоремы** 1*

Определим функцию ω в $\mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\omega(t) = c_1 \exp\left(-\frac{1}{1-\|t\|^2}\right) \text{ для } \|t\| < 1,$$

$$\omega(t) = 0 \text{ для } \|t\| > 1,$$

где $c_1 > 0$ выбрано так, что $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(t)dt = 1.$

Для $\varepsilon > 0$ положим

$$\omega_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-n}\omega\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \ t \in \mathbb{R}^n.$$

Для $m \in \mathbb{N}$ пусть

$$K_m = \{x \in \Gamma : \|x\| \leq m, \ dist(x, \partial\Gamma) \geq \frac{1}{m}\}.$$

Очевидно, $\forall m \in \mathbb{N}$ K_m – замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ и $K_m \subset int\, K_{m+1}$.

Пусть $r_m = \frac{1}{4}(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1})$. Положим

$$\eta_m(x) = \int_{K_m^{(2r_m)}} \omega_{r_m}(x-y)dy,$$

где $K_m^{(2r_m)}$ – $2r_m$-вздутие компакта K_m. Имеем $\eta_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. $\eta_m(x) = 1$ на $K_m^{(r_m)}$, $\eta_m(x) = 0$ для $x \notin K_m^{(3r_m)}$, всюду в $\mathbb{R}^n$ $0 \leq \eta_m(x) \leq 1$.

Для $\alpha \in \mathbb{Z}_+{}^n$

$$(D^\alpha\eta_m)(x) = \frac{1}{r_m^{n+|\alpha|}} \int_{K_m^{(2r_m)}} (D^\alpha\omega)\left(\frac{x-y}{r_m}\right) dy.$$

Отсюда $|(D^\alpha\eta_m)(x)| \leq$

$$\leq \frac{1}{r_m^{n+|\alpha|}} \sup_{t\in\mathbb{R}^n} |(D^\alpha\omega)(t)|(mes\, K_m^{(2r_m)}) \leq$$

$$\leq \frac{m_\alpha}{r_m^{n+|\alpha|}}(mes\, K_m^{(2r_m)}) \leq \frac{M_\alpha(1+m)^n}{r_m^{n+|\alpha|}},$$

где $m_\alpha = \sup_{t\in\mathbb{R}^n} |(D^\alpha\omega)(t)|$, $M_\alpha = \dfrac{m_\alpha\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$,

Γ – Гамма-функция. Таким образом,

$$|(D^\alpha\eta_m)(x)| \leq M_\alpha 4^{n+|\alpha|} m^{n+|\alpha|}(m+1)^{2n+|\alpha|} \leq$$

$$\leq M_\alpha 4^{n+|\alpha|}(m+1)^{3n+2|\alpha|}$$

где $M_\alpha > 0$ не зависит от m.

Докажем полноту полиномов в $\mathcal{E}_\varphi(\Gamma)$ в три шага.

Шаг 1. Для $\nu \in \mathbb{N}$ пусть $f_\nu(x) = f(x)\eta_\nu(x)$. Очевидно, $f_\nu \in \mathcal{E}_\varphi(\Gamma)$. Покажем, что $f_\nu \to f$ в $\mathcal{E}_\varphi(\Gamma)$ при $\nu \to \infty$.

Положив для краткости $\theta_m(x) = \exp(\varphi_m(x))$, имеем

$$\sup_{x\in\Gamma} \frac{|f_\nu - f(x)|}{\theta_m(x)} = \sup_{x\in\Gamma} \frac{|f(x)|(1-\eta_\nu(x))}{\theta_m(x)} \leq$$

$$\leq \sup_{x\in\Gamma\setminus K_\nu} \frac{|f(x)|}{\theta_m(x)} \leq$$

$$\leq p_{m+1}(f) \exp(\sup_{x\in\Gamma\setminus K_\nu} (\varphi_{m+1}(x) - \varphi_m(x))).$$

Пусть $x \in \Gamma \setminus K_\nu$ и $\|x\| > \nu$. Тогда

$$\varphi_{m+1}(x) - \varphi_m(x) =$$

$$= \widetilde{h}_{m+1}\left(\ln\frac{1}{d(x)}\right) - \widetilde{h}_m\left(\ln\frac{1}{d(x)}\right) +$$

$$+\psi_{m+1}(x) - \psi_m(x) \leq -a_m\|x\| + b_m.$$

Таким образом, обозначив $(\Gamma\setminus K_\nu)\cap\{\|x\| > \nu\}$ через T_ν, имеем

$$\sup_{x\in T_\nu} (\varphi_{m+1}(x) - \varphi_m(x)) \to -\infty, \ \nu \to +\infty. \quad (1)$$

Пусть $x \in \Gamma \setminus K_\nu$ и $\|x\| \leq \nu$. Тогда для ν достаточно больших имеем

$$\varphi_{m+1}(x) - \varphi_m(x) =$$

$$= \widetilde{h}_{m+1}(\ln(\frac{1}{d(x)})) - \widetilde{h}_m(\ln\frac{1}{d(x)}) +$$

$$+\psi_{m+1}(x) - \psi_m(x) \leq$$

$$\leq -\ln\frac{1}{d(x)} + b_m.$$

Пусть $S_\nu = (\Gamma \setminus K_\nu) \cap \{\|x\| \leq \nu\}$. Имеем для $x \in S_\nu$ $\ln\frac{1}{d(x)} \geq \ln\nu$. Следовательно,

$$\sup_{x\in S_\nu} (\varphi_{m+1}(x) - \varphi_m(x)) \to -\infty, \ \nu \to +\infty. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\sup_{x\in\Gamma} \frac{|f_\nu(x) - f(x)|}{\theta_m(x)} \to 0, \ \nu \to +\infty. \quad (3)$$

Далее, положив $\Omega_\nu = K_{\nu+1} \setminus K_\nu$ и обозначив

$$\frac{\sum\limits_{\beta\le\alpha,|\beta|<|\alpha|} C_\alpha^\beta |(D^\beta f)(x)||(D^{\alpha-\beta}\eta_\nu)(x)|}{\theta_m(x)}$$

через $F_\nu(x)$, имеем

$$\sup_{x\in\Gamma,1\le|\alpha|\le m} \frac{|D^\alpha(f_\nu(x)-f(x))|}{\theta_m(x)} \le$$

$$\le \sup_{x\in\Omega_\nu,1\le|\alpha|\le m} F_\nu(x)$$

$$+ \sup_{x\in\Gamma\setminus K_\nu,1\le|\alpha|\le m} \frac{|(D^\alpha f)(x)|}{\theta_m(x)}.$$

Оценим первое слагаемое. Пусть $x \in R_\nu = (K_{\nu+1} \setminus K_\nu) \cap \{\nu \le \|x\| \le \nu+1\}$. Из неравенств

$$|(D^\beta f)(x)| \le p_{m+1}(f) e^{\varphi_{m+1}(x)},$$
$$|\beta| \le m+1, x\in\Gamma;$$

$$|(D^{\alpha-\beta}\eta_\nu(x))| \le 4^{n+|\alpha-\beta|}(\nu+1)^{3n+2|\alpha-\beta|},$$
$$x\in\Gamma, \beta\le\alpha,$$

имеем

$$\sup_{x\in R_\nu,1\le|\alpha|\le m} F_\nu(x) \le$$

$$\le \frac{4^{n+m} p_{m+1}(f)(\nu+1)^{3n+2m} 2^{mn}}{e^{a_m\nu - b_m}}.$$

Следовательно,

$$\sup_{x\in R_\nu,1\le|\alpha|\le m} F_\nu(x) \to 0,\ \nu\to+\infty.$$

Пусть теперь $x \in (K_{\nu+1} \setminus K_\nu) \cap \{\|x\| \le \nu\} = P_\nu$. Тогда для $\forall s\in\mathbb{N}$

$$\sup_{x\in P_\nu,1\le|\alpha|\le m} F_\nu(x) \le$$

$$\le \sup_{x\in P_\nu} \frac{p_{m+s}(f)(\nu+1)^{3n+2m} 2^{mn}}{e^{\varphi_m(x)-\varphi_{m+s}(x)}}.$$

Пользуясь условиями а) и г) на весовые функции, имеем при некотором $K(s) > 0$

$$\sup_{x\in P_\nu,1\le|\alpha|\le m} F_\nu(x) \le$$

$$\le K(s) p_{m+s}(f)(\nu+1)^{3n+2m} 2^{mn} \left(\frac{1}{\nu}\right)^s.$$

Выбирая теперь $s = 3n+2m+1$, получаем

$$\sup_{x\in P_\nu,1\le|\alpha|\le m} F_\nu(x) \to 0$$

при $\nu\to\infty$. Итак,

$$\sup_{x\in K_{\nu+1}\setminus K_\nu} \frac{\sum\limits_{\beta\le\alpha,|\beta|<|\alpha|} C_\alpha^\beta |(D^\beta f)(x)||(D^{\alpha-\beta}\eta_\nu)(x)|}{\theta_m(x)}$$
$$\to 0,\ \nu\to+\infty.$$

Точно также, как и в случае с $\sup\limits_{x\in\Gamma\setminus K_\nu} \frac{|f(x)|}{\theta_m(x)}$, показывается, что

$$\sup_{x\in\Gamma\setminus K_\nu,1\le|\alpha|\le m} \frac{|(D^\alpha f)(x)|}{\theta_m(x)} \to 0$$

при $\nu\to+\infty$.

Шаг 2. Фиксируем $\nu\in\mathbb{N}$. Пусть

$$h(z) = \frac{\sin^2\frac{z}{2}}{x^2},\ z\in\mathbb{C}.$$

Положим $H(z_1,\dots,z_n) = h(z_1)\dots h(z_n)$. По теореме Пэли-Винера существует функция $g\in C(\mathbb{R}^n)$ с носителем в $[-1,1]^n$ такая, что

$$H(z) = \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 g(t) e^{-i<z,t>}\, dt_1\dots dt_n.$$

Отсюда $\forall\alpha\in\mathbb{Z}_+{}^n$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$

$$|(D^\alpha H)(x)| \le \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 |g(t)|\, dt_1\dots dt_n = C_H.$$

Пусть $A = \int_{\mathbb{R}^n} H(x)dx$. Для $\lambda > 1$ рассмотрим функцию

$$f_{\nu,\lambda}(x) = \frac{\lambda^n}{A}\int_{\mathbb{R}^n} f_\nu(y) H(\lambda(x-y))\, dy.$$

Очевидно, $f_{\nu,\lambda}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Так как для любых $\alpha\in\mathbb{Z}_+{}^n$, $x\in\mathbb{R}^n$

$$|(D^\alpha f_{\nu,\lambda})(x)| \le$$

$$\le \frac{\lambda^n}{A}\int_{\mathbb{R}^n} |(D^\alpha f_\nu)(y)| H(\lambda(x-y))\, dy \le$$

$$\le \max_{y\in\mathbb{R}^n} |(D^\alpha f_\nu)(y)| \frac{\lambda^n}{A}\int_{\mathbb{R}^n} H(\lambda(x-y))dy =$$

$$= \max_{y\in\mathbb{R}^n} |(D^\alpha f_\nu)(y)|,$$

то $f_{\nu,\lambda}\in\mathcal{E}_\varphi(\Gamma)$.

Пусть $r(\lambda) = \lambda^{\frac{-2n}{2n+1}}$. Как и в [2] показывается, что $\forall m\in\mathbb{N}$ $p_m(f_{\nu,\lambda} - f_\nu) \to 0$ при $\lambda\to+\infty$.

Шаг 3. Зафиксируем $\lambda > 1, \nu \in \mathbb{N}$. $\forall N \in \mathbb{N}$ положим

$$U_N(x) = H(0) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\sum\limits_{1\le i_1\le n} \dots \sum\limits_{1\le i_k \le n} \frac{\partial^k H}{\partial x_{i_1}\dots \partial x_{i_k}}(0) x_{i_1}\dots x_{i_k}}{k!},$$
$$x \in \mathbb{R}^n.$$

Справедлива оценка

$$|H(x) - U_N(x)| \le \frac{2C_H n^{N+1}\|x\|^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Пусть P – прямоугольник в $\mathbb{R}^n$, содержащий $supp f_\nu$. Пусть

$$V_N(x) = \frac{\lambda^n}{A}\int_P f_\nu(y) U_N(\lambda(x-y))\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Из равенства

$$(D^\alpha f_{\nu,\lambda})(x) - (D^\alpha V_N)(x) =$$
$$= \frac{\lambda^n}{A}\int_P (D^\alpha f_\nu)(y)(H(\lambda(x-y)) - U_N(\lambda(x-y)))\,dy$$

имеем при некоторых $C_1 > 0, C_2 > 0$ (зависящих от n, λ, ν) $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+{}^n$

$$|(D^\alpha f_{\nu,\lambda})(x) - (D^\alpha V_N)(x)| \le$$
$$\le \frac{C_1 C_2^N (1 + \|x\|)^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Следовательно,

$$p_m(f_{\nu,\lambda} - V_N) \le \frac{C_1 C_2^N}{(N+1)!}\sup_{x\in\Gamma}\frac{(1+\|x\|)^{N+1}}{e^{\varphi_m(x)}}.$$

Пусть $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$, $pr\Gamma = \Gamma \cap S^{n-1}$. Для $\sigma \in pr\Gamma$ положим $\varphi_{m,\sigma}(r) = \varphi_m(r\sigma)$, $r \ge 0$. Имеем

$$\sup_{x\in\Gamma}((N+1)\ln(1+\|x\|) - \varphi_m(x)) =$$
$$= \max(\sup_{x\in\Gamma, \|x\|\le 1}((N+1)\ln(1+\|x\|) - \varphi_m(x)),$$
$$\sup_{x\in\Gamma, \|x\|>1}((N+1)\ln(1+\|x\|) - \varphi_m(x))) \le$$
$$\le \max((N+1)\ln 2,$$
$$\sup_{r>1, \sigma\in pr\Gamma}((N+1)\ln r - \varphi_m(r\sigma)) + (N+1)\ln 2).$$

Заметим, что $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\sup_{r>1,\sigma\in pr\Gamma}(k\ln r - \varphi_{m,\sigma}(r)) =$$
$$= \sup_{t>0,\sigma\in pr\Gamma}(kt - \varphi_{m,\sigma}(e^t)) =$$
$$= \sup_{\sigma\in pr\Gamma}\sup_{t>0}(kt - \varphi_{m,\sigma}(e^t)) =$$
$$= \sup_{\sigma\in pr\Gamma}(\varphi_{m,\sigma}(e^t))^*(k) \le$$
$$\le \sup_{\sigma\in pr\Gamma}(k\ln k - k - (\varphi^*_{m,\sigma}(e^t))^*(k)) =$$
$$= k\ln k - k - \inf_{\sigma\in pr\Gamma}(\varphi^*_{m,\sigma}(e^t))^*(k).$$

Таким образом,

$$\sup_{x\in\Gamma}((N+1)\ln(1+\|x\|) - \varphi_m(x)) \le$$
$$\le \max((N+1)\ln 2, (N+1)\ln(N+1) - (N+1) -$$
$$- \inf_{\sigma\in pr\Gamma}((\varphi^*_{m,\sigma}(e^t))(N+1)) + (N+1)\ln 2).$$

Следовательно, либо

$$p_m(f_{\nu,\lambda} - f_N) \le$$
$$\le \frac{C_1 C_2^N 2^{N+1}}{(N+1)!}$$

и, значит, $p_m((f_{\nu,\lambda} - f_N)) \to 0$ при $N \to \infty$, либо

$$p_m(f_{\nu,\lambda} - f_N) \le$$
$$\le \frac{C_1 C_2^N 2^{N+1}}{(N+1)!}\frac{(N+1)^N}{\exp(\inf\limits_{\sigma\in pr\Gamma}((\varphi^*_{m,\sigma}(e^t))^*(N+1)))}.$$

Пользуясь формулой Стирлинга, имеем при некоторых $C_3, C_4 > 0$

$$p_m(f_{\nu,\lambda} - f_N) \le$$
$$\le \frac{C_3 C_4^N}{\exp(\inf\limits_{\sigma\in pr\Gamma}((\varphi^*_{m,\sigma}(e^t))^*(N+1)))} \tag{4}$$

Отметим, что равномерно по $\sigma \in pr\Gamma$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\varphi^*_{m,\sigma}(e^t))^*(x)}{x} = +\infty. \tag{5}$$

Действительно, согласно определению

$$(\varphi^*_{m,\sigma}(e^t))^*(x) = \sup_{t>0}(xt - \varphi^*_{m,\sigma}(e^t)), \ x > 0.$$

Следовательно, $\forall x > 0 \ \forall t > 0$

$$(\varphi^*_{m,\sigma}(e^t))^*(x) \ge xt - \varphi^*_{m,\sigma}(e^t) =$$
$$= xt - \sup_{r\le 0}(e^t r - \varphi_{m,\sigma}(r)).$$

Так как $\forall \sigma \in pr\Gamma \quad \varphi_{m,\sigma}(r) = \widetilde{h}_k(\ln \frac{1}{d(r\sigma)}) + \widetilde{\psi}_k(r) \geq \widetilde{\psi}_k(r)$, то $\forall x > 0 \ \forall t > 0$

$$(\varphi^*_{m,\sigma}(e^t))^*(x) \geq xt - \sup_{r \geq 0}(e^t r - \widetilde{\psi}_k(r)) =$$

$$= xt - (\widetilde{\psi}_k)^*(e^t).$$

Следовательно, $\forall t > 0 \ \forall \sigma \in pr\Gamma$

$$\frac{(\varphi^*_{m,\sigma}(e^t))^*(x)}{x} \geq t - \frac{(\widetilde{\psi}_k)^*(e^t)}{x}.$$

Итак, (5) получено. Значит, правая часть в (4) стремится к 0 при $N \to \infty$. То есть, $p_m(f_{\nu,\lambda} - f_N) \to 0$ при $N \to \infty$.

Из рассмотренных трёх этапов следует полнота полиномов в $\mathcal{E}_\varphi(\Gamma)$.

С помощью теоремы 1 и теоремы А легко устанавливается

Теорема 2. Пусть Γ – открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n (\Gamma \neq \mathbb{R}^n)$. Тогда преобразование Фурье-Лапласа устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathcal{E}^*_\varphi(\Gamma)$ и P_{φ^*}.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Маннанов, М. М.** Описание одного класса аналитических функционалов / М. М. Маннанов // Сибирский математический журнал. 1990. Т. 31. № 3. С. 62-74.
2. **Мусин, И. Х.** О преобразовании Фурье-Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций / И.Х. Мусин // Математический сборник. 2004. Т. 195. № 10. С. 83-108.

ОБ АВТОРАХ

Мусин Ильдар Хамитович, вед. науч. сотр. Ин-та математики с ВЦ УНЦ РАН, доц. каф. спецглав математики УГАТУ. Дипл. математик (БГУ, 1981). Д-р физ.-мат. наук по специальности "Математический анализ"(Уфа, 2004). Иссл. в области теории функций и комплексного анализа.

Федотова Полина Владимировна, аспирант отдела теории функций Ин-та математики с ВЦ УНЦ РАН. Дипл. математик (БГУ, 2003). Иссл. в области теории функций и комплексного анализа.