Уфа : УГАТУ, 2007 Вестник УГАТУ • Математика Т. 9, № 3 (21). С. 96–103

Комплексный анализ

УДК 517.5

О. А. КРИВОШЕЕВА

РЯДЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОНОМОВ В КОМПЛЕКСНЫХ ОБЛАСТЯХ

В работе рассматривается ряды экспоненциальных мономов, изучается вопрос о сходимости этих рядов, получены аналоги теорем Абеля и Коши-Адамара.
Экспоненциальные мономы, опорная функция, выпуклая область, последовательность выпуклых компактов, абсолютная и равномерная сходимость

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются ряды экспоненциальных мономов, т.е. ряды вида

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} d_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z). \qquad (1)$$

Изучается вопрос о сходимости этих рядов. Доказывается, что поточечная сходимость ряда (1) в выпуклой области комплексной плоскости эквивалентна его абсолютной и равномерной сходимости на компактах этой области. Для таких рядов получены аналоги теорем Абеля и Коши-Адамара.

При изучении рядов вида (1), как и в теории рядов экспонент (и, в частности, в теории степенных рядов и рядов Дирихле) первоочередными являются задачи описания классов областей сходимости и характер сходимости этих рядов, а также задача восстановления области сходимости по коэффициентам ряда. В теории степенных рядов первые две задачи решаются при помощи теоремы Абеля, а последняя – при помощи теоремы Коши-Адамара. Для рядов Дирихле имеется аналог теоремы Абеля (см., напр., [2], гл. 2, л. 1.1), в котором утверждается, что сходимость ряда Дирихле в одной точке z_0 влечет за собой его сходимость в полуплоскости $\{z : Rez < Rez_0\}$. Если при этом величина $\sigma = \overline{\lim}(\ln k/\lambda_k)$ равна нулю, то (см. [2], гл. 2, т. 1.1) эта сходимость будет абсолютной и равномерной в любой полуплоскости $\{z : Rez < Rez_0 - \varepsilon\}$. Кроме того, для рядов Дирихле имеется полный аналог теоремы Коши-Адамара, в котором при условии $\sigma = 0$ вычисляется расстояние от начала координат до граничной прямой полуплоскости сходимости (см. [2], гл. 2, т. 1.2). В случае рядов экспонент полный аналог теоремы Абеля отсутствует. Имеется результат (см. [3],[2], гл. 2, т. 2.1) о том, что множество точек абсолютной сходимости ряда экспонент выпукло. Причем на компактных подмножествах внутренности этого множества ряд сходится равномерно (см. [2], гл. 2, т. 2.2). Если выполнено условие $\sigma = \overline{lim}(\ln k/|\lambda_k|) = 0$, то (см. [2], гл. 2, т. 2.3) простая и абсолютная сходимость ряда экспонент в выпуклой области равносильны. Кроме этого, для рядов экспонент известен также (см. [3], [4], [5] и [1], т. 3.1.3) аналог теоремы Коши-Адамара. В ней дается описание области сходимости ряда экспонент, которая получается как пересечение некоторого семейства полуплоскостей. При этом приводится формула для расстояний от начала координат до граничных прямых этих полуплоскостей. В случае общих рядов вида (1) можно отметить лишь результат из работы [6]. Здесь доказывается, что область абсолютной сходимости ряда (1) выпуклая, если выполнено следующее условие: $m = \overline{lim}\frac{m_k}{|\lambda_k|} = 0$.

В данной работе при условии $\sigma = m = 0$ получен полный аналог теоремы Абеля для рядов экспоненциальных мономов и, в частности, для рядов экспонент. Показывается, что областью сходимости ряда (1) является выпуклая область специального вида. Доказывается, что поточечная сходимость ряда (1) в этой области эквивалентна его абсолютной, равномерной сходимости на компактах и даже сходимости в более сильной топологии.

Приводится также аналог теоремы Коши-Адамара, который, как частные случаи, содержит все предыдущие подобные результаты для рядов Дирихле и рядов экспонент.

Прежде, чем перейти к результатам работы, введем еще некоторые обозначения и

Работа выпонена при поддержке РФФИ, грант № 06-01-00067

определения. Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}$. В дальнейшем считаем, что для каждой такой области выбрана и зафиксирована последовательность выпуклых компактов $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$—из D, исчерпывающая D, т.е. такая, что $K_m \subset intK_{m+1}$, $m \geq 1$, и $\bigcup_m K_m = D$; ($intM$ - внутренность M). В силу вложения $K_m \subset intK_{m+1}$ для каждого $m \geq 1$ найдется $\alpha_m > 0$ такое, что выполнено неравенство

$$H_{K_m}(z) + \alpha_m|z| \leq H_{K_{m+1}}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (2)$$

Здесь $H_M(z) = \sup\limits_{y \in M} Rezy$ – опорная функция M (точнее, комплексно-сопряженного к M множества). Функция $H_M(z)$ выпукла, положительно однородна, порядка один, полунепрерывна снизу, может принимать значения $+\infty$. Она непрерывна во внутренности того множества, где принимает конечные значения. Если M—ограничено, то $H_M(z)$ ограничена и непрерывна (см.[7]).

1. АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ АБЕЛЯ

Пусть Λ' – последовательность комплексных чисел $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$. Введем величину $\sigma'(\Lambda') = \overline{lim}_{j\to\infty} \frac{\ln j}{|\lambda_j|}$.

Лемма 1. *Пусть $\sigma'(\Lambda') = 0$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ сходится ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \exp(-\varepsilon|\lambda_j|)$.*

Доказательство. Предположим, что $\sigma'(\Lambda') = 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. В силу определения $\sigma'(\Lambda')$ найдется номер j_0 такой, что $\ln j \leq \frac{\varepsilon}{2}|\lambda_j|$ для всех $j \geq j_0$. Отсюда $\ln j^2 \leq \varepsilon|\lambda_j|$ или $j^2 \leq \exp(\varepsilon|\lambda_j|)$, $j \geq j_0$. Следовательно, $\exp(-\varepsilon|\lambda_j|) \leq j^{-2}$, $j \geq j_0$. Поэтому сходится ряд $\sum\limits_{j=j_0}^{\infty} \exp(-\varepsilon|\lambda_j|)$, а значит и ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \exp(-\varepsilon|\lambda_j|)$. Лемма доказана.

Пусть теперь Λ обозначает последовательность $\{\lambda_k, m_k\}$, где λ_k – комплексные числа такие, что $|\lambda_k| \to +\infty$ при $k \to \infty$ и m_k – натуральные числа. В дальнейшем через $\sigma(\Lambda)$ будем обозначать величину $\sigma'(\Lambda')$, где Λ' – последовательность $\{\lambda'_j\}$, составленная произвольным образом из членов последовательности $\{\lambda_k\}$ так, что каждая точка λ_k встречается в ней ровно m_k раз. Кроме того, через $\Theta(\Lambda)$ обозначим множество предельных точек последовательности $\{\lambda_k/|\lambda_k|\}$ (исключая из нее точку $\lambda_k = 0$, если она есть). Очевидно, что $\Theta(\Lambda)$ – замкнутое подмножество S – окружности единичного радиуса с центром в нуле. Положим $m(\Lambda) = \overline{lim}_{k\to\infty} \frac{m_k}{|\lambda_k|}$. Перейдем теперь к описанию последовательностей коэффициентов $\{d_{k,n}\}$, при которых в области D сходится ряд (1). Для каждого $m = 1, 2, ...$ введем банахово пространство

$$Q_m = \{d = \{d_{k,n}\} : ||d||_m = \sup_{k,n} |d_{k,n}| \times$$
$$\times \exp H_{K_m}(\lambda_k) < \infty\}.$$

Пусть $Q(D) = \bigcap_m Q_m$. Тогда $Q(D)$ – пространство Фреше.

Пусть E – множество в $\mathbb{C}$, Θ – замкнутое подмножество S. Θ–выпуклой оболочкой E называется множество

$$E(\Theta) = \{z \in \mathbb{C} : Re(z\xi) < H_E(\xi), \forall \xi \in \Theta\}.$$

Оно является выпуклой областью. Действительно, по определе-нию $E(\Theta)$ есть пересечение полуплоскостей, а потому выпукло. Выпуклость влечет за собой связность $E(\Theta)$. Остается показать, что $E(\Theta)$—открытое множество. Предположим, что это не так. Тогда существует точка $z_0 \in E(\Theta)$ и последовательность $\{z_k\}$ такая, что $z_k \to z_0$ при $k \to \infty$ и $z_k \notin E(\Theta)$ для всех $k \geq 1$, то есть $Re(z_k\xi_k) \geq H_E(\xi_k)$ для некоторого $\xi_k \in \Theta$, $k = 1, 2, ...$ Переходя к подпоследовательности, можно считать, что ξ_k сходится к $\xi_0 \in \Theta$. Тогда из последнего неравенства с учетом полунепрерывности снизу опорной функции получаем

$$Rez_0\xi_0 = \underline{\lim}_{k\to\infty} Re(z_k\xi_k) \geq$$
$$\geq \underline{\lim}_{k\to\infty} H_E(\xi_k) \geq H_E(\xi_0).$$

Получили противоречие с определением $E(\Theta)$, так как $z_0 \in E(\Theta)$, а $\xi_0 \in \Theta$. Таким образом, мы показали, что $E(\Theta)$ – выпуклая область. Отметим еще, что внутренность E лежит в этой области. В самом деле, если z - внутренняя точка E, то из определения опорной функции следуют неравенства $Re(z\xi) < H_E(\xi)$, $\forall \xi \in \Theta$. Это означает, что $z \in E(\Theta)$.

В частном случае, когда $\Theta = S$, Θ–выпуклая оболочка множества совпадает с его обычной выпуклой оболочкой (точнее говоря, с внутренностью этой выпуклой оболочки).

Лемма 2. *Пусть $m(\Lambda) = 0$. Предположим, что общий член ряда (1) ограничен на множестве $E \subset \mathbb{C}$, т.е.*

$$|d_{k,n}z^n \exp(\lambda_k z)| \leq A(z), \quad \forall k \geq 1,$$

$$n = 0, 1, ..., m_k - 1, \quad z \in E.$$

Кроме того, если $0 \in E$, то ограничена также последовательность $\{d_{k,n}\}_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1}$. Тогда имеет место включение $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D)$, где $D = E(\Theta(\Lambda))$.

Доказательство. Предположим, что $d \notin$ $\notin Q(D)$. Тогда $d \notin Q_m$ для некоторого номера $m = 1, 2, ...$ Это означает, что найдется подпоследовательность $\{d_{k_p,n_p}\}$ такая, что

$$|d_{k_p,n_p}| \exp H_{K_m}(\lambda_{k_p}) \to +\infty, \qquad (3)$$

$$\text{когда} p \to \infty.$$

Переходя еще раз к подпоследовательности, можно считать, что $\lambda_{k_p}/|\lambda_{k_p}|$ сходится к некоторой точке $x_0 \in \Theta(\Lambda)$. Поскольку K_{m+1} – компакт в $D = E(\Theta(\Lambda))$, то из определений $E(\Theta(\Lambda))$ и опорной функции следует, что для некоторого $z_0 \in E$ верна оценка $Re(z_0x_0) >$ $> H_{K_{m+1}}(x_0)$. Тогда с учетом (2) и непрерывности опорной функции компакта найдется $\delta > 0$ такое, что

$$Re(z_0x) > H_{K_{m+1}}(x) \geq H_{K_m}(x) + \alpha_m|x|, \quad (4)$$

$$x \in B(x_0, \delta).$$

Выберем p_0 так, что $\lambda_{k_p}/|\lambda_{k_p}| \in B(x_0, \delta)$ для всех $p \geq p_0$. Пусть вначале $z_0 \neq 0$. По условию $m(\Lambda) = 0$. Следовательно, в силу определения величины $m(\Lambda)$ для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер $p_1 \geq p_0$ такой, что $m_{k_p} \leq \varepsilon|\lambda_{k_p}|$ для всех $p > p_1$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon \ln|z_0| > -\alpha_m$. Тогда с учетом (4) и положительной однородности опорной функции для всех $p > p_1$ получаем:

$$|z_0^{n_p} \exp \lambda_{k_p} z_0| = \exp(n_p \ln|z_0| + Re\lambda_{k_p} z_0) >$$
$$> \exp(-n_p\alpha_m\varepsilon^{-1} + Re\lambda_{k_p} z_0) >$$
$$> \exp(-m_{k_p}\alpha_m\varepsilon^{-1} + Re\lambda_{k_p} z_0) \geq$$
$$\geq \exp(-\alpha_m|\lambda_{k_p}| + H_{K_m}(\lambda_{k_p}) + \alpha_m|\lambda_{k_p}|) =$$
$$= \exp H_{K_m}(\lambda_{k_p}).$$

Таким образом, в силу (3)

$$|d_{k_p,n_p} z_0^{n_p} \exp \lambda_{k_p} z_0| \to +\infty,$$

когда $p \to \infty$. Это противоречит условию леммы. Пусть теперь $z_0 = 0$. Тогда с учетом (3) и (4) для всех $p > p_0$ получаем:

$$|d_{k_p,n_p}| = |d_{k_p,n_p}| \exp(Re(z_0\lambda_{k_p})) \geq$$
$$\geq |d_{k_p,n_p}| \exp H_{K_m}(\lambda_{k_p}) \to +\infty,$$

когда $p \to \infty$. Таким образом, $d \in Q(D)$. Лемма доказана.

Положим $c_{m,k,n} = \sup_{z \in K_m} |z^{n-1} \exp(z\lambda_k)|$.

Лемма 3. *Пусть $m(\Lambda) = 0$. Для любого номера m существует постоянная $C > 0$ такая, что верны неравенства*

$$c_{m,k,n} \leq C \exp H_{K_{m+1}}(\lambda_k),$$

$$\forall k \geq 1, \ \forall n = 1, ..., m_k.$$

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдется подпоследовательность $\{k_p, n_p\}$ такая, что

$$c_{m,k_p,n_p} > p \exp H_{K_{m+1}}(\lambda_{k_p}), \quad p = 1, 2, ... \quad (5)$$

Через z_0 обозначим точку компакта K_m с максимальным модулем. Можно считать, что $K_m \neq \{0\}$. Тогда $z_0 \neq 0$ и мы имеем:

$$c_{m,k_p,n_p} \leq |z_0|^{n_p} \exp H_{K_m}(\lambda_{k_p}) =$$
$$= \exp[n_p \ln|z_0| + H_{K_m}(\lambda_{k_p})] \leq$$
$$\leq \exp[m_{k_p}|\ln|z_0|| + H_{K_m}(\lambda_{k_p})].$$

По условию $m(\Lambda) = 0$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер p_0 такой, что $m_{k_p} \leq$ $\leq \varepsilon|\lambda_{k_p}|$ для всех $p > p_0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon|\ln|z_0|| < \alpha_m$. Тогда по предыдущему с учетом (2) получаем:

$$c_{m,k_p,n_p} \leq \exp[\varepsilon|\lambda_{k_p}||\ln|z_0|| + H_{K_m}(\lambda_{k_p})] \leq$$
$$\leq \exp[\alpha_m|\lambda_{k_p}| + H_{K_m}(\lambda_{k_p})] \leq$$
$$\leq \exp[H_{K_{m+1}}(\lambda_{k_p})], \quad p > p_0.$$

Это противоречит (5). Лемма доказана.

Докажем теперь аналог теоремы Абеля для ряда (1).

Теорема 1. *Пусть $\sigma(\Lambda) = m(\Lambda) = 0$. Предположим, что общий член ряда (1) ограничен на множестве $E \in \mathbb{C}$. Кроме того, если $0 \in E$, то ограничена также последовательность $\{d_{k,n}\}_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1}$. Тогда $d = \{d_{k,n}\} \in$ $\in Q(D)$, где $D = E(\Theta(\Lambda))$, и для каждого $m = 1, 2, ...$ найдется $C_0 > 0$ (не зависящая от последовательности $d \in Q(D)$) такая, что $\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}|c_{m,k,n} \leq C_0||d||_{m+2}$. В частности, ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте из области D.*

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда по лемме 2 имеет место включение $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D)$. В силу леммы 3 с учетом (2) и определения нормы в Q_m получаем:

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}|c_{m,k,n} \le$$

$$\le C \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}| \exp H_{K_{m+1}}(\lambda_k) =$$

$$= C \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}| \exp(H_{K_{m+2}}(\lambda_k)+$$

$$+H_{K_{m+1}}(\lambda_k) - H_{K_{m+2}}(\lambda_k)) \le$$

$$\le C\|d\|_{m+2} \sum_{k=1}^{\infty} m_k \exp(-\alpha_{m+1}|\lambda_k|).$$

По условию $\sigma(\Lambda) = 0$. Следовательно, последний ряд сходится по лемме 1. Это дает нам требуемое неравенство с некоторой константой $C_0 > 0$, не зависящей от $d = \{d_{k,n}\} \in \in Q(D)$. Из него следует абсолютная и равномерная сходимость ряда (1) на любом компакте из D. Теорема доказана.

Замечания. 1. Из теоремы 1 следует, что при условии $\sigma(\Lambda) = m(\Lambda) = 0$ внутренность множества сходимости ряда (1) всегда является выпуклой и даже Θ–выпуклой областью (то есть областью, которая представляет из себя пересечение полуплоскостей $\{z : Re(z\xi) < h(\xi)\}, \ \ \xi \in \Theta$)

2. Если изъять условие $\sigma(\Lambda) = 0$, то утверждение теоремы становится неверным. В книге [2] приведен пример ряда Дирихле, для которого $\sigma(\Lambda) > 0$. Этот ряд сходится в полуплоскости (а значит, его общий член ограничен в этой полуплоскости), но абсолютно расходится в каждой точке плоскости.

3. Условие $m(\Lambda) = 0$ также существенно. Пусть $\Lambda = \{k, m_k\}$ такова, что $m(\Lambda) = \tau > 0$. При этом $\sigma(\Lambda) = 0$. Рассмотрим ряд

$$\sum \exp(2k) z^{m_k-1} \exp(kz).$$

Нетрудно показать, что этот ряд сходится в полуплоскости $Rez < -a$, где $a > 1$ выбрано из условия $a > 2(\tau \ln a + 1)$, и в круге $B(0, r)$, где $r \in (0, 1)$ такое, что $-2^{-1}\tau \ln r > 3$. В то же время он, очевидно, расходится на окружности S. Таким образом, внутренность множества сходимости данного ряда не является выпуклой областью и даже просто областью (она несвязна).

4. В случае, когда $0 \in E$, в теореме накладывается условие ограниченности последовательности коэффициентов $\{d_{k,n}\}$. Оно существенно, если 0 – изолированная точка E. Рассмотрим ряд $\sum \exp(2k) z \exp(kz)$. Здесь $\Theta(\Lambda) = \{1\}$. В качестве E возьмем множество $\{-2, 0\}$. Тогда $E(\Theta(\Lambda))$— полуплоскость $Rez < 0$. Общий член ряда ограничен на E. Однако ряд не сходится в этой полуплоскости (он расходится на S). Он сходится в полуплоскости $Rez < -2$, которая совпадает с множеством $E'(\Theta(\Lambda))$, где $E' = \{-2\}$. В этом случае нарушено условие ограниченности коэффициентов (остальные выполнены), и теорема перестает быть верной. В ситуации, когда $0 \in E$ не является изолированной точкой E, теорема останется верной и без условия ограниченности коэффициентов. Действительно, при сделанных предположениях точка 0 лежит в замыкании множества $E' = E\backslash\{0\}$. Остается заметить, что в этом случае области $E(\Theta(\Lambda))$ и $E'(\Theta(\Lambda))$ совпадают (так как совпадают, очевидно, опорные функции E и E').

Следствие. *Пусть $\sigma(\Lambda) = m(\Lambda) = 0$. Тогда эквивалентны утверждения:*

1. *Ряд (1) сходится в каждой точке области G;*
2. *Ряд (1) сходится в каждой точке области $D = G(\Theta(\Lambda))$;*
3. *Ряд (1) абсолютно сходится в каждой точке области D;*
4. *Ряд (1) равномерно сходится на каждом компакте из D;*
5. *Имеет место включение $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D)$.*

Доказательство. Пусть выполнено 1). Фиксируем m и рассмотрим компакт K_m из области D. Поскольку K_m – компакт в D, то с учетом определения области $G(\Theta(\Lambda))$ и опорной функции H_D получаем неравенства $H_{K_m}(\xi) < H_D(\xi) \le H_G(\xi), \ \ \forall \xi \in \Theta(\Lambda)$. Используя еще раз определение опорной функции (теперь уже для множества G), в силу последних соотношений для каждого $\xi \in \in \Theta(\lambda)$ найдем точку $z(\xi) \in G$ такую, что $Re(z(\xi), \xi) > H_{K_m}(\xi)$. При этом, так как G – область, то небольшим "шевелением"точки $z(\xi)$ можно добиться того, что $z(\xi) \neq 0$. В силу непрерывности опорной функции компакта последняя оценка продолжается в некоторую окрестность $U(\xi)$ точки ξ. Из открытого покрытия компакта $\Theta(\Lambda)$ множествами

$U(\xi)$, $\xi \in \Theta(\Lambda)$, выделим конечное подпокрытие $U(\xi_1), \ldots, U(\xi_s)$. Тогда имеет место неравенство

$$H_E(\xi) > H_{K_m}(\xi), \quad \forall \xi \in \Theta(\Lambda), \tag{6}$$

где E – множество, состоящее из точек $z(\xi_1), \ldots, z(\xi_s)$. Согласно утверждению 1) ряд (1) сходится в каждой точке E. Следовательно, его общий член ограничен в любой такой точке. Кроме того, $0 \notin E$. Таким образом, все условия теоремы 1 выполнены. Поэтому для области $D' = E(\Theta(\Lambda))$ будут верны все ее утверждения. В частности, $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D')$. Кроме того, если $\{K'_p\}$ – исчерпывающая последовательность выпуклых компактов для D', то для каждого $p = 1, 2, \ldots$ найдется $C_0 > 0$ такая, что

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}| c'_{p,k,n} \le C_0 ||d||_{p+2},$$

где $c'_{m,k,n} = \sup\limits_{z \in K'_p} |z^{n-1} \exp(z\lambda_k)|$ и $||d||_{p+2}$ – норма последовательности $d = \{d_{k,n}\}$ в пространстве Q'_{p+2}, построенном по компакту K'_{p+2}. Последнее неравенство означает, что (1) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте из D'. В частности это относится к K_m, так как в силу (6) и определений H_{K_m} и области $D' = E(\Theta(\Lambda))$ он лежит в последней. Таким образом, ряд (1) абсолютно и равномерно сходится на компакте K_m. Кроме того, так как $K_m \subset K'_p$ для некоторого p, то из включения $d \in Q'_p$ следует, что $d \in Q_m$. В силу произвольности m мы получаем отсюда утверждения 2)–5). Обратно из 2)–4) легко следует 1), поскольку имеет место вложение $G \subset D$. Остается доказать истинность импликации 5) $\Rightarrow$ 1) или истинность более общей импликации 5) $\Rightarrow$ 2). Это по существу уже сделано в теореме 1. Действительно, в ходе ее доказательства показывается, что 5) влечет за собой выполнение неравенства в формулировке этой теоремы, из которого в свою очередь вытекает 2) (как впрочем, 3) и 4)). Следствие доказано.

Замечание. В следствии при условии $\sigma(\Lambda) = m(\Lambda) = 0$ дается описание пространства коэффициентов сходящихся рядов (1).

Теорема 1 является аналогом теоремы Абеля для степенных рядов. Действительно, как и в последней, в теореме 1 доказывается, что ограниченность общего члена ряда в некоторых граничных точках области влечет за собой его абсолютную и равномерную сходимость внутри области. Степенной ряд является частным случаем ряда экспонент: при помощи простого преобразования переменной степенной ряд превращается в ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n \exp(nz)$. Однако, если переформулировать теорему 1 для этого случая, то в результате получится более слабое утверждение чем теорема Абеля. Это объясняется тем, что круги, на которых должен абсолютно и равномерно сходится степенной ряд, при указанном преобразовании переходят в неограниченные множества. В теореме же 1 равномерная сходимость гарантируется лишь на компактах. Существенно усложнив доказательство теоремы, можно показать, что (1) будет равномерно сходиться в некоторых случаях и на неограниченных множествах. Однако эти множества далеко не всегда будут содержать образы кругов при преобразовании переменной, переводящем степенной ряд в ряд экспонент. Чтобы пояснить сказанное, приведем пример. Рассмотрим ряд

$$\sum \exp(nz) + z\exp(nz) \tag{7}$$

В этом случае $\Theta(\Lambda) = \{1\}$. Коэффициенты ряда равны единице, а потому ограничены. Следовательно, по теореме 1 ряд (7) сходится в области $E(\Theta(\Lambda))$, где $E = \{0\}$, которая совпадает с левой полуплоскостью, и равномерно на ее компактах. Можно показать, что ряд (7) сходится равномерно и на некоторых неограниченных множествах (например, на углах раствора строго меньше π и с вершинами, принадлежащими отрицательной вещественной полуоси). Но он не сходится равномерно ни в какой полуплоскости вида $\Pi(a) = \{z : Re z < -a\}$, $a > 0$. Рассмотрим теперь ряд

$$\sum \exp(nz) \tag{8}$$

Он получается из степенного ряда $\sum w^n$ при помощи преобразования $w = \exp z$. Последний сходится в $B(0,1)$, а по теореме Абеля он сходится равномерно в любом круге меньшего радиуса. Эти круги при указанном преобразовании переходят в полуплоскости $\Pi(a)$. Следовательно, ряд (8) сходится равномерно в каждой из этих полуплоскостей. Такое отличие в множествах равномерной сходимости у рядов (7) и (8) связано с наличием множителей z в ряде (7). Как показывает этот пример, сохраняя подобные множители, нельзя доказать теорему типа теоремы 1 так, чтобы ее частным случаем была теорема Абеля для степенных рядов. Однако эту ситуацию можно исправить, отказавшись от сомножителей

z^n в ряде (1), т.е. рассматривая лишь "чистые"ряды экспонент, что и подтверждается следующим результатом. Но, прежде, введем еще дополнительные обозначения. Наряду с $E(\Theta)$ для каждого $\varepsilon > 0$ определим еще множество

$$E(\Theta, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : Re(z\xi) < H_E(\xi) - \varepsilon, \forall \xi \in \Theta\}.$$

Отметим, что в случае, когда Θ лежит в угле с вершиной в нуле раствора не больше π, множество $E(\Theta)$ (а вместе с ним и $E(\Theta, \varepsilon)$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$) является неограниченным.

Теорема 2. *Предположим, что члены ряда*

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty, m_k-1} d_{k,n} \exp(\lambda_k z) \qquad (9)$$

равномерно ограничены на множестве E, то есть

$$|d_k \exp(\lambda_k z)| \le A, \quad \forall k \ge 1, \quad z \in E.$$

Пусть далее $\sigma(\Lambda) = 0$ и замкнутое множество $\Theta \subset S$ таково, что для некоторого k_0 верно включение $\lambda_k/|\lambda_k| \in \Theta$, $k \ge k_0$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $c(\varepsilon, \Lambda) > 0$ такая, что выполнено неравенство

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k \exp(\lambda_k z)| \le c(\varepsilon, \Lambda) A, \qquad z \in E(\Theta(\Lambda), \varepsilon).$$

В частности ряд (9) сходится абсолютно и равномерно на каждом из множеств $E(\Theta(\Lambda), \varepsilon)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $z \in E(\Theta, \varepsilon)$. Так как $\xi_k = \lambda_k/|\lambda_k| \in \Theta$ для всех $k \ge k_0$, то согласно определению $E(\Theta, \varepsilon)$ имеем оценку:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k \exp(\lambda_k z)| = \sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k \exp(|\lambda_k|(z\xi_k))| =$$

$$= \sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k| \exp(|\lambda_k| Re(z\xi_k)) \le$$

$$\le \sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k| \exp(|\lambda_k|(H_E(\xi_k) - \varepsilon)).$$

Далее, в силу определения опорной функции, найдем точку $z_k \in E$, $k \ge k_0$ такую, что $Re(z_k, \xi_k) \ge H_E(\xi_k) - \varepsilon/2$. Тогда из предыдущего условия теоремы получаем:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k \exp(\lambda_k z)| \le$$

$$\le \sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k| \exp(|\lambda_k|(H_E(\xi_k) - \varepsilon)) \le$$

$$\le \sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k| \exp(|\lambda_k|(Re(z_k\xi_k) - \varepsilon/2)) =$$

$$= \sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k| \exp(Re(z_k\lambda_k) - |\lambda_k|\varepsilon/2) =$$

$$= \sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k \exp(\lambda_k z_k)| \exp(-|\lambda_k|\varepsilon/2) \le$$

$$\le A \sum_{k=k_0}^{\infty} \exp(-|\lambda_k|\varepsilon/2).$$

Так как $\sigma(\Lambda) = 0$, то по лемме 1 последний ряд сходится, и мы получаем требуемое неравенство. Теорема доказана.

Замечание. Рассмотрим ряд экспонент

$$\sum d_k \exp(kz), \qquad (10)$$

в который переходит ряд $\sum d_k w^k$ при преобразовании $w = \exp z$. В этом случае $\sigma(\Lambda) = 0$ и для каждого $k \ge 1$ имеет место включение $\lambda_k/|\lambda_k| \in \Theta = \{1\}$. Предположим, что общий член ряда (10) ограничен в z_0 и положим $E = \{z_0\}$. Тогда по теореме 2 ряд (10) сходится абсолютно и равномерно на каждом из множеств $E(\Theta, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, которое совпадает с полуплоскостью $\{z : Re z < Re z_0 - \varepsilon\}$. Это дает нам теорему Абеля для степенного ряда.

2. АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ КОШИ – АДАМАРА

Приведем результат, который является аналогом теоремы Коши-Адамара для степенных рядов. В этой теореме дается формула для вычисления радиуса сходимости степенного ряда. Аналогом круга для рядов экспонент является полуплоскость, а аналогом радиуса круга—расстояние от начала координат до полуплоскости. Если $\Theta(\Lambda)$ состоит из двух точек, то соответствующая $\Theta(\Lambda)$—выпуклая область сходимости ряда (1) является пересечением двух полуплоскостей. У этой области уже два "радиуса сходимости—расстояния от начала координат до двух прямых, являющихся границами этих полуплоскостей. Если же $\Theta(\Lambda)$—бесконечное множество, то и соответствующих "радиусов сходимости"ряда (1) будет бесконечно много.

Следует отметить, что некоторые расстояния нужно брать со знаком минус. Такая ситуация возникает в случае, когда область сходимости не содержит начало координат. Рассмотрим, например, ряд $\sum 2^k \exp(kz)$. Применяя к соответствующему ему степенному ряду теорему Абеля, легко установить, что областью сходимости является полуплоскость $\{z : Re z < \ln(1/2)\}$. Чтобы не возникало путаницы, "радиусом сходимости"здесь следует считать величину $\ln(1/2)$, равную расстоянию от начала координат до прямой, ограничивающей полуплоскость, взятому со знаком минус, а не само расстояние. Поясним сказанное. Рассмотрим еще ряд $\sum 2^{-k} \exp(kz)$. Так же, как и в первом случае, находим, что областью сходимости этого ряда является полуплоскость $\{z : Re z < \ln 2\}$. И вот здесь уже "радиус сходимости"равен $\ln 2$, то есть расстоянию от начала координат до прямой, оганичивающей полуплоскость.

Прежде, чем сформулировать заявленный выше результат, введем еще обозначения. Пусть $\xi \in \Theta(\Lambda)$. Для последовательности коэффициентов $d = \{d_{k,n}\}$ положим

$$h(d, \xi) = \inf \underline{\lim}_{j\to\infty} \min_{0\le n\le m_{k(j)}-1} \frac{\ln(1/|d_{k(j),n}|)}{|\lambda_{k(j)}|},$$

где инфимум берется по всем подпоследовательностям $\{\lambda_{k(j)}\}$ последовательности $\{\lambda_k\}$ таким, что $\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}|$ сходится к ξ, когда $j \to \infty$. Таким образом, мы получили функцию $h(d, \xi)$, $\xi \in \Theta(\Lambda)$. Из определения нетрудно вывести, что она является полунепрерывной снизу. Тогда как и выше, показывается, что множество $D = D(d, \Lambda) = \{z : Re(z\xi) < < h(d, \xi), \xi \in \Theta(\Lambda)\}$ является $\Theta(\Lambda)$ – выпуклой областью.

Теорема 3. *Пусть $\sigma(\Lambda) = m(\Lambda) = 0$. Тогда ряд (1) сходится в каждой точке области D и расходится в каждой точке ее внешности $\mathbb{C}\backslash\overline{D}$ за исключением, возможно, нуля (если $0 \notin \overline{D}$). Если $0 \notin \overline{D}$ и последовательность $\{d_{k,n}\}_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1}$ ограничена, то ряд (1) расходится в каждой точке внешности D.*

Доказательство. Пусть $z \in D$. Выберем номер m так, что $z \in K_m$. Тогда согласно лемме 3 с учетом (2) получаем оценку

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}||z|^n \exp(Re(z\lambda_k)) \le$$

$$\le C \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}| \exp H_{K_{m+1}}(\lambda_k) =$$

$$= C \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}| \exp(H_{K_{m+2}}(\lambda_k) +$$

$$+ H_{K_{m+1}}(\lambda_k) - H_{K_{m+2}}(\lambda_k)) \le$$

$$\le C \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}| \exp(H_{K_{m+2}}(\lambda_k) - \alpha_{m+1}|\lambda_k|). \tag{11}$$

Покажем, что

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} \max_{0\le n\le m_k-1} |d_{k,n}| \exp(H_{K_{m+2}}(\lambda_k)) < +\infty \tag{12}$$

Пусть это не так. Тогда для некоторой подпоследовательности $\{k(j), n(j)\}$ имеем: $\overline{\lim}_{j\to\infty} |d_{k(j),n(j)}| \exp(H_{K_{m+2}}(\lambda_{k(j)})) = +\infty$, т.е.

$$\overline{\lim}_{j\to\infty} (\ln |d_{k(j),n(j)}| + H_{K_{m+2}}(\lambda_{k(j)})) = +\infty$$

. Отсюда

$$\overline{\lim}_{j\to\infty} (|\lambda_{k(j)}|^{-1} (\ln |d_{k(j),n(j)}| + + H_{K_{m+2}}(\lambda_{k(j)}))) \ge 0. \tag{13}$$

Переходя еще раз к подпоследовательности, можно считать, что $\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}|$ сходится к некоторой точке $\xi \in \Theta(\lambda)$. Тогда с учетом непрерывности, положительной однородности опорной функции компакта и определения величины $h(d, \xi)$ получаем:

$$\overline{\lim}_{j\to\infty} (|\lambda_{k(j)}|^{-1} (\ln |d_{k(j),n(j)}| + + H_{K_{m+2}}(\lambda_{k(j)}))) \le$$

$$\le \overline{\lim}_{j\to\infty} (|\lambda_{k(j)}|^{-1} \ln |d_{k(j),n(j)}|) + + \overline{\lim}_{j\to\infty} (|\lambda_{k(j)}|^{-1} H_{K_{m+2}}(\lambda_{k(j)}))) \le$$

$$\le \overline{\lim}_{j\to\infty} (|\lambda_{k(j)}|^{-1} \ln |d_{k(j),n(j)}|) + H_{K_{m+2}}(\xi) \le$$

$$\le -h(d, \xi) + H_{K_{m+2}}(\xi) < 0.$$

Последняя оценка здесь следует из того, что $H_{K_{m+2}}(\xi) < H_D(\xi)$ (поскольку K_{m+2} – компакт в D) и $H_D(\xi) \le h(d, \xi)$ (в силу определения $D = D(d, \Lambda)$ и H_D). Мы получили противоречие с (13). Следовательно, (12) верно. Поэтому согласно (11) имеем:

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}||z|^n \exp(Re(z\lambda_k)) \le$$

$$\leq C' \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} \exp(-\alpha_{m+1}|\lambda_k|).$$

По условию $\sigma(\Lambda) = 0$. Тогда в силу леммы 1 последний ряд сходится. Это означает, что (1) сходится в точке z. Пусть теперь $z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}$. Тогда по определению D найдется $\xi \in \Theta(\Lambda)$ такое, что

$$Re(z\xi) > h(d,\xi). \quad (14)$$

Согласно определению величины $h(d,\xi)$ найдем подпоследовательность $\{k(j), n(j)\}$ такую, что $\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}|$ сходится к ξ и

$$h(d,\xi) = \lim_{j\to\infty} \frac{ln(1/|d_{k(j),n(j)}|)}{|\lambda_{k(j)}|}. \quad (15)$$

Предположим, что (1) сходится в точке z. Тогда по теореме 1 последовательность коэффициентов d принадлежит $Q(D')$, где D' – $\Theta(\Lambda)$–выпуклая оболочка множества E, являющегося объединением круга, не содержащего начала координат, из D и точки z. При этом z является граничной точкой D'. Следовательно, с учетом (14), в D' найдется z' такая, что

$$Re(z'\xi) > h(d,\xi). \quad (16)$$

Выберем номер p, для которого компакт K'_p содержит z'. Как уже отмечалось, $d \in Q(D')$. Поэтому, согласно определению $Q(D')$, выполнено неравенство $|d_{k,n}| \leq$ $\leq C_1 \exp(-H_{K'_p}(\lambda_k))$, где $C_1 > 0$. Так как $z' \in K'_p$, то $Re(z'\lambda_k) \leq H_{K'_p}(\lambda_k)$, $k \geq 1$. С учетом этого по предыдущему получаем: $|d_{k,n}| \leq C_1 \exp(-Re(z'\lambda_k))$. Отсюда и из (16) следует, что

$$\lim_{j\to\infty} \frac{-\ln|d_{k(j),n(j)}|}{|\lambda_{k(j)}|} \geq$$

$$\geq \lim_{j\to\infty} \frac{\ln C_1^{-1} + Re(z'\lambda_{k(j)})}{|\lambda_{k(j)}|} =$$

$$= Re(z'\xi) > h(d,\xi).$$

Это противоречит (15). Теорема доказана.

Замечание. В частном случае для ряда (10) имеем формулу:

$$h(d,1) = \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\ln(1/|d_k|)}{k} =$$

$$= \underline{\lim}_{k\to\infty} \ln\left(\frac{1}{\sqrt[k]{|d_k|}}\right).$$

Делая преобразование $w = \exp z$, переводящее ряд (10) в степенной ряд, получаем формулу Коши-Адамара для радиуса сходимости последнего $R = \exp h(d,1) = \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|d_k|}}$.

ВЫВОДЫ

В данной работе были получены результаты: Теоремы 2,3, – которые являются аналогами Теорем Абеля и Коши-Адамара, соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Леонтьев, А. Ф.** Ряды экспонент / А. Ф. Леонтьев. М.: Наука, 1976.
2. **Леонтьев, А. Ф.** Целые функции. Ряды экспонент / А. Ф. Леонтьев. М.: Наука. 1983.
3. **Hille, E.** Note on Dirichlet's series with comlex exponents / E. Hille // Ann. Of Math. 1924. V. 25. P. 261-278.
4. **Лунц, Г. Л.** О некоторых обобщениях рядов Дирихле / Г. Л. Лунц // Матем. сб. 1942. Т. 10(52). № 1-2. С. 35-50.
5. **Лунц, Г. Л.** Об одном классе обобщенных рядов Дирихле / Г. Л. Лунц // УМН. 1957. Т. 12, вып. 3(75). С. 173-179.
6. **Братищев, А. В.** Базисы Кете, целые функции и их приложения: дисс. на соискание уч. ст. докт. физ.-мат. наук / А. В. Братищев // Ростов-на-Дону. 1995.
7. **Лейхтвейс, К.** Выпуклые множества / К. Лейхтвейс // М.: Наука, 1985.

ОБ АВТОРЕ

Кривошеева Олеся Александровна, магистрант математического фак-та. Дипл. бакалавра в области математики (БашГУ, 2005).