Уфа : УГАТУ, 2007 Вестник УГАТУ • Математика Т. 9, № 3 (21). С. 80–87

Комплексный анализ

УДК 517.5

Р. А. БАШМАКОВ, А. А. ПУТИНЦЕВА

ПОЛНОТА СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВЕ $L^2(I, \exp H)$

В работе рассматривается полнота системы экспонент, построенной по нулям целой функции типа синус, в пространстве $L^2(I, \exp h)$, I — интервал вещественной оси, h — выпуклая функция. *Система экспонент, целые функции, выпуклые функции*

Пусть I — ограниченный интервал вещественной оси, $h(t)$ — выпуклая функция на этом интервале, $\widetilde{h}(x) = \sup_I(xt - h(t))$ — функция сопряженная по Юнгу с функцией $h(t)$ (см.[1]), $J = \{x \in \mathbb{R} : \widetilde{h}(x) < +\infty\}$. $L^2(I, \exp h)$ — пространство локально интегрируемых функций на I, удовлетворяющих условию

$$\|f\| := \sqrt{\int_I |f(t)|^2 e^{-2h(t)}\, dt} < \infty.$$

Пусть Λ — некоторое множество точек на плоскости. Систему экспонент $e^{\lambda z}$, $\lambda \in \Lambda$, будем обозначать через $\mathcal{E}(\Lambda)$. Для голоморфной функции L через Λ_L обозначим множество нулей функции L (без учета кратностей).

Пусть z — фиксированная точка на плоскости. Для любого положительного числа $r > 0$ через $B(z, r)$ обозначим круг $\{w : |w - z| < r\}$ и для непрерывной в $\overline{B}(z, r)$ функции f положим

$$\|f\|_r = \max_{w \in \overline{B}(z,r)} |f(w)|.$$

Пусть $d(f, z, r)$ — расстояние от функции f до подпространства гармонических в $B(z, r)$ функций: $d(f, z, r) = \inf\{\|f - H\|_r,\ H$ – гармонична в $B(z, r)\}$. Если $u(x)$ — выпуклая функция на интервале $J \subset \mathbb{R}$, то функция $u(w) = u(\,Re\ w)$ является непрерывной функцией в вертикальной полосе $J + i\mathbb{R}$ на плоскости. Для положительного числа p положим

$$\tau(u, z, p) = \sup\{r : d(u, z, r) \le p\}.$$

Определение 1. Пусть u непрерывная субгармоническая функция в полосе $J + i\mathbb{R}$. Функцией типа синуса для функции u будем называть голоморфную в полосе $J + i\mathbb{R}$ функцию L, удовлетворяющую условиям:

1. Все нули z_n, $n \in \mathbb{N}$, функции L простые и при некотором $\varepsilon > 0$ круги $B(z_n, \varepsilon\tau(u, z_n, 1))$, $n \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются.

2. При любом $\varepsilon > 0$ вне множества кругов $B(z_n, \varepsilon\tau(u, z_n, 1))$, $n \in \mathbb{N}$, выполняется соотношение

$$|\ln|L(z)| - u(z)| \le A(\varepsilon).$$

Термин "функции типа синуса", по-видимому, впервые появился в работах [2], [3] применительно к более узким классам субгармонических функций.

Класс всех функций типа синуса для функции u будем обозначать через $S(u)$.

В работе рассматриваются вопросы полноты систем экспонент $\mathcal{E}(\Lambda_L)$ в пространствах $L^2(I, \exp h)$, где L — функция типа синуса для некоторой выпуклой ассоциированном интервале J функции u.

Лемма 1. *Пусть h — выпуклая функция на ограниченном интервале $I = (a; b)$, $\widetilde{h}(x) = \sup_I(xt - h(t))$ — функция сопряженная по Юнгу с функцией $h(t)$. Тогда*

1. Функция $\widetilde{h}(x)$ определена на всем $\mathbb{R}$ и

$$|\widetilde{h}(x_1) - \widetilde{h}(x_2)| \le \max_{t \in (a;b)} |t||x_2 - x_1|,$$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

$$\int d\widetilde{h}'(x) \le (b - a).$$

2. Имеют место равенства

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\widetilde{h}(x)}{|x|} = -a, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\widetilde{h}(x)}{|x|} = b.$$

Доказательство.

1. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть $t_0 \in (a;b)$ такая точка, что

$$\widetilde{h}(x_1) \le x_1 t_0 - h(t_0) + \varepsilon.$$

Тогда

$$\widetilde{h}(x_1) - \widetilde{h}(x_2) = \widetilde{h}(x_1) - \sup_{t\in(a;b)} (xt - h(t)) \le$$

$$\le (x_1 - x_2)t_0 \le \max_{t\in(a;b)} |t||x_1 - x_2|.$$

Поменяв местами x_1, x_2, получим условие Липщица для функции $\widetilde{h}$.

Из полученной оценки, в частности следует, что

$$|\widetilde{h}_{\pm}(t)| \le \max_{t\in(a;b)} |t|.$$

Заметим, что для любого $c \in \mathbb{R}$

$$\widetilde{h}(x) - cx = \sup_{t\in(a;b)} (x(t-c) - h(t)) =$$

$$= \sup_{\tau\in(a-c;b-c)} (x\tau - h(\tau + c)),$$

следовательно,

$$|\widetilde{h}'_{\pm}(x) - c| \le \max_{\tau\in(a-c;b-c)} |\tau|.$$

Если положить $c = \frac{a+b}{2}$, то

$$|\widetilde{h}'_{\pm}(x) - c| \le \frac{b-a}{2}.$$

Остается заметить, что

$$\int d\widetilde{h}'(x) = \int d(\widetilde{h}(x) - cx)' =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-N}^{N} d(\widetilde{h}(x) - cx)' =$$

$$= \widetilde{h}'_{-}(N - c) - \widetilde{h}'_{+}(-N - c) \le (b - a).$$

2. Пусть $h_0 = \min h(t)$. Тогда при $x > 0$

$$\widetilde{h}(x) = \sup_{a\le t\le b} (xt - h(t)) \le bx - h_0,$$

поэтому

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\widetilde{h}(x)}{|x|} \le b.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим $h_1 = \max_{a+\varepsilon\le t\le b-\varepsilon} h(t)$, тогда

$$\widetilde{h}(x) = \sup_{a\le t\le b} (xt - h(t)) \ge$$

$$\ge \sup_{a+\varepsilon\le t\le b-\varepsilon} (xt - h(t)) \ge$$

$$\ge \sup_{a+\varepsilon\le t\le b-\varepsilon} xt - h_1 = x(b-\varepsilon) - h_1,$$

поэтому

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\widetilde{h}(x)}{|x|} \ge b - \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\widetilde{h}(x)}{|x|} = b.$$

Предел в $-\infty$ вычисляется также.

Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Пусть h — выпуклая функция на ограниченном интервале $I \subset \mathbb{R}$,*

$$K(x) = \int_I e^{2xt - 2h(t)}\,dt,$$

u — выпуклая функция на $\mathbb{R}$. Пусть далее $L \in S(u)$. Система экспонент $\mathcal{E}(\Lambda_L)$ полна в пространстве $L^2(I, \exp h)$ тогда и только тогда, когда не существует нелинейной выпуклой функции v на $\mathbb{R}$, которая удовлетворяет условию

$$v(x) + u(x) \le \widetilde{h}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство.

1. Достаточность. Предположим, что не существует выпуклой функции с указанными свойствами, однако, система $\mathcal{E}(\Lambda_L)$ не полна в пространстве $L^2(I, \exp h)$. По теореме Банаха о полноте найдется ненулевой функционал S, равный 0 на всех экспонентах из $\mathcal{E}(\Lambda_L)$. Тогда преобразование Фурье – Лапласа $\widehat{S}(z)$ этого функционала — целая функция, равная нулю на всех $\lambda \in \Lambda_L$, и по теореме A' эта функция удовлетворяет соотношениям

$$|\widehat{S}(z)| \le Ce^{\widetilde{h}(\operatorname{Re} z)}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

$$\int \frac{|\widehat{S}(x+iy)|^2}{K(x)} d\widehat{h}'(x)dy < \infty.$$

Функция $\widehat{S}(z)$ делится на функцию $L(z)$, пусть $\widehat{S}(z) = g(z)L(z)$. Значит

$$\int |g(x+iy)|^2 \frac{|L(x+iy)|^2}{K(x)} d\widehat{h}'(x)dy =$$

$$= \int \left(\int |g(x+iy)|^2 |L(x+iy)|^2\,dy \right) \times$$

$$\times \frac{1}{K(x)} d\widehat{h}'(x) < \infty,$$

то есть интеграл

$$\int |g(x+iy)|^2 |L(x+iy)|^2 dy \qquad (1)$$

почти всюду по мере $\frac{dh'(x)}{K(x)}$ конечен. Пусть $\Lambda_L = \{z_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, — нули функции L и $B(z_n, 2\varepsilon\tau(u, z_n, 1))$ попарно непересекающиеся круги, вне которых выполняется оценка

$$\frac{1}{A(2\varepsilon)} e^{u(x)} \le |L(x+iy)| \le A(2\varepsilon) e^{u(x)}. \qquad (2)$$

Пусть на прямой $\mathrm{Re}\, z = x_0$ интеграл (1) конечен,

$$E(2\varepsilon) = \bigcup_n B(z_n, 2\varepsilon\tau(u, z_n, 1)),$$

и

$$E(2\varepsilon) \bigcap \{z = x_0 + iy\} = x_0 + \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (iy_k; iy_{k+1}),$$

причем, отрезок от точки $x_0 + iy_{2j-1}$ до точки $x_0 + iy_{2j}$, $j \in \mathbb{Z}$, лежит в одном и том же круге. Возьмем произвольные целые числа n, m, через Γ обозначим отрезок от точки $x_0 + iy_{2n+1}$ до точки $x_0 + iy_{2m}$ и через $2d$— его длину. Пусть

$$\Gamma_1(2\varepsilon) = \Gamma \bigcap E(2\varepsilon), \quad \Gamma_2(2\varepsilon) = \Gamma \setminus \Gamma_1(2\varepsilon)$$

и $d_1(2\varepsilon)$, $d_2(2\varepsilon)$ их длины, соответственно. Тогда, очевидно, $2d = d_1(2\varepsilon) + d_2(2\varepsilon)$. Поскольку $d_1(\varepsilon) \le \frac{1}{2} d_1(2\varepsilon)$, то

$$d_2(\varepsilon) = 2d - d_1(\varepsilon) \ge 2d - \frac{1}{2} d_1(2\varepsilon) =$$

$$= 2d - \frac{1}{2}(2d - d_2(2\varepsilon)) = d + \frac{1}{2} d_2(2\varepsilon) > d.$$

Если

$$C = \int |g(x_0+iy)|^2 |L(x_0+iy)|^2 dy,$$

то по соотношению (2)

$$C > \int_{L_1(\varepsilon)} |g(x_0+iy)|^2 |L(x_0+iy)|^2 dy \ge$$

$$\ge \frac{e^{u(x_0)}}{A(\varepsilon)} \int_{L_1(\varepsilon)} |g(x_0+iy)|^2 dy.$$

Предположим, что функция g имеет вид Be^{az}, $a = a_1 + ia_2$. Если, например, $a_2 < 0$, то при $y > 0$

$$|g(x_0+iy)| = |B| e^{\mathrm{Re}\, az} =$$

$$= |B| e^{a_1 x_0 - a_2 y} \ge |B| e^{a_1 x_0},$$

значит, если числа n, m возьмем так, чтобы отрезок Γ лежал на луче $z = x_0 + iy, y > 0$, то

$$C > \frac{e^{u(x_0)}}{A(\varepsilon)} |B| e^{a_1 x_0} \int_{L_1(\varepsilon)} 1 dy =$$

$$= \frac{e^{u(x_0)}}{A(\varepsilon)} |B| e^{a_1 x_0} d_1(\varepsilon) > \frac{e^{u(x_0)}}{A(\varepsilon)} |B| e^{a_1 x_0} d.$$

Поскольку длину отрезка Γ мы можем сделать сколько угодно большой, то последнее соотношение невозможно. Таким образом, функция g не может оказаться экспонентой, в частности, постоянной.

Для краткости введем обозначение $\tau_n = \tau(u, z_n, 1)$. Вне попарно непересекающихся кругов $B_n = B(z_n, \varepsilon\tau_n)$ выполняется оценка

$$|g(z)| \le \frac{1}{|L(z)|} C e^{\widetilde{h}(\mathrm{Re}\ z)} \le$$

$$\le C e^{A(\varepsilon)} e^{\widetilde{h}(\mathrm{Re}\ z) - u(z)}, \qquad (3)$$

и в каждом круге B_n имеет место оценка

$$|g(z)| \le \frac{1}{|L(z)|} C e^{\widetilde{h}(\mathrm{Re}\ z)} \le$$

$$\le \frac{C_1 \tau_n}{|z - z_n|} e^{\widetilde{h}(\mathrm{Re}\ z) - u(\mathrm{Re}\ z)}. \qquad (4)$$

Пусть $T = \max_{t\in I} |t|$. По лемме 1 для z из $B(z_n, T)$ имеем

$$|\widetilde{h}(\mathrm{Re}\ z) - \widetilde{h}(\mathrm{Re}\ z_n)| \le T^2,$$

поэтому из соотношения (4) следует, что если $\varepsilon\tau_n \ge T$, то для $z \in \partial B(z_n, T)$ выполняется оценка

$$|g(z)| e^{u(\mathrm{Re}\ z)} \le \frac{C_1 \tau_n}{T} e^{T^2} e^{\widetilde{h}(\mathrm{Re}\ z_n)},$$

которая по принципу максимума для субгармонических функций продолжается внутрь круга $B(z_n, T)$:

$$|g(z)| \le \frac{C_1 \tau_n}{T} e^{2T^2} e^{\widetilde{h}(\mathrm{Re}\ z) - u(\mathrm{Re}\ z)}. \qquad (5)$$

Если $z \in B(z_n, \tau_n) \setminus B(z_n, T)$, то из оценки (4) получим

$$|g(z)| \le \frac{C_1 \tau_n}{T} e^{\widetilde{h}(\mathrm{Re}\ z) - u(\mathrm{Re}\ z)}$$

то есть оценка (5) выполняется при всех z из круга B_n. Если $\tau_n \le T$, то точно также получим, что в круге $B_n = B(z_n, \varepsilon\tau_n)$ выполняется оценка

$$|g(z)| \le C_1 e^{2T^2} e^{\widetilde{h}(\mathrm{Re}\ z) - u(\mathrm{Re}\ z)}$$

Отсюда и из соотношения (5) следует, что для всех $z \in B_n$ верна оценка

$$|g(z)| \le C_2 \tau_n e^{\widetilde{h}(\mathrm{Re}\ z) - u(\mathrm{Re}\ z)}. \quad (6)$$

Величину $\tau(u, 0, 1)$ обозначим через c_0, тогда верна оценка

$$\tau_n = \tau(u, z_n, 1) = \tau(u, \mathrm{Re}\ z_n, 1) \le$$
$$\le \tau(u, 0, 1) + |\mathrm{Re}\ z_n| = |x_n| + c_0.$$

Если $z = x + iy \in B_n$, то

$$|x_n| \le |x| + |x - x_n| \le |x| + \varepsilon\tau_n \le |x| + \varepsilon|x_n| + \varepsilon c_0,$$

следовательно,

$$|x_n| \le \frac{1}{1-\varepsilon}|x| + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}c_0.$$

Таким образом, для всех $z \in B_n$ имеем

$$\tau_n = \frac{1}{1-\varepsilon}|x| + \frac{1}{1-\varepsilon}c_0$$

и из неравенства (5) вытекает

$$|g(z)| \le \frac{C_2}{1-\varepsilon}(|\mathrm{Re}\ z| + c_0) e^{\widetilde{h}(\mathrm{Re}\ z) - u(\mathrm{Re}\ z)}.$$

Учитывая соотношение (3) получим, что для всех $z \in \mathbb{C}$ имеет место верхняя оценка

$$|g(z)| \le C_2(|\mathrm{Re}\ z| + 1 + c_0) e^{\widetilde{h}(\mathrm{Re}\ z) - u(\mathrm{Re}\ z)} \quad (7)$$

Правая часть в этом неравенстве не зависит от $\mathrm{Im}\ z$, поэтому

$$\sup_y |g(x+iy)| \le C_2(|x| + 1 + c_0) e^{\widetilde{h}(x) - u(x)},$$
$$\forall x \in \mathbb{R}.$$

Функция $w(z) = \sup_y \ln|g(z+iy)|$ субгармонична и зависит только от $\mathrm{Re}\ z$, следовательно,

$$w(x) = \sup_y \ln|g(x+iy)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

— выпуклая функция и

$$w(x) \le \ln C_2 + \ln(|x| + 1 + c_0) +$$
$$+ (\widetilde{h}(x) - u(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Далее рассмотрим два случая: a) $w(x)$ — линейная и b) $w(x)$ — нелинейная функция.

a) Пусть $w(x)$ — линейная, тогда $g(z)$ целая функция экспоненциального типа, причем, как было доказано раньше, g не может быть экспонентой, в том числе, постоянной функцией. Следовательно, эта функция имеет хотя бы один нуль. Пусть $g(\lambda) = 0$ и

$$g_1(z) = \frac{g(z)}{z - \lambda}.$$

Если $|z| \ge 2|\lambda|$, то $|\lambda| \le \frac{|z|}{2}$ и

$$|z - \lambda| \ge |z| - |\lambda| \ge \frac{|z|}{2},$$

поэтому

$$|g_1(z)| \le \frac{2|g(z)|}{|z|}.$$

Вместе с оценкой (7) отсюда получим, что при $|z| \ge \max(2|\lambda|, 1)$

$$|g_1(z)| \le 2C_2 \frac{|\mathrm{Re}\ z| + 1 + c_0}{|z|} e^{\widetilde{h}(\mathrm{Re}\ z) - u(\mathrm{Re}\ z)} \le$$

$$\le 2C_2(2 + c_0) e^{\widetilde{h}(\mathrm{Re}\ z) - u(\mathrm{Re}\ z)}.$$

В силу непрерывности функций в левой и правой частях, отсюда следует, что найдется постоянная C_3, такая, что для всех $z \in \mathbb{C}$ выполняется оценка

$$|g_1(z)| \le C_3 e^{\widetilde{h}(\mathrm{Re}\ z) - u(\mathrm{Re}\ z)}$$

и, тем самым, для всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место соотношение

$$w_1(x) = \sup_y \ln|g_1(x+iy))| \le$$
$$\le \widetilde{h}(\mathrm{Re}\ z) - u(\mathrm{Re}\ z) + \ln C_3.$$

Докажем от противного, что выпуклая функция $w_1(x)$ нелинейна. Предположим, что

$$w(x) = kx + b, \quad w_1(x) = k_1 x + b_1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Поскольку

$$|g_1(z)| \le \frac{|g(z)|}{|z - \lambda|} \le \frac{|g(z)|}{|\mathrm{Re}\ z - \mathrm{Re}\ \lambda|},$$

то

$$w_1(x) \le w(x) - \ln|x - \mathrm{Re}\ \lambda|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Поделив это неравенство на x и устремив x к $+\infty$ и к $-\infty$, получим, что $k = k_1$, тогда последнее неравенство превратится в соотношение

$$b_1 \leq b - \ln|x - \operatorname{Re}\lambda|, \quad x \in \mathbb{R},$$

которое невозможно. Итак, нелинейная выпуклая функция
$v(x) = w_1(x) - \ln C_3$ удовлетворяет соотношению

$$v(x) + u(x) \leq \widetilde{h}(\operatorname{Re} z) - u(\operatorname{Re} z).$$

Это противоречит нашему предположению о том, что подобной выпуклой функции не существует.

b) Теперь рассмотрим случай, когда функция w — нелинейна. Возьмем произвольное число $b < w(0)$ и через точку $(0, ib)$ проведем две касательных прямых к графику функции $w(x)$. Пусть эти прямые есть графики линейных функций $l_1(x) = k_1 x + b$ и $l_2(x) = k_2 x + b$, причем $k_1 \neq k_2$. Для определенности предположим, что $k_1 > k_2$. Тогда

$$l_1(x) \leq w(x), \ l_2(x) \leq w(x).$$

Рассмотрим выпуклую функцию

$$l(x) = \max(l_1(x), l_2(x)) = \begin{cases} l_1(x), & x \geq 0, \\ l_2(x), & x \leq 0. \end{cases}$$

Тогда, если

$$L(x) = l_2(x) - l_1(x),$$

то

$$l(x) = l_1(x) + L^+(x) \leq w(x)$$

и функция

$$g(z) = e^{l_1(z)} F(L(z))$$

является функцией типа синуса для субгармонической функции $l(\operatorname{Re} z)$ и удовлетворяет оценке

$$|g(z)| \leq C e^{l(\operatorname{Re} z)}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{9}$$

Из соотношения (8) получим

$$\ln|g(z)| \leq \ln C + l(x) \leq \ln C + w(x) \leq$$
$$\leq \ln C + \ln C_2 + \ln(|x| + 1 + c_0) +$$
$$+ (\widetilde{h}(x) - u(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Функция g — функция типа синуса для нелинейной функции и поэтому имеет бесконечно много нулей. Пусть λ — один из нулей этой функции. Так же как в пункте a) получим, что функция

$$g_1(z) = \frac{g(z)}{z - \lambda}$$

удовлетворяет оценке

$$|g_1(z)| \leq C_3 e^{\widetilde{h}(\operatorname{Re} z) - u(\operatorname{Re} z)}$$

и, тем самым, для всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место соотношение

$$w_1(x) = \sup_y \ln|g_1(x + iy))| \leq$$
$$\leq \widetilde{h}(\operatorname{Re} z) - u(\operatorname{Re} z) + \ln C_3. \tag{10}$$

Функция w_1 не может быть линейной. Действительно, допустим, что w_1 линейна, то есть $w_1(x) = kx + c$. Для каждого $x \in \mathbb{R}$ по определению супремума найдется $\zeta(x) = x + iy(x)$, такая, что

$$\ln|g_1(\zeta(x))| \geq w_1(x) - 1,$$

тогда

$$\varliminf_{x \to +\infty} \frac{\ln|g_1(\zeta(x))|}{x} \geq \lim_{x \to +\infty} \frac{w_1(x) - 1}{x} = k.$$

и

$$\varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\ln|g_1(\zeta(x))|}{x} \leq \lim_{x \to +\infty} \frac{w_1(x)}{x} = k,$$

значит

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln|g_1(\zeta(x))|}{x} = k.$$

Аналогично получим, что

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln|g_1(\zeta(x))|}{x} = k.$$

Учитывая соотношение (7) получим

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln|g_1(\zeta(x))|}{x} =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln|g(\zeta(x))| - \ln|\zeta(x) - \lambda|}{x} \leq$$
$$\leq \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln|g(\zeta(x))|}{x} \leq \lim_{x \to +\infty} \frac{l(x) + \ln C}{x} = k_1,$$

и

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln|g_1(\zeta(x))|}{x} =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln|g(\zeta(x))| - \ln|\zeta(x) - \lambda|}{x} \geq$$
$$\geq \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln|g(\zeta(x))|}{x} \geq \lim_{x \to +\infty} \frac{l(x) + \ln C}{x} = k_2,$$

то есть $k_2 \le k \le k_1$. Однако мы предположили, что $k_2 < k_1$, следовательно, либо $k_2 < k$, либо $k < k_1$. Пусть для определенности $k < k_1$ и

$$E(\varepsilon) = \bigcup_m B(z_m, \varepsilon\tau(l, z_m, 1))$$

— объединение попарно непересекающихся кругов с центрами в нулях z_m функции g, вне которого выполняется оценка

$$\frac{1}{A(\varepsilon)} e^{l(z)} \le |g(z)| \le A(\varepsilon) e^{l(z)}.$$

Выберем последовательность $x_n \to +\infty$, $x_n \notin E$. Тогда

$$\ln|g(x_n)| \ge -\ln A(\varepsilon) + l(x_n) = \\ = -\ln A(\varepsilon) + k_1 x_n + b,$$

$$\ln|g_1(x_n)| \le w_1(x_n) = kx_n + c.$$

Тогда

$$\ln|g(x_n)| - |g_1(x_n)| \ge \\ \ge -\ln A(\varepsilon) + (k_1 - k)x_n + b - c$$

или

$$\ln|x_n - \lambda| \ge -\ln A(\varepsilon) + (k_1 - k)x_n + b - c.$$

При $k_1 > k$ и $x_n \to +\infty$ это неравенство невозможно.

Таким образом, $w_1(x)$ — нелинейная выпуклая функция. Соотношение (10) означает, что для нелинейной выпуклой функции $v(x) = w_1(x) - \ln C_3$ выполняется неравенство

$$v(x) + u(x) \le \widetilde{h}(x),$$

но мы предполагали, что таких выпуклых функций не существует.

2. Необходимость. Допустим, что функция L — функция типа синуса для выпуклой функции u, система $\mathcal{E}(\Lambda_L)$ полна в пространстве $L^2(I, \exp h)$ и докажем, что нелинейной выпуклой функции v, удовлетворяющей условию

$$v(x) + u(x) \le \widetilde{h}(x) \tag{11}$$

не может существовать. Проведем доказательство от противного: для некоторой нелинейной выпуклой функции v условие (11) выполняется. Возьмем произвольную точку $b \in \mathbb{R}$, $b < v(0)$, и проведем две касательные к графику функции v, проходящих через точку $(0; b\,i)$. Пусть эти касательные суть графики линейных функций $l_1(x) = k_1 x + b$, $l_2(x) = k_2 x + b$. Функция

$$g(z) = e^{l_1(z)} F(l_2(z) - l_1(z))$$

является функцией типа синуса для выпуклой функции

$$l(x) = \max(l_1(x), l_2(x)) = \\ = l_1(x) + (l_2(x) - l_1(x))^+ \le v(x).$$

Для всех $x \in \mathbb{C}$ выполняется оценка

$$|g(z)| \le Ce^{l(\mathrm{Re}\, z)} \le Ce^{v(\mathrm{Re}\, z)}$$

и функция g имеет нули. Пусть λ — один из нулей функции g и

$$g_1(z) = \frac{g(z)}{z - \lambda}.$$

Очевидно, для функции $l(z)$ выполняется условие Липшица

$$|l(z) - l(w)| \le \max(|k_1|, |k_2|)|z - w| = \\ = k|z - w|, \ \forall z, w \in \mathbb{C},$$

и на границе круга $B(\lambda, 1)$ имеем оценку

$$|g_1(z)| \le Ce^{l(\mathrm{Re}\, z)} \le Ce^k e^{l(\mathrm{Re}\, \lambda)},$$

которая по принципу максимума для субгармонических функций продолжается внутрь круга

$$|g_1(z)| \le Ce^k e^{l(\mathrm{Re}\, \lambda)} \le Ce^{2k} e^{l(\mathrm{Re}\, z)}.$$

Таким образом, имеем оценку для всех $z \in \mathbb{C}$

$$|g_1(z)| \le \frac{2Ce^{2k}}{|z - \lambda| + 1} e^{l(\mathrm{Re}\, z)} \le \frac{c(\lambda, k)}{|z| + 1} e^{l(\mathrm{Re}\, z)} \le \\ \le \frac{C_1}{|\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| + 1} e^{l(\mathrm{Re}\, z)}$$

и, значит,

$$|g_1(z)| \le \frac{C_1}{|\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| + 1} e^{v(\mathrm{Re}\, z)} \tag{12}$$

Отсюда следует соотношение

$$\int |g_1(x + iy))|^2 dy \le C_1 e^{v(x)} \times \\ \times \int \frac{dy}{(|x| + |y| + 1)^2} = \frac{2C_1}{|x| + 1} e^{v(x)}. \tag{13}$$

Имеем

$$\frac{1}{K(x)} \le C\tau(h, x, 1) e^{-2\widetilde{h}(x)}$$

и если $\tau(\widetilde{h}, 0, 1) = c_0$, то

$$\tau(\widetilde{h}, x, 1) \le |x| + c_0.$$

Из последних двух неравенств получим

$$\frac{1}{K(x)} \le C_2 e^{-2\widetilde{h}(x)}(|x|+1).$$

Наконец, для функции типа синуса L функции u верна оценка

$$|L(z)| \le Ce^{u(\mathrm{Re}\ z)}.$$

Таким образом, из последних двух оценок и из соотношения (13) получим

$$\int \frac{|g_1(z)|^2 |L(z)|^2}{K(\mathrm{Re}\ z)} d\widetilde{h}'(x)dy \le$$

$$\le C' \int e^{2(v(x)+u(x)-\widetilde{h}(x))}\, d\widetilde{h}'(x).$$

Учитывая условие (11) и п. 2 леммы 1 теперь имеем

$$\int \frac{|g_1(z)|^2 |L(z)|^2}{K(\mathrm{Re}\ z)} d\widetilde{h}'(x)dy < \infty.$$

Из (11), (12) следует оценка

$$|g_1(z)L(z)| \le Ce^{v(\mathrm{Re}\ z)+u(\mathrm{Re}\ z)} \le$$

$$\le Ce^{\widetilde{h}(\mathrm{Re}\ z)}.$$

Функция $g_1 L$ является преобразованием Фурье – Лапласа некоторого ненулевого функционала S на пространстве $L^2(I, \exp h)$, причем

$$S(e^{\lambda t}) = g_1(\lambda)L(\lambda) = 0$$

если $\lambda \in \Lambda_L$. По теореме Банаха о полноте система Λ_L не полна в пространсте $L^2(I, \exp h)$, что противоречит нашему предположеню о полноте этой системы. Значит, нелинейной выпуклой функции, удовлетворяющей условию (11), не существует.

Теорема 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть v — некоторая выпуклая функция на всем $\mathbb{R}$. Тогда существуют конечные или равные $+\infty$ пределы*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{v(x)}{|x|},$$

причем, сумма этих пределов неотрицательна. Более того, если функция v нелинейна, то сумма этих пределов положительна.

Теорема 2. *Пусть h — выпуклая функция на ограниченном интервале $I = (a; b)$, u — выпуклая функция на $\mathbb{R}$. Пусть далее $L \in S(u)$. Система экспонент $\mathcal{E}(\Lambda_L)$ полна в пространстве $L^2(I, \exp h)$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{u(x)}{|x|} + \lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)}{|x|} \ge b - a.$$

Доказательство.

1. Пусть система экспонент не полна в указанном пространстве. Тогда по теореме 1 найдется нелинейная выпуклая функция v, такая, что

$$v(x) + u(x) \le \widetilde{h}(x).$$

Тогда по п.2 леммы 1 получаем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{v(x)}{|x|} + \lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)}{|x|} \le b,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{v(x)}{|x|} + \lim_{x\to-\infty} \frac{u(x)}{|x|} \le -a.$$

Сложим эти соотношения:

$$\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{v(x)}{|x|} + \lim_{x\to-\infty} \frac{v(x)}{|x|}\right) +$$

$$+\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)}{|x|} + \lim_{x\to-\infty} \frac{u(x)}{|x|}\right) \le b - a.$$

По лемме 2 первое слагаемое слева положительно (функция v — нелинейна!), следовательно,

$$\lim_{x\Gamma\to+\infty} \frac{u(x)}{|x|} + \lim_{x\Gamma\to-\infty} \frac{u(x)}{|x|} < b - a.$$

2. Пусть выполнено последнее неравенство. Оно означает, в частности, что оба предела слева конечны. Положим

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)}{|x|} = B, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{u(x)}{|x|} = -A.$$

Тогда $B - A < b - a$. Пусть $B - A = (b-a) - 4\varepsilon$. Положим $k = b - B - 2\varepsilon$. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)+kx}{|x|} = b - 2\varepsilon,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{u(x)+kx}{|x|} = -A - b + B + 2\varepsilon = -a - 2\varepsilon.$$

Очевидно, найдется $M > 0$ такое, что

$$\frac{u(x)+kx}{|x|} \le b - \varepsilon, \ x \ge M,$$

$$\frac{u(x)+kx}{|x|} \le -a-\varepsilon, \ x \le -M.$$

Следовательно, при некоторой постоянной C_1 имеем

$$u(x)+kx \le (b-\varepsilon)x + C_1, \ x > 0.$$
$$u(x)+kx \le (a+\varepsilon)x + C_1, \ x < 0.$$

По п.2 леммы 1 найдется число M, так, что

$$\frac{\widetilde{h}(x)}{|x|} \ge b - \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \ge M,$$
$$\frac{\widetilde{h}(x)}{|x|} \ge -a - \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \le -M.$$

Следовательно, при некоторой постоянной C_2 имеем

$$\widetilde{h}(x) \ge (b - \frac{\varepsilon}{2})x + C_2, \quad x > 0,$$
$$\widetilde{h}(x) \ge (a + \frac{\varepsilon}{2})x + C_2, \quad x < 0.$$

Сравнивая полученные оценки функций $u(x)+kx$ и $\widetilde{h}(x)$, приходим к выводу, что при некоторой постоянной C для всех x имеет место соотношение

$$u(x)+kx \le \widetilde{h}(x) - \frac{\varepsilon}{2}|x| + C,$$

Функция

$$v(x) = \frac{\varepsilon}{2}|x| - C + kx$$

— нелинейная выпуклая функция и, по последнему неравенству имеем $v(x)+u(x) \le \le \widetilde{h}(x)$. По теореме 1 в этом случае система $\mathcal{E}(\Lambda_L)$ неполна.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рокафеллар, Р.** Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. М.: Мир, 1973.
2. **Левин, Б. Я.** Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент / Б. Я. Левин, Ю. И. Любарский // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т.39. №3. С. 657-702.
3. **Любарский, Ю. И.** Ряды экспонент в пространствах Смирнова и интерполяция целыми функциями специальных классов / Ю. И. Любарский // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т.52. №3. С. 559-580.
4. **Юлмухаметов, Р. С.** Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций / Р. С. Юлмухаметов // Сиб. мат. ж. 1985. Т.26. №4. С.159-175.

ОБ АВТОРАХ

Башмаков Рустэм Абдрауфович, ст. преп. кафедры теории функций и функционального анализа, канд. физ.-мат. наук (ИМ с ВЦ УНЦ РАН, 2006г.) Иссл. в обл. комплексного анализа.

Путинцева Анастасия Андреевна, магистрант математического фак-та. Дипл. бакалавр в области математики (БашГУ, 2005)