Уфа : УГАТУ, 2007 Вестник УГАТУ • Математика Т. 9, № 3 (21). С. 40–45

Теория функций

УДК 517.53+517.537.7

Н. Н. ЮСУПОВА

ПОВЕДЕНИЕ РЯДОВ ДИРИХЛЕ ЗАДАННОГО РОСТА НА КРИВЫХ

В работе исследуются ряды Дирихле $F(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}$ $(s=\sigma+it)$, для которых логарифмы величин $M(\sigma)=\sup\limits_{|t|<\infty}|F(\sigma+it)|$ ограничены сверху некоторой выпуклой функцией Φ. Показано, что при условии $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\varphi(x)}\sum\limits_{\lambda_n\le x}\frac{1}{\lambda_n}=0$ (φ— функция, обратная к Φ) верны оценки $0\le d(F)\le 1$. Здесь $d(F)=\inf\limits_{\gamma\in\Gamma} d(F;\gamma)$, $d(F;\gamma)\overset{def}{=}\varlimsup\limits_{\substack{s\in\gamma\\ s\to\infty}}\frac{\ln|F(s)|}{\ln M(Re\, s)}$. *Ряд Дирихле; максимальный член ряда Дирихле*

Пусть

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n} \quad (p_n\in\mathbb{N})$$

— лакунарный степенной ряд, сходящийся во всей плоскости. В [1] показано, что если функция f имеет конечный порядок, и плотность последовательности $\{p_n\}$ равна нулю, то для любой кривой γ, произвольным образом уходящей в бесконечность (например, по спирали) существует последовательность $\{\xi_n\}$ $(\xi_n\in\gamma)$, такая, что

$$\ln M(|\xi_n|;f)=(1+o(1))\ln|f(\xi_n)|,$$

где $M(r;f)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$. Сделаем замену $z=e^s$. Тогда

$$f(e^s)\overset{df}{\equiv}F(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{p_n s} \quad (s=\sigma+it)$$

— ряд Дирихле, абсолютно сходящийся во всей комплексной плоскости, имеющий конечный порядок ρ_R по Ритту, то есть

$$\rho_R=\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln\ln M(\sigma)}{\sigma}<\infty,$$

где $M(\sigma)=\sup\limits_{|t|<\infty}|F(\sigma+it)|$. В [2] результат Пойа из [1] полностью перенесён на ряды Дирихле конечного порядка по Ритту.

Цель статьи— изучить случай, когда $\ln M(\sigma)\le\Phi(m\sigma)$ $(m\in\mathbb{N})$, где Φ — некоторая выпуклая возрастающая функция. В качестве Φ можно, например, рассмотреть функцию $\Phi(\sigma)=\underbrace{\exp\exp\ldots\exp}_{k}\sigma$. Заметим, что при $k=1$ функция F имеет конечный порядок по Ритту (эта ситуация рассмотрена в [2]).

Пусть $\Lambda=\{\lambda_n\}$ $(0<\lambda_n\uparrow\infty)$ — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность

$$D=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}<\infty. \qquad (1)$$

Тогда

$$Q(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \qquad (2)$$

— целая функция экспоненциального типа не выше πD^*, где D^* — усредненная верхняя плотность последовательности Λ:

$$D^*=\varlimsup_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t},\quad N(t)=\int_0^t\frac{n(x)}{x}\,dx,$$

$$n(t)=\sum_{\lambda_j\le t}1.$$

Всегда $D^*\le D\le eD^*$ [3].

Обозначим $D(\Lambda)$ класс всех целых функций F, представимых абсолютно сходящимися во всей комплексной плоскости рядами Дирихле

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s=\sigma+it). \qquad (3)$$

Работа выпонена при финансовой поддержке гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ – 10052.2006.1.

Через L обозначим класс всех непрерывных и неограниченно возрастающих на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ положительных функций. Пусть Φ — выпуклая функция из L,

$$D_m(\Phi) = \{F \in D(\Lambda) : \ln M(\sigma) \le \Phi(m\sigma)\},$$

где $m \ge 1$, $M(\sigma) = \sup\limits_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|$. Положим

$$D(\Phi) = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m(\Phi).$$

Наряду с рядом (3) введем в рассмотрение следующий измененный ряд

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q'(\lambda_n) e^{\lambda_n s}. \tag{4}$$

Так как Q— целая функция экспоненциального типа, то ряд (4) абсолютно сходится во всей плоскости, а его сумма F^*— целая функция.

Пусть $E \subset [0, \infty)$ — измеримое по Лебегу множество. Верхней DE и нижней dE плотностями множества E называются величины

$$DE = \overline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{mes(E \cap [0, \sigma])}{\sigma},$$

$$dE = \underline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{mes(E \cap [0, \sigma])}{\sigma}.$$

В дальнейшем считаем, что все исключительные множества $E \subset [0, \infty)$, вне которых будут получены асимптотические оценки, представляют собой объединения отрезков вида $[a_n, a_n']$, где $0 < a_1 < a_1' \le a_2 < a_2' \le \le \ldots \le a_n < a_n' \le \ldots$.

Предположим, что введенная выше функция Φ такова, что

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\varphi(x^2)}{\varphi(x)} < \infty, \tag{5}$$

где φ — функция, обратная к Φ. Введем в рассмотрение класс функций

$$\underline{W}(\varphi) = \{\omega \in L : \sqrt{x} \le \omega(x), \lim_{x\to\infty} \frac{\omega(x)}{x\varphi(x)} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varphi(x)} \int_1^x \frac{\omega(t)}{t^2} dt = 0\}.$$

Пусть $\Gamma = \{\gamma\}$ — семейство кривых γ, уходящих в бесконечность так, что если $s \in \gamma$ и $s \to \infty$, то $Re\, s \to +\infty$. Для любой функции $F \in D(\Lambda)$, $\gamma \in \Gamma$ положим

$$d(F;\gamma) \stackrel{def}{=} \overline{\lim_{\substack{s\in\gamma \\ s\to\infty}}} \frac{\ln|F(s)|}{\ln M(Re\, s)}. \tag{6}$$

Пусть, далее, $\mu(\sigma)$ и $\mu^*(\sigma)$ — максимальные члены рядов (3) и (4) соответственно, то есть

$$\mu(\sigma) = \max_{n\ge1} \left\{ |a_n| \, e^{\lambda_n \sigma} \right\},$$

$$\mu^*(\sigma) = \max_{n\ge1} \left\{ |a_n| \, |Q'(\lambda_n)| \, e^{\lambda_n \sigma} \right\}.$$

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность. Если выполняется условие*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varphi(x)} \sum_{\lambda_n \le x} \frac{1}{\lambda_n} = 0, \tag{7}$$

то для функции $F \in D(\Phi)$ и любого β $(0<\beta\le \frac{1}{5})$ существует множество E_β, $dE_\beta = 0$, такое, что справедлива оценка

$$\overline{\lim_{\substack{\sigma\in e_\beta \\ \sigma\to\infty}}} \frac{\ln \mu^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)} \le 2\beta + (1 - 2\beta) d(F;\gamma), \tag{8}$$

где $e_\beta = [0, \infty) \setminus E_\beta$, γ — любая кривая из семейства Γ, а $d(F;\gamma)$ — величина, определенная формулой (6).

Следствие. *Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность. Если выполняется условие (7), то для любой целой функции $F \in D(\Phi)$ справедливы оценки $0 \le d(F) \le 1$, где $d(F) = \inf\limits_{\gamma\in\Gamma} d(F;\gamma)$.*

Как следует из результатов работы [4], возможны ситуации, когда $d(F) = 0$ и $d(F) = = 1$.

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие утверждения.

Теорема А [5]. *Пусть $\Phi \in L$, и для функции φ, обратной к Φ, выполняется условие (5). Пусть, далее, $u(\sigma)$ — неубывающая, положительная и непрерывная на $[0, \infty)$ функция, причем*

$$\lim_{\sigma\to\infty} u(\sigma) = \infty, \quad \overline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{u(\sigma)}{\ln \Phi(\sigma)} < \infty.$$

Предположим, что $\omega \in \underline{W}(\varphi)$. Пусть $\{x_n\}$- последовательность, выбранная так, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi(x_n)} \int_1^{x_n} \frac{\omega(t)}{t^2} dt = 0.$$

Если τ_n — решение уравнения $v(\tau) = x_n$ ($n \ge \ge 1$), где $v = v(\sigma)$ - решение уравнения

$$\omega(v) = e^{u(\sigma)},$$

то при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0,\infty)$,

$$mes(E \cap [0,\tau_n]) \le o(\varphi(v(\tau_n))) + 4 \int\limits_{v(\tau_1)}^{v(\tau_n)} \frac{\omega^*(t)}{t^2}dt = = o(\varphi(v(\tau_n))), \ \tau_n \to \infty,$$

имеет место оценка

$$u(\sigma + \frac{\omega(v(\sigma))}{v(\sigma)}) < u(\sigma) + o(1).$$

Здесь ω^* — некоторая функция из класса $\underline{W}(\varphi)$, имеющая вид $\omega^*(t) = \beta(t)\omega(t)$ ($\beta \in \in L$).

Теорема B [4]. *Пусть γ — кривая, соединяющая точку z_0 с окружностью $\{z : |z - z_0| = R\}$, состоящая из конечного числа кусочно-гладких жордановых кривых, а $g(z)$ — функция, аналитическая в круге $D(z_0; R) = \{z : |z - z_0| < R\}$ и непрерывная в ее замыкании $\overline{D}(z_0; R)$. Пусть*

$$M = \max_{\overline{D}(z_0;R)} |g(t)|, \quad m = \max_{\gamma} |g(t)|.$$

Тогда при $0 < \beta \le \frac{1}{5}$ для всех z из круга $\overline{D}(z_0; \beta R)$ верна оценка:

$$|g(z)| \le m^{1-2\beta} M^{2\beta} \tag{9}$$

Приступим к доказательству теоремы. Имеем

$$\sum_{\lambda_n \le x} \frac{1}{\lambda_n} = \int\limits_0^x \frac{dn(t)}{t} = \frac{n(x)}{x} + \int\limits_0^x \frac{n(t)}{t^2}dt =$$

$$= \frac{N(x)}{x} + \frac{n(x)}{x} + \int\limits_0^x \frac{N(t)}{t^2}dt.$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{\lambda_n \le x} \frac{1}{\lambda_n} - \int\limits_0^x \frac{N(t)}{t^2}dt \right| = \frac{n(x)}{x} + \frac{N(x)}{x}.$$

Но функции $n(x)$, $N(x)$ имеют одинаковые порядки (очевидно, не выше 1) и типы [6, гл. I, §1.10]. Следовательно, учитывая (1), заключаем, что

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{n(x)}{x} < \infty, \quad \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{N(x)}{x} < \infty.$$

Отсюда следует, что

$$\sup_{x>0} \left| \sum_{\lambda_n \le x} \frac{1}{\lambda_n} - \int\limits_0^x \frac{N(t)}{t^2} \right| = a < \infty.$$

Значит, из (7) получаем, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varphi(x)} \int\limits_0^x \frac{N(t)}{t^2}dt = 0.$$

Положим $\omega(t) = \max(\sqrt{t}, N(et))$. Ясно, что $\omega \in \underline{W}(\varphi)$. Тогда существует функция $\omega^* \in \underline{W}(\varphi)$ такая, что $\omega^*(x) = \beta(x)\omega(x)$ ($\beta \in \in L$). Пусть $v = v(\sigma)$ — решение уравнения

$$\omega_1(v) = 3\ln\mu(\sigma), \tag{10}$$

где $\omega_1(v) = \sqrt{\beta(x)\omega(x)}$. Положим

$$R_v = \sum_{\lambda_j > v} |a_j| e^{\lambda_j \sigma}, \quad h = \frac{\omega_1(v)}{v}, \quad v = v(\sigma).$$

Так как последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} < \infty$. Следовательно,

$$R_v \le \mu(\sigma + h) \sum_{\lambda_n > v} e^{-\lambda_n h} \le$$

$$\le \mu(\sigma + h) C \exp(\max_{t \ge v} \psi(t)),$$

где $\psi(t) = 2\ln t - ht$, $C = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}$. Поскольку $\psi'(t) = 0$ в точке t_0,

$$t_0 = \frac{2}{h} = 2\frac{v}{\omega_1(v)} \le 2\frac{v}{\sqrt{v}} = 2\sqrt{v} < v = v(\sigma)$$

при $\sigma \ge \sigma_0$, то при $\sigma \to \infty$

$$R_v \le C\mu(\sigma + h) \exp\left[-v(1 + o(1))h\right] =$$

$$= C\mu(\sigma + h) \exp\left[-(1 + o(1))\omega_1(v)\right]. \tag{11}$$

Положим $u(\sigma) = \ln 3 + \ln\ln\mu(\sigma)$. Поскольку $\mu(\sigma) \le M(\sigma)$, а $F \in D(\Phi)$, то существует $k \ge 1$, такое, что выполняется оценка

$$u(\sigma) \le \ln\Phi(k\sigma), \quad \sigma \ge \sigma_1. \tag{12}$$

Далее, видно, что $v = v(\sigma)$ является решением уравнения $\omega_1(v) = e^{u(\sigma)}$. Тогда с учетом (12) имеем $\omega_1(v(\sigma))=e^{u(\sigma)}\le\Phi(k\sigma)$ $(k\ge1)$. Отсюда получаем, что $\varphi(\omega_1(v(\sigma)))\le k\sigma$, $\sigma\ge\sigma_1$. Значит,

$$\frac{1}{\sigma} \le \frac{C_1}{\varphi(\omega_1(v(\sigma)))}, \quad \sigma \ge \sigma_1, \quad C_1 = k. \qquad (13)$$

Учитывая условие (5) и то , что $\sqrt{x} \le \omega_1(x)$, имеем

$$\varphi(x) \le C_2\varphi(\omega_1(x)), \quad x \ge x_0 \quad (0 < C_2 < \infty). \qquad (14)$$

В итоге из (13), (14) получим оценку

$$\frac{1}{\sigma} \le \frac{C_3}{\varphi(v(\sigma))}, \quad (\sigma \ge \sigma_1,\ 0 < C_3 < \infty). \qquad (15)$$

Далее, поскольку $\omega^* \in \underline{W}(\varphi)$, то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\omega^*(x)}{x\varphi(x)} = 0, \qquad (16)$$

а для некоторой последовательности $\{t_n\}$ имеем

$$\lim_{t_n\to\infty} \frac{1}{\varphi(t_n)} \int_1^{t_n} \frac{\omega^*(t)}{t^2} dt = 0. \qquad (17)$$

Очевидно, при замене условия $u(\sigma) \le c\Phi(\sigma)$ на $u(\sigma) \le \Phi(k\sigma)$ $(k \ge 1)$ заключение теоремы A останется тем же, если остальные условия оставить без изменений. Так как $\omega_1(x) \le\le \omega^*(x)$, видим, что для пары функций u и ω_1 все условия теоремы A выполнены. Поэтому , применяя теорему A и учитывая при этом (15), (16), (17), а также то что τ_j — корень уравнения $v(\tau) = t_j$ $(j \ge 1)$, вне некоторого множества $E'_\beta \subset [0, \infty)$,

$$mes(E'_\beta \cap [0, \tau_j]) \le o(\varphi(v(\tau_j)))+4 \int_{v(\tau_1)}^{v(\tau_j)} \frac{\omega^*(t)}{t^2} dt = o(\tau_j),\ \tau_j \to \infty, \qquad (18)$$

при $\sigma \to \infty$ получаем, что

$$\mu(\sigma + (\beta^{-1}+1)h(\sigma)) = \mu(\sigma)^{1+o(1)} \quad (0 < \beta \le 1). \qquad (19)$$

Следовательно, из (11), (19) получаем, что при $\sigma \to \infty$ вне E'_β

$$R_v \le C\mu(\sigma)^{1+o(1)} \exp[-\omega_1(v)(1+o(1))] = \mu(\sigma)^{-2(1+o(1))} \qquad (20)$$

Пусть $P_a(s) = \sum\limits_{\lambda_n\le a} a_n e^{\lambda_n s}$ $(s = \sigma + it)$. Справедливы следующие формулы А. Ф. Леонтьева для коэффициентов [3, гл. I, §2, п. 1]:

$$a_n = e^{-\alpha\lambda_n} \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi_n(t) P_a(t+\alpha)\, dt, \qquad (21)$$

где

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{q'_a(\lambda_n)} \int_0^\infty \frac{q_a(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} e^{-\lambda t}\, d\lambda,$$

$$q_a(\lambda) = \prod_{\lambda_n \le a} (1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}), \qquad (22)$$

а C — любой замкнутый контур, охватывающий сопряженную диаграмму q_a, то есть начало координат.

Положим $a = v(\sigma)$, а в качестве C возьмем контур $\{t : |t| = h(\sigma)\}$. Пусть $\alpha = \sigma + i\tau$, где τ — такое, что $\alpha \in \gamma$. Поскольку для $\lambda_n \le v(\sigma)$

$$\frac{1}{|q'_v(\lambda_n)|} \le \frac{1}{|Q'(\lambda_n)|} \quad (n \ge 1),$$

то из (21), (22) получаем, что для любого $\lambda_n \le v(\sigma)$

$$|a_n|\,|Q'(\lambda_n)|e^{\lambda_n\sigma} \le h(\sigma)[\max_{|\xi-\alpha|\le h(\sigma)} |F(\xi)| + \sum_{\lambda_j > v} |a_j|\, e^{\lambda_j(\sigma+h(\sigma))}] \int_0^\infty M(r+2; q_v) e^{-h(\sigma)r}\, dr, \qquad (23)$$

где $M(r+2; q_v) = \max\limits_{|\lambda_n|=r+2} |q_v(\lambda_n)|$. Далее, учитывая определения величин $v = v(\sigma)$, $h = h(\sigma)$, при $\sigma \to \infty$ имеем

$$\ln M(R; q_v) = n(v)\ln(1 + \frac{R^2}{v^2}) + 2R^2 \int_0^v \frac{n(t)}{t(t^2+R^2)} dt \le \frac{n(v)}{v} R + 2N(v) = o(1)h(\sigma)R + o(1)\ln\mu(\sigma).$$

Следовательно, учитывая (19) и оценку типа (20), из (23) получаем, что для всех $\lambda_n \le v(\sigma)$ при $\sigma \to \infty$ вне E'_β

$$|a_n||Q'(\lambda_n)|e^{\lambda_n\sigma} \le \mu(\sigma)^{-2(1+o(1))} +$$

$$+\mu(\sigma)^{o(1)} \max_{|\xi-\alpha|\le h(\sigma)} |F(\xi)|. \qquad (24)$$

Пусть $p = p(\sigma)$ — решение уравнения $\omega_1(p) = 2\ln\mu^*(\sigma)$, а

$$R^*_p = \sum_{\lambda_n > p} |a_n|\,|Q'(\lambda_n)|e^{\lambda_n\sigma}, \quad p = p(\sigma).$$

Положим $u^*(\sigma) = \ln 2 + \ln\ln\mu^*(\sigma)$. Применяя теорему A, из тех же рассуждений, при помощи которых была получена оценка R_v, получаем, что

$$R^*_p \le C\mu^*(\sigma)^{-2(1+o(1))} \qquad C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2},$$

если $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E_1 \subset [0,\infty)$ (E_1 от β не зависит),

$$mes(E_1 \cap [0, x_j]) \le o(\varphi(p(x_j)))+ \\ +4\int\limits_{p(x_1)}^{p(x_j)} \frac{\omega^*(t)}{t^2}dt, \qquad (25)$$

при $x_j \to \infty$. Здесь x_j– решение уравнения $p(\sigma) = t_j$, а $\{t_j\}$– последовательность, фигурирующая в условии (17). Отсюда следует, что $\lambda_{k(\sigma)} \le p(\sigma)$, если $\sigma \ge \sigma_2$, $\sigma \notin E_1$. Здесь $k(\sigma)$ — центральный индекс ряда (4).

Рассмотрим последовательность $\left\{\tau_j^*\right\}$, где $\tau_j^* = \min(\tau_j, x_j)$. Поскольку $t_j = p(x_j) = v(\tau_j)$, то из оценок типа (15) получаем, что

$$\frac{1}{\tau_j^*} \le \frac{A}{\varphi(t_j)} \quad (j \ge 1) \quad (0 < A < \infty).$$

Следовательно, если $E_\beta = E'_\beta \cup E_1$, то, учитывая (18), (25), при $\tau_j^* \to \infty$ получаем, что

$$\frac{mes(E_\beta \cap \left[0, \tau_j^*\right])}{\tau_j^*} \le \frac{A}{\varphi(t_j)}(mes(E'_\beta \cap [0, \tau_j])+$$

$$+mes(E_1 \cap [0, x_j])) \le$$

$$\le \frac{A}{\varphi(t_j)}\left[o(\varphi(t_j)) + 8\int\limits_{t_1}^{t_j} \frac{\omega^*(t)}{t^2}dt\right] = o(1).$$

Поскольку $R_v \le 1$, $R^*_p \le 1$ ($v = v(\sigma)$, $p = p(\sigma)$) при $\sigma \ge \sigma_3$, $\sigma \notin E_\beta$, то, очевидно, 1) $\lambda_{\nu(\sigma)} \le v(\sigma)$; 2) $\lambda_{k(\sigma)} \le p(\sigma)$, где $\nu(\sigma), k(\sigma)$ — центральные индексы рядов (3), (4).

Далее, для $\lambda_n \le p(\sigma)$

$$|Q'(\lambda_n)| \le \frac{2}{\lambda_n} \prod_{\substack{j\ne n \\ \lambda_j \le p(\sigma)}} \left|1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda_j^2}\right| \le$$

$$\le \frac{2}{\lambda_1} \prod_{\lambda_j \le p(\sigma)} \left|1 + \frac{\lambda_n^2}{\lambda_j^2}\right|.$$

Но при $\lambda_n \le p(\sigma)$ и $\sigma \to \infty$

$$\ln \prod_{\lambda_j \le p(\sigma)} (1 + \frac{\lambda_n^2}{\lambda_j^2}) = n(p)\ln(1 + \frac{\lambda_n^2}{p^2})+$$

$$+2p^2 \int\limits_0^p \frac{n(t)}{t(t^2+p^2)}dt \le n(p)\frac{\lambda_n}{p} + 2N(p) \le$$

$$\le 3N(ep) = o(\ln\mu^*(\sigma)), \; p = p(\sigma).$$

Так что для $\lambda_n \le p(\sigma)$ и $\sigma \to \infty$ имеем: $|Q'(\lambda_n)| \le [\mu^*(\sigma)]^{o(1)}$. Следовательно, $\mu^*(\sigma) = |a_k Q'(\lambda_k)|e^{\lambda_k\sigma} \le \mu(\sigma)\,[\mu^*(\sigma)]^{o(1)}$, где $p = p(\sigma)$, $k = k(\sigma)$. Значит, $(1 + o(1))\ln\mu^*(\sigma) \le \ln\mu(\sigma)$ при $\sigma \to \infty$. Так что $\omega_1(p) = 2\ln\mu^*(\sigma) < 3\ln\mu(\sigma) = \omega_1(v)$ ($\sigma \ge \sigma_4$). Это означает, что $\lambda_{k(\sigma)} \le p(\sigma) < v(\sigma)$ при $\sigma \ge \sigma_4$, $\sigma \notin E_\beta$. С учетом этого из (24) получаем, что при $\sigma \to \infty$ вне $E_\beta = E'_\beta \cup E_1$

$$\mu^*(\sigma) < 1 + \mu(\sigma)^{o(1)} \max_{|\xi-\alpha|\le h(\sigma)} |F(\xi)|, \qquad (26)$$

где $\alpha = \sigma + i\tau \quad (\alpha \in \gamma)$.

Дальнейшие рассуждения основаны на теореме B. Пусть $\gamma(\alpha)$ — часть кривой, содержащейся в круге $\overline{D}(\alpha; h\beta^{-1})$ $(0 < \beta \le \frac{1}{5}, h = h(\sigma))$. Она не обязательно кусочно-гладкая и жорданова. Поэтому поступаем следующим образом. Пусть α_1 — какая-нибудь точка кривой $\gamma(\alpha)$, принадлежащая окружности $\partial\overline{D}(\alpha; h\beta^{-1})$. Соединим точку α_1 с α ломаной $l(\alpha)$ без самопересечений и такой, что

$$\rho(\xi) = \inf_{z\in\gamma(\alpha)} |F(z) - F(\xi)| \le m_\alpha, \qquad (27)$$

где $\xi \in l(\alpha)$, $m_\alpha = \max\limits_{z\in\gamma(\alpha)} |F(t)|$. Как это показано в [4], это можно сделать.

Вернемся теперь к оценке (26). Применяя теорему B для круга $\overline{D}(z_0;\beta^{-1}h)$, и кривой $l(\alpha)$, получаем

$$\max_{|\xi-\alpha|\le h(\sigma)}|F(\xi)|\le \max_{l(\alpha)}|F(t)|^{1-2\beta}\times$$

$$\times\max_{|t-\alpha|\le\beta^{-1}h(\sigma)}|F(t)|^{2\beta}\le$$

$$\le|F(\xi_\alpha)|^{1-2\beta}M^{2\beta}(\sigma+\beta^{-1}h(\sigma)),\ \xi_\alpha\in l(\alpha).$$

Но из (27) следует, что $\rho(\xi_\alpha)=|F(\xi_\alpha)-F(z_\alpha)|\le m_\alpha$ для некоторой точки $z_\alpha\in\gamma(\alpha)$. Следовательно,

$$\max_{|\xi-\alpha|\le h(\sigma)}|F(\xi)|\le[2m_\alpha]^{1-2\beta}M^{2\beta}(\sigma+\beta^{-1}h(\sigma))=$$

$$=(2|F(z_{\alpha'})|)^{1-2\beta}M^{2\beta}(\sigma+\beta^{-1}h(\sigma)),\qquad(28)$$

где $z_{\alpha'}\in\gamma(\alpha)$. Далее, применяя теорему A, имеем (см.(19))

$$\mu(\sigma)\le M(\sigma)\le M(\sigma+\beta^{-1}h(\sigma))\le$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|e^{\lambda_n(\sigma+\beta^{-1}h(\sigma))}\le$$

$$\mu(\sigma+(1+\beta^{-1})h(\sigma))[n(v(\sigma))+\sum_{\lambda_n>v(\sigma)}e^{-h(\sigma)\lambda_n}]<$$

$$<\mu(\sigma)^{1+o(1)},$$

когда $\sigma\to\infty$ вне E'_β. Следовательно, с учетом оценок (28), (29) из (26) получаем, что при $\sigma\to\infty$ вне множества $E_\beta=E'_\beta\cup E_1$ нулевой нижней плотности

$$(1+o(1))\mu^*(\sigma)\le2|F(z'_\alpha)|^{1-2\beta}\mu(\sigma)^{(1+o(1))2\beta},$$

$z'_\alpha\in\gamma(\alpha)$. Следовательно, при $\sigma\to\infty$ вне E_β

$$\frac{\ln\mu^*(\sigma)}{\ln\mu(\sigma)}\le(1+o(1))2\beta+(1-2\beta)\frac{\ln|F(z'_\alpha)|}{\ln\mu(\sigma)},$$

$0<\beta\le\frac{1}{5}$. Так как $|Re\ z'_\alpha-\sigma|\le\beta^{-1}h$, учитывая еще раз оценки (29), отсюда окончательно получаем, что

$$\varlimsup_{\substack{\sigma\in e_\beta\\ \sigma\to\infty}}\frac{\ln\mu^*(\sigma)}{\ln\mu(\sigma)}\le2\beta+(1-2\beta)d(F;\gamma),$$

где $0<\beta\le\frac{1}{5}$, $e_\beta=[0,\infty)/E_\beta$.

Теорема полностью доказана.

Замечание. *Функция*

$$\Phi(\sigma)=\underbrace{\exp\exp\ldots\exp}_{k}(\sigma)\ (k\ge1)$$

удовлетворяет условиям теоремы. Отметим, что для случая $k=1$ аналогичные результаты доказаны в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Pólya, G.** Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzeihen / G. Pólya // Math. Z. 1929. V. 29. P. 549–640.
2. **Гайсин, А. М., Латыпов, И. Д.** Асимптотическое поведение суммы ряда Дирихле заданного роста на кривых / А. М. Гайсин, И. Д. Латыпов // Мат. заметки. 2005. Т. 78. №1. С. 37-51.
3. **Леонтьев, А. Ф.** Последовательности полиномов из экспонент / А. Ф. Леонтьев. М.: Наука, 1980. 384 с.
4. **Гайсин, А. М.** Оценка роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых / А. М. Гайсин // Матем. сб. 2002. Т.194. № 8. С. 55-82.
5. **Юсупова, Н. Н.** Устойчивость логарифма максимального члена ряда Дирихле/ Н. Н. Юсупова // Современные информационные и компьютерные технологии в инженерно-научных исследованиях. Научно-исследовательская стажировка молодых ученых: сб. материалов. Уфа: РИО БашГУ, 2005. Том I. Ч. 2. С. 309-315.
6. **Хейман, У.** Мероморфные функции / У. Хейман. М.: Мир, 1966. 288 с.

ОБ АВТОРЕ

Юсупова Наркес Нурмухаметовна, математик (БашГУ, 2007). Исследования в области теории функций комплексной переменной, рядов Дирихле.