Уфа : УГАТУ, 2007 Вестник УГАТУ • Математика Т. 9, № 3 (21). С. 51–57

Теория оптимизации

УДК 517.958.531.72

И. И. ГОЛИЧЕВ, Т. Р. ШАРИПОВ

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ, АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА КАК ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Для решения уравнения Стокса развивается новый подход, основанный на его интерпретации как задачи оптимального управления. Получена итерационная процедура решения рассматриваемой задачи на основе метода итеративной регуляризации, при этом явно находятся параметры итерационного процесса и, используя специфику минимизируемого функционала, удается ускорить сходимость процесса. Представлены результаты расчетов модельных задач.

Уравнения Навье-Стокса, пространства Соболева, оптимальное управление, некорректная задача, итерационный процесс

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе для задачи Стокса, являющейся линеаризованным вариантом нелинейных уравнений Навье-Стокса [3], в переменных "скорость-давление" [12] развивается новый подход, основанный на ее интепретации как задачи оптимального управления, где в качестве управления используется градиент давления, входящий в правую часть, а целевой функционал представлен нормой дивергенции от составляющих скорости в соответствующем пространстве.

Тот факт, что решение многих задач математической физики можно свести к решению экстремальных задач, хорошо известен и широко используется [4], [15]. Для решения соответствующих экстремальных задач используются, как правило, градиентные методы [8]. При этом, если исходная задача некорректна, то применяются методы регуляризации. В настоящей работе используется метод итеративной регуляризации, использование которого в рамках данной схемы гарантирует сильную сходимость оптимальных управлений и состояний регуляризованной задачи. Для применимости метода и оптимального выбора параметров доказаны дифференцируемость функционала по управлению, выполнение условия Липшица, найден оператор проектирования.

Численному решению задачи Стокса посвящено большое количество публикаций в связи с многочисленными приложениями, а также тем фактом, что эффективное решения этой задачи открывает путь к решению нелинейных уравнений Навье-Стокса (см., например, [1]). Из известных методов решения стационарной задачи Стокса в переменных "скорость-давление", имеющих в своей основе вариационные методы, отметим, прежде всего, методы Эрроу-Гурвица и Удзавы [7], дифференциальная форма которых, основанная на вариационной формулировке исходной задачи и теории двойственности [15], позволяет отделить процесс нахождения неизвестных, решая тем самым проблему отсутствия уравнения на давление.

1. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЗАДАЧЕЙ СТОКСА И ЗАДАЧЕЙ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Стационарная система уравнений Стокса в "естественных"переменных с однородными граничными условиями может быть записана в виде

$$\begin{cases} -\nu\Delta y = f - \operatorname{grad} p \ \text{ в } \ \Omega, \\ \operatorname{div} y = 0, \\ y\,|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь

$\nu > 0$ – вязкость жидкости;

$f = ((f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – внешняя сила;

$y = ((y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – неизвестная вектор-скорость жидкости;

$p = p(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ – неизвестное давление жидкости;

операторы div, grad, Δ берутся только по пространственной компоненте x.

В настоящей работе строится итерационный процесс, позволяющий находить так называемой сильное решение:

Определение 1. *Если f – заданная функция из $(L_2(\Omega))^n$, то сильным (обобщенным) решением задачи (1) называют функции $y \in (W^2_{2,0}(\Omega))^n$, $p \in W^1_2(\Omega)$, при которых первые два равенства системы (1) выполняются в пространствах $(L_2(\Omega))^n$ и $L_2(\Omega)$ соответственно.*

2. ЭВОЛЮЦИОННАЯ ЗАДАЧА СТОКСА И НАВЬЕ-СТОКСА

Пусть $Q_T = (0, T) \times \Omega$, $S_T = (0, T) \times \partial\Omega$, где $0 < T < \infty$.

В качестве основных функциональных пространств, в которых рассматриваются начально-краевые задачи, как правило, выступают пространства функций на отрезке со значениями в банаховом пространстве [3].

Пусть $L_p(a, b; X)$, $1 \le p < \infty$ – множество измеримых по Бохнеру функций $u : [a, b] \to X$, для которых

$$\int\limits_a^b \|u(t)\|^p_X \, dt < \infty.$$

Множество $L_p(a, b; X)$, $1 \le p < \infty$ образует банахово пространство с нормой, определяемой равенством

$$\|u\|_{L_p(a,b;\,X)} = \left(\int\limits_a^b \|u(t)\|^p_X \, dt < \infty \right)^{1/p}$$

Эволюционная задача Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \nu \Delta y = f - \operatorname{grad} p \ \text{ в } \ Q_T, \\ \operatorname{div} y = 0 \ \text{ в } \ Q_T, \\ y|_{S_T} = \varphi, \\ y|_{t=0} = y_0(x), \ \ x \in \Omega \end{cases} \qquad (2)$$

является линеаризованным вариантом нестационарных уравнений Навье-Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \nu \Delta y + \sum\limits_{i=1}^n y_i \frac{\partial y}{\partial x_i} = f - \operatorname{grad} p \ \text{ в } \ Q_T, \\ \operatorname{div} y = 0 \ \text{ в } \ Q_T, \\ y|_{S_T} = \varphi, \\ y|_{t=0} = y_0(x), \ \ x \in \Omega \end{cases} \qquad (3)$$

Здесь $f : Q_T \to \mathbb{R}^n$, $f \in (L_2(Q_T))^n$ и $y_0 : \Omega \to \to R^n$.

Вопросу теоретического исследования задач Навье-Стокса посвящен целый ряд известных монографий как нескольких последних десятилетий (см., например, [5], [6], [7]), так и последних лет [3], [14].

Введем пространство

$$L_{2,\,0}(\Omega) = \left\{ p \in W^1_2(\Omega) : \int\limits_\Omega p \, dx = 0 \right\}.$$

Наряду с задачей (1) рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$J(u) = \|\operatorname{div} y_u\|_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega |\operatorname{div} y_u(x)|^2 \, dx \to \inf, \qquad (4)$$

где $u \in U$,
$U = \{v \in (L_2(\Omega))^n : \ v = \operatorname{grad} p, \ p \in L_{2,\,0}(\Omega)\}$;
y_u– обобщенное решение из $(W^2_{2,0}(\Omega))^n \equiv (H^2(\Omega))^n \cap (H^1_0(\Omega))^n$ задачи

$$-\nu \Delta y_u = f - u, \quad x \in \Omega \qquad (5)$$

в случае однородных граничных условий и y_u– обобщенное решение из $\left(H^2(\Omega)\right)^n$ задачи

$$\begin{cases} -\nu \Delta y = f - u, \\ y|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \qquad (6)$$

в случае более общих неоднородных граничных условий.

Под обобщенным решением из $(H^1_0(\Omega))^n$ задачи (5) при фиксированном управлении $u \in U$ понимается функция $y_u \in (H^1_0(\Omega))^n$, удовлетворяющая интегральному равенству [3, с. 28]

$$\nu((y_u, \varphi)) = (f, \varphi)_{(L_2(\Omega))^n} \quad \forall \varphi \in (H^1_0(\Omega))^n.$$

Заметим, что если задача (1) имеет решение $(y, p) \in (W^2_{2,0}(\Omega))^n \times L_{2,0}(\Omega)$, то задача (4)- (5) имеет решение $(y, \operatorname{grad} p) \in \in (W^2_{2,0}(\Omega))^n \times L_2(\Omega)$ и $J(\operatorname{grad} p) = 0$. Таким образом, в этом случае решение задачи (1) с однородными краевыми условиями $y|_{\partial\Omega} = 0$ сводится к решению задачи (4)–(6).

Рассуждая аналогичным образом, решение эволюционной задачи (2) может быть получено из задачи

$$J(u) = \|\operatorname{div} y_u\|^2_{L_2(Q_T)} = \int\limits_{Q_T} |\operatorname{div} y_u|^2 dx\, dt \to \inf_{u \in U}, \qquad (7)$$

$$U = L_2(0, T; G),$$

$$G = \{v \in (L_2(\Omega))^n : v = \mathrm{grad}\, p,\ p \in L_{2,0}(\Omega)\},$$

где y_u– обобщенное решение из $L_2(0,T,(H_0^1(\Omega))^n)$ задачи

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \nu\Delta y_u = f - u,\ x \in \Omega \tag{8}$$

в случае однородных граничных условий и y_u– обобщенное решение из $L_2(0,T;(W_2^1(\Omega))^n)$ задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \nu\Delta y_u = f - u,\ x \in \Omega, \\ y|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \tag{9}$$

в случае более общих неоднородных граничных условий.

3. МЕТОД ИТЕРАТИВНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ СТОКСА

Для решения поставленных задач оптимального управления будет использован метод итеративной регуляризации проекции градиента (см., например [8]). Причина использования процедуры регуляризации состоит в том, что при отстутствии строгой выпуклости минимизируемого функционала можно говорить только о слабой сходимости итерационной последовательности управлений в методе проекции градиентов к решению вариационной задачи [8]. А поскольку функционал $J(u)$, определенный в (4), является просто выпуклым (см. утверждение 1), для получения сильно-сходящейся последовательности управлений будем использовать следующий известный результат из работы [8, гл. 2, 9].

Пусть требуется найти

$$\inf_{v \in U} J(v) = J_*.$$

Обозначим $U_* = \{v \in U : J(v) = J_*\}$.

Теорема 1. *Пусть*

1) U– выпуклое замкнутое множество из гильбертова пространства H; функция $J(u)$ выпукла и дифференцируема на U, причем

$$\|J'(u)\| \le L_0(1 + \|u\|),\ \forall u \in U,$$

$L_0 = const \ge 0$;
кроме того, $J_* > -\infty$, $U_* \ne \emptyset$;

2) погрешности в задании приближений $J'_k(u)$ для градиента $J'(u)$ удовлетворяют условию

$$\|J'_k(u) - J'(u)\| \le \delta_k(1 + \|u\|) \tag{10}$$

$$\forall u \in U,\ k = 1, 2 \ldots,\ \lim_{k\to\infty} \delta_k = 0;$$

3) последовательности $\{\delta_k\}$, $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$ таковы, что

$$\delta_k \ge 0,\ \alpha_k > 0,\ \beta_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots;$$

$$\lim_{k\to\infty}(\delta_k + \alpha_k + \beta_k) = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\alpha_{k+1} - \alpha_k|}{\alpha_k^2\beta_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\beta_k}{\alpha_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\delta_k}{\alpha_k} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\beta_k = +\infty.$$

Тогда последовательность u_k, определяемая условием

$$u_{k+1} = P_U(u_k - \beta_k(J'_k(u_k) + \alpha_k u_k)), \tag{11}$$

$k = 1, 2, \ldots$, $u_1 \in U$, сходится по норме H к точке $u_* \in U_*$ с минимальной нормой.

Здесь P_U – оператор проектирования [8] на множество U.

Следующие утверждения устанавливают достаточные условия применимости данной теремы к задаче оптимального управления для стационарной задачи Стокса (4), (6).

Теорема 2. *Функционал $J(u)$, определенный в (4), дифференцируем по Фреше,*

$$J'(u) = 2\psi_u,$$

где $\psi_u \in (W_{2,0}^2(\Omega))^n$ – обобщенное решение задачи

$$-\nu\Delta\psi_u = grad\, div\,(y_u) \text{ в } \Omega, \tag{12}$$

а $y_u \in (W_{2,0}^2(\Omega))^n$ – обобщенное решение задачи

$$-\nu\Delta y_u = f - u \text{ в } \Omega. \tag{13}$$

Теорема 3. *Операция проектирования $v = P_U d$, $d \in (L_2(\Omega))^n$,*

$$U = \{v \in (L_2(\Omega))^n : v = grad\, p,\ p \in L_{2,0}(\Omega)\},$$

сводится к следующему:

$$v = grad\, p, \tag{14}$$

где p – решение задачи Неймана

$$\begin{cases} \Delta p = div\, d \text{ в } \Omega \\ \left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = d \cdot n|_{\partial\Omega} \end{cases} \tag{15}$$

в пространстве $L_{2,0}(\Omega)$. Здесь n – вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω.

Используя свойство Липшица [8] для функциона $J(u)$, возможен выбор параметров, обеспечивающий более быструю сходимость итерационного процесса (11).

Лемма 1. *Существует такой ограниченный самосопряженный оператор A, что*

$$J'(u) - J'(v) = A(u - v) \quad \forall u, v \in U, \tag{16}$$

причем

$$\|A\| \le L, \; L = \frac{1}{\nu^2} \; \forall u, v \in U. \tag{17}$$

Следствие 1.

$$\left\|J'(u)\right\| \le L_0 \cdot \left(1 + \|u\|_{(L_2(\Omega))^n}\right),$$

где $L_0 = const \ge 0$

Утверждение 1. *Функционал $J(u)$ выпуклый на U.*

С учетом теоремы 2, леммы 1, следствия 1 и утверждения 1 следующая теорема является следствием теоремы 2 работы [2].

Теорема 4. *Пусть последовательности $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\psi^k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ определены с помощью итерационного процесса*

$$-\nu\Delta y^k = f - u^k, \; y^k\Big|_{\partial\Omega} = \varphi, \tag{18}$$

$$-\nu\Delta\psi^k = grad\, div\, y^k, \; \psi^k\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{19}$$

$$d^{k+1} = u^k - \beta_k\left(2\psi_k + \alpha_k u^k\right), \tag{20}$$

$$\begin{cases} \Delta p^{k+1} = div\, d^{k+1} \text{ в } \Omega \\ \left.\dfrac{\partial p^{k+1}}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = d^{k+1} \cdot n\Big|_{\partial\Omega}, \end{cases} \tag{21}$$

$$u^{k+1} = grad\, p^{k+1}, \; k = 1, 2, \ldots,$$

где $\beta_k = 2\left(L + 2\alpha_k\right)^{-1}$, а $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям

$$\alpha_k > 0, \; \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k = \infty, \; \lim_{k\to\infty}\frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{\alpha_k^2} = 0.$$

Тогда при любом $u_1 \in U$

$$\lim_{k\to\infty}\|u_k - u^*\|_{(L_2(\Omega))^n} = 0,$$

Здесь L – константа в условиях леммы 1.

Можно показать, что сходимость u_k в $(L_2(\Omega))^n$ влечет за собой сходимость y_k в $(W_2^1(\Omega))^n$.

Для эволюционной задачи Стокса (2) установлена теорема.

Теорема 5. *Пусть последовательности $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\psi^k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ определены с помощью итерационного процесса*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y^k}{\partial t} - \nu\Delta y^k = f - u^k, \\ y^k(x, 0) = y_0, \; y^k\Big|_{S_T} = \mu(x, t), \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial\psi^k}{\partial t} - \nu\Delta\psi^k = grad\, div\, y^k, \\ \psi^k(x, T) = 0, \; \psi^k\Big|_{S_T} = 0, \end{cases} \tag{23}$$

$$d^{k+1} = u^k - \beta_k\left(2\psi_k + \alpha_k u^k\right), \tag{24}$$

$$\begin{cases} \Delta p^{k+1} = div\, d^{k+1} \text{ в } \Omega \\ \left.\dfrac{\partial p^{k+1}}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = d^{k+1} \cdot n\Big|_{\partial\Omega}, \end{cases} \tag{25}$$

$$u^{k+1} = grad\, p^{k+1}, \; k = 1, 2, \ldots,$$

где $\beta_k = 2\left(L + 2\alpha_k\right)^{-1}$, а $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям

$$\alpha_k > 0, \; \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k = \infty, \; \lim_{k\to\infty}\frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{\alpha_k^2} = 0.$$

Тогда при любом $u_1 \in U$

$$\lim_{k\to\infty}\|u_k - u^*\|_{(L_2(Q_T))^n} = 0,$$

Здесь каждый шаг итерационного процесса состоит в решении двух уравнений теплопроводности и одной задачи Неймана.

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА

В данном разделе будут рассмотрены вопросы построения вычислительных схем для итерационных процессов, рассмотренных в теоремах (4), (5). Разностные схемы будут построены на равномерных сетках для областей квадратной формы в двумерных евклидовых пространствах.

Введем в области $Q_T = [0, T] \times \Omega$, где $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ – единичный квадрат, равномерную разностную сетку с шагом h по пространственной переменной и временным шагом τ (или итерационным шагом при решении уравнений методом установления). Пусть $\bar\omega = \{x_i = (x_i^1, x_j^2) : \; i, j = 0, \ldots, N\}$, $x_0 = (0, 0)$, $x_N = (1, 1)$, $h = 1/N$ – шаг сетки, ω – множество внутренних узлов сетки $\bar\omega$, а

$\gamma = \bar{\omega}\backslash\omega$ – множество ее граничных узлов (все определения взяты из [9]). Определим в узлах разностной сетки (i, j) сеточные функции y_h^k, u_h^k, ψ_h^k, для построения разностных аналогов итерационных процессов (18)–(21), (22)–(25).

Вводя на сетке $\bar{\omega}$ разностные аналоги Δ_h, $\mathrm{grad}_h \mathrm{div}_h$, div_h и grad_h соответственно операторов Δ, grad div, div, grad, можно построить разностную аппроксимацию для итерационных процессов (18)–(21), (22)–(25).

Для уравнений (18) и (19), являющимися краевыми задачами Дирихле для уравнения Пуассона, использовалась стандартная пятиточечная разностная схема второго порядка точности [9].

Для краевой задачи Неймана (21) были использованы результаты работы [10], где, задавая проекцию решения на нулевое собственное подпространство оператора и строя правую часть так, чтобы разностная задача была разрешима, автор методом априорнах оценок доказал сходимость к решению, имеющему ту же самую проекцию на собственное подпространство непрерывной задачи в сеточной норме $W_2^{(1)}$, а в [11] доказана равномерная сходимость, причем скорость сходимости в обоих работах совпадает с порядком аппроксимации.

Для аппроксимации операторов div и grad были рассмотрены центрально-разностные аппроксимации и компактные разности [13] четвертого порядка точности по пространственному шагу [13] для повышения запаса устойчивости.

При реализации алгоритма необходимо иссследовать один важный вопрос относительно применимости теоремы 4 к конечно-разностному итерационному процессу, который получается с учетом апроксимаций. А именно, использование конечномерной аппроксимации итерационного процесса, построенного для бесконечномерных пространств неизбежно приводит к тому, что вместо точных значений операторов $J'(u^k) = \psi^k$ и $P_U(d^{k+1}) = \mathrm{grad}\, p^{k+1}$ нам известно лишь их сеточное приближение $J'(u_h^k) = \psi_h^k$ и $P_U(d_h^{k+1}) = \mathrm{grad}_h p_h^{k+1}$ соответственно.

Известен результат работы [2], согласно которому, если в методе итеративной регуляризации (1) вместо точного значения оператора $P_U(\cdot)$ известна его последовательность приближений $P_{kU}(\cdot)$, то при наложении требования вида

$$\|P_U(u) - P_{kU}(u)\| \leq \gamma_k (1 + \|u\|) \quad \forall u \in U, \tag{26}$$

будет справедливо утверждение теоремы 1, где к условию 3) добавится требование

$$\gamma_k \geq 0,\ k = 1, 2, ...;\quad \lim_{k\to\infty} (\alpha_k + \delta_k + \gamma_k) = 0;$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\gamma_k}{\alpha_k} = 0.$$

Замечание 1. Согласно замечанию 1 работы [2] условие 2) теоремы 1 достаточно проверить на последовательности u_k, а условие (2.5) – на последовательности

$$d_k \equiv u_k - \beta_k (J_k'(u_k) + \alpha_k u_k).$$

Следующая лемма дает оценки для сеточных норм

$$\left\| P_U d^{k+1} - P_U d_h^{k+1} \right\|, \left\| J'(u^k) - J'(u_h^k) \right\|$$

Лемма 2. *Выполнено реккурентное соотношение*

$$\left\| u_h^{k+1} - u^{k+1} \right\|_0 \leq A_k \left\| u_h^k - u^k \right\|_0 + B_{k+1}(h), \tag{27}$$

$$\left\| u_h^1 - u^1 \right\|_0 = 0,$$

$$\left\| \psi_h^k - \psi^k \right\|_0 \leq M^2 \left\| u_h^k - u^k \right\|_0 + C_k(h), \tag{28}$$

где

$$k = 1, 2, \ldots;$$
$$A_k = P(1 - \beta_k \alpha_k + M^2 \beta_k),$$
$$B_{k+1}(h) = P\beta_k (M\|\delta y_h^k\| + \|\delta\psi_h^k\|) + \|\delta p_h^{k+1}\|,$$
$$C_k(h) = M\|\delta y_h^k\| + \|\delta\psi_h^k\|.$$

Здесь

M, P – равномерно ограниченные положительные константы, не зависящие от шага сетки, $\|\cdot\|_0$ – сеточный аналог нормы $(L_2(\Omega))^n$ [9]; q – порядок точности решения краевых задач алгоритма;

$\|\delta y_h^k\|$ – невязка разностного оператора Лапласа на y^k;

$\|\delta\psi_h^k\|$ – невязка разностного оператора Лапласа на ψ^k;

$\|\delta p_h^{k+1}\|$ – невязка оператора $grad_h$ на p^{k+1}.

Доказательство основывается на использовании априорных оценок для задач Дирихле и Неймана, установленных в [9].

Нетрудно проверить, что справедливо

Следствие 2.

$$\left\| u_h^k - u^k \right\|_0 \le \left(\prod_{i=1}^{k-1} A_i \right) \left(\sum_{l=1}^{k-1} \frac{B_l(h)}{\prod_{i=1}^{l} A_i} \right)$$

Согласно неравенству треугольника норма разности между оператором $P_U(u^k)$ и его сеточным аналогом $P_U(u_h^k)$ равна

$$\left\| u_h^k - u^* \right\| \le \left\| u_h^k - u^k \right\| + \left\| u^k - u^* \right\| \qquad (29)$$

(здесь $\|\cdot\|$ – любая сеточная норма).

Из следствия 2 видно, что с увеличением числа итераций верхняя оценка на $\left\| u_h^k - u^k \right\|_0$ увеличивается, если $\beta_k = \frac{2}{L+2\alpha_k}$, поскольку при этом

$$A_k = \frac{P(L + 2M^2)}{L + 2\alpha_k} > 0.$$

Таким образом, при фиксированном шаге сетки необходимо формулировать правило останова итерационного процесса, поскольку в этом случае не выполняется требование стремления к 0 оценки сверху на $\left\| u_h^k - u^k \right\|_0$ [2]. Для достижения же заданной точности необходимо производить измельчение шага разностной сетки.

5. ТЕЧЕНИЕ В КАВЕРНЕ С ДВИЖУЩЕЙСЯ КРЫШКОЙ

Рассмотрим результаты применения метода решения задачи Навье-Стокса к решению тестовой задачи о течении в квадратной каверне с движущейся верхней крышкой. Задача представляет собой нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в квадратной полости, которое индуцируется движением с постоянной скоростью одной из ее стенок. Расчетная область представляет собой квадрат

$$\Omega = \{(x, y) : x, y \in [0, L]\}$$

со стороной $L = 1$ м. Верхняя стенка перемещается вдоль оси с постоянной скоростью $U = 1$ м/с. Течение принимается нестационарным, ламинарным, несжимаемым и изотермическим. В расчетах полагалось $\nu = \frac{1}{Re} = 1$, где число Рейнольдса Re рассчитывается по длине стороны каверны и скорости верхней стенки. В начальный момент времени используются однородные граничные условия: $u = 0$, $p = 10^5$ Па. На стенках каверны выставляются граничные условия прилипания (см. рис. 1).

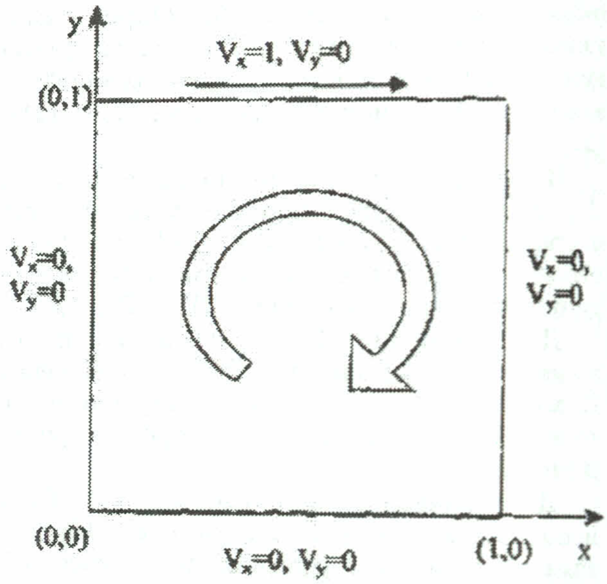

Рис. 1

Визуализация результатов численных расчетов, выполненная в среде Tecplot, передает качественную картину течения в каверне (см. рис. 2).

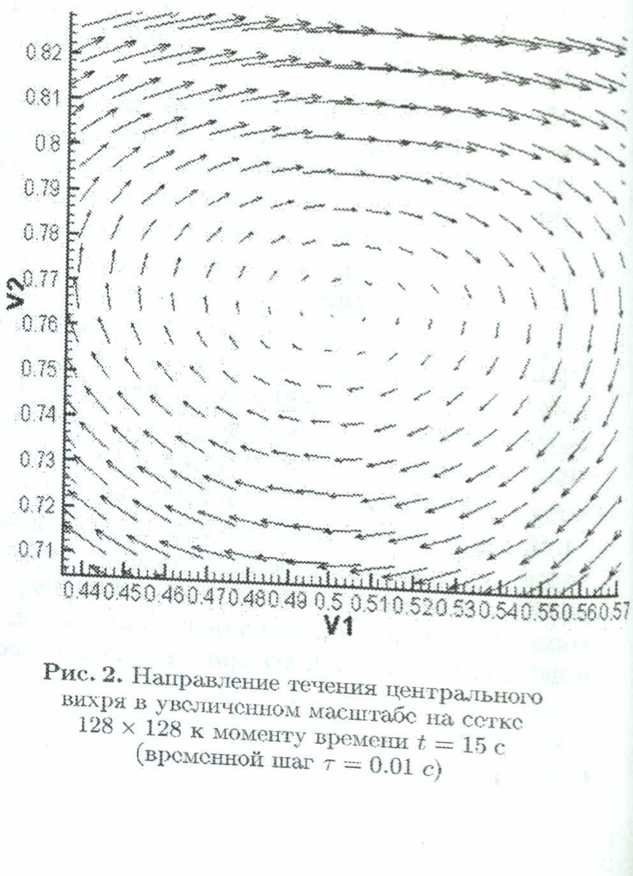

Рис. 2. Направление течения центрального вихря в увеличенном масштабе на сетке 128×128 к моменту времени $t = 15$ с (временной шаг $\tau = 0.01$ с)

ВЫВОДЫ

В данной работе проведено исследование задачи, поставленной во введении, а именно

- Предложен новый метод решения системы уравнений Стокса на основе метода, сводящего ее к задаче оптимального управления;
- Для решения последней обоснованы достаточные условия для применения метода проекции градиентов с применением процедуры итеративной регуляризации. Построен итерационный процесс, относящийся к числу экономичных;
- Разработаны вычислительные алгоритмы для реализации метода, основанные на применении компактных разностных схем.
- Проведены численные эксперименты на тестовых примерах.

Практическим результатом работы является создание программного комплекса, разработанного на языке программирования C++ в среде C++ Builder 6 и основанного на принципах объектно-ориентированного программирования, что позволяет использовать его при разработке других вычислительных программ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Голичев, И. И.** Решение некоторых задач для параболических уравнений методом последовательных приближений // Уфа.: БНЦ Уро АН СССР, 1989. - 172 с.
2. **Голичев, И. И.** Итерационные методы решения некорректных граничных задач // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1993. Т.33, №11. С.1627-1637.
3. **Звягин, В. Г.** Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье-Стокса / В. Т. Дмитриенко // М.: Едиториал УРСС, 2004. 112 с.
4. **Ректорис, К.** Вариационные методы в математической физике и технике / К. Ректорис. М.: Мир, 1985. 590 с.
5. **Ладыженская, О. А.** Краевые задачи математической физики /О. А. Ладыженская. – М: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1973.
6. **Ладыженская, О. А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости /О. А. Ладыженская. – М: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1970. 288 с.
7. **Темам, Р.** Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ /Р. Темам. – М.: Мир, 1981. 408 с.
8. **Васильев, Ф. П.** Методы решения экстремальных задач /Б. П. Васильев. – М.: Наука, 1988. 408 с.
9. **Самарский, А. А.** Разностные методы для эллиптических уравнений / В. Б. Андреев. – М.: Наука, 1976.
10. **Андреев, В. Б.** О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевую задачи для эллиптических уравнений // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1968. Т.8, №6. С.1627-1637.
11. **Андреев, В. Б.** О равномерной сходимости разностных схем, для задачи Неймана. / В. Б. Андреев // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1969. Т.9, №6. С.1627-1637.
12. **Белоцерковский, О. М.** Численное моделирование в механике сплошных сред: 2-е изд., перераб. и доп. /О. М. Белоцерковский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1994. 448 с.
13. **Толстых, А. И.** Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики /А. И. Толстых. – М: Наука, 1990.- 270 с.
14. **Фурсиков, А. В.** Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения /А. В. Фурсиков. Новосибирск: Научная книга, 1999. 352 с.
15. **Экланд, И.** Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд. – М.: Мир, 1979. 400 с.

ОБ АВТОРАХ

Голичев Иосиф Иосифович, ведущий научный сотрудник ин-та мат-ки с ВЦ, профессор. Д-р физ.-мат. наук. Исследования в области теории управления.

Шарипов Тимур Рафаилевич, инженер-программист ин-та компьютерных технологий НИЧ УГАТУ. Дипл. инж.-математик (УГАТУ, 2005).