Уфа : УГАТУ, 2007 Вестник УГАТУ • Математика Т. 9, № 3 (21). С. 104–109

Комплексный анализ

УДК 517.982.3

В. И. ЛУЦЕНКО, Р. С. ЮЛМУХАМЕТОВ

ОПИСАНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С РАДИАЛЬНЫМ ВЕСОМ

Нашей задачей является описание функционалов гильбертового пространства при помощи преобразования Лапласа. В статье дано описание сопряженного пространства функционалов при помощи обобщенного преобразования Фурье—Лапласа к весовому гильбертовому пространству многих переменных..
весовые пространства функций, полнота полиномов, целые функции

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и $w(t)$ положительная функция на D. Обозначим через $L^2(D, w)$ пространство локально интегрируемых функций $L_{loc}(D)$, для которых конечна следующая норма

$$||f||_{L^2(D,w)} = \left(\int\limits_D |f(t)|^2/w(t)\ dt \right)^{1/2},$$

где $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$ и $dt = dt_1 dt_2 ... dt_n$.

Пусть S – линейный непрерывный функционал над гильбертовым пространством $L^2(D, w)$. Определим преобразование Фурье – Лапласа функционала S следующим образом

$$\hat{S}(z) = S(exp(< t, z >)), \text{ где}$$

$$< z, t >= z_1 t_1 + z_2 t_2 + ... + z_n t_n.$$

Преобразование Фурье – Лапласа сопоставляет каждому линейному функционалу S целую функцию $\hat{S}(z)$ в $\mathbb{C}^n$ и тем самым определяет сопряженное пространство $L_2^*(D, w)$. В данной статье рассматривается задача описания этого подпространства целых функций.

Одно из решений этой задачи сводится к определению нормы в пространстве целых функций с помощью формулы

$$||F||_\mu = \left(\int\limits_D |F(z)|^2 d\mu(z) \right)^{1/2},$$

где $\mu(z)$ – неотрицательная мера Бореля, такая, что для любого функционала S выполняется следующее соотношение

$$m||S||_{L_2^*(D,w)} \le ||\hat{S}||_\mu \le M||S||_{L_2^*(D,w)} \qquad (1)$$

Работа выпонена при поддержке РФФИ, грант № 06-01-00516а

Если такая мера существует, то преобразование Фурье – Лапласа устанавливает изоморфизм пространства $L_2^*(D, w)$ и пространства целых функций с нормой $||\cdot||_\mu$. Справедлива следующая теорема.

Теорема A. [1] *Для существования неотрицательной меры μ на $\mathbb{C}^n$, с условием (1), необходимо и достаточно, чтобы нашлась неотрицательная мера η на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию*

$$m\ w(t) \le \int\limits_{R^n} e^{2<x,t>} d\eta(x) \le M\ w(t), t \in D,$$

причем константы m и M такие же, как в (1), а $d\mu(x + iy) = d\eta(x)\, dy$.

В частном случае классическая теорема Пэли – Винера получается при $D = [0, 1], w(t) = 1$.

При жестких условиях на функцию $w(t)$, а именно, когда $w(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{xt} d\sigma$, где $d\sigma$ – неотрицательная мера Бореля, получены аналогичные описания пространства функционалов S. Soitoh [2].

При $n = 1$ для произвольных логарифмически выпуклых функций получено описание пространства функционалов с аналогом равенства Парсеваля (1), где m и M абсолютные константы. В работе ([1]) доказано, что для получения (1) с абсолютными оценками требование логарифмической выпуклости необходимо.

Данный результат использовался в работах [3-7] для аналогичных описаний пространств функционалов над пространствами последовательностей, Смирнова, Бергмана.

Сформулируем этот результат:

Теорема B.[8-9] *Пусть* $\ln w(t) = h(t)$ *– выпуклая функция на интервале* $I \subseteq \mathbb{R}$ *и определим сопряженную по Юнгу функцию*

$$\tilde{h}(x) = \sup_{t\in D}(<x,t> - h(t)).$$

Также обозначим $I^* = \{x \in R : \tilde{h}(x) < \infty\}$. *Тогда весовое пространство* $L_2^*(D, w)$ *и пространство целых функций* H^2 *с нормой*

$$||F||_{H^2} = \left(\int\limits_{I^*} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^2 d\mu(z) \right)^{1/2},$$

где $d\mu(z) = exp\left(-2\tilde{h}(x)\right)\rho(x)\, d\tilde{h}'(x)$ *и* $\rho(x)$ *находится из тождества*

$$\tilde{h}(x+\rho(x)) + \tilde{h}(x-\rho(x)) - 2\tilde{h}(x) = 1,$$

изоморфны относительно преобразования Фурье – Лапласа. Заметим, что меру μ *можно записать как*

$$d\mu(z) = \left(\int\limits_{I} e^{2xt-2h(t)} dt \right)^{-1} d\tilde{h}'(x)\,[10].$$

Нам понадобится следующее утверждение из работы [8].

Лемма A *В условиях теоремы A справедливы оценки*

$$m \le \int\limits_{I^*} e^{xt-h(t)-\tilde{h}(x)}\rho(x)\, d\tilde{h}'(x) \le M,$$

причем m *и* M *абсолютные константы.*

Сформулируем основное утверждение статьи при условии $n > 1$.

Теорема 1. *Пусть* $h(t) = (1/2)\ln w(t)$*— выпуклая, радиальная* $h(t) = h(|t|)$ *функция в круге* $D = \{t \in \mathbb{R}^n : |t| \le r\}$. *Определим* $a = a(h)$ *из уравнения* $ah'(|a|) = 1$ *и сопряженную по Юнгу функцию*

$$\tilde{h}(x) = \sup_{t\in D}(<x,t> - h(t)).$$

Обозначим

$$s(y) = \begin{cases} y^{(n-1)/2}, & y > 1, \\ 1, & y \le 1. \end{cases}$$

Тогда $\tilde{h}(x)$*является радиальной функцией и пространство* $L^* = L_2^*(D, w)$ *изоморфно относительно преобразования Фурье – Лапласа пространству целых функций* $H^2(\mathbb{C}^n)$ *с квадратом нормы*

$$||F||_{H^2}^2 = \int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n} |F(x+iy)|^2 d\sigma dy, \text{ где}$$

$$dy = dy_1 dy_2 ... dy_n,$$

$$d\sigma = e^{-2\tilde{h}(x)}\rho(|x|)\left(s\left(\frac{|x|}{\tilde{h}'(|x|)} \right) \right) dA,$$

$dA = d\tilde{h}'_{x_1}(x) \wedge d\tilde{h}'_{x_2}(x) \wedge ... \wedge d\tilde{h}'_{x_n}(x)$ *– обобщенный оператор Монжа – Ампера, причем выполняется аналог равенства Парсеваля*

$$m||S||_{L_2^*}^2 \le ||\hat{S}(z)||_{H^2}^2 \le B||S||_{L_2^*}^2, \qquad (2)$$

$$\text{где } B = C3e^2 (e(n-1))^{(n-1)/2} s(r/a)$$

Замечание: *В работе* [1] *показано, что при абсолютной константе* m *в левом неравенстве оценки* (2) *верхнее ограничение будет не ниже* $const(n)\, s(r/a)$. *Т.е. правая константа неравенства* (2) *принципиально не улучшаема.*

Для доказательства основной теоремы понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Если* $h(t) = h(|t|)$ *радиальная функция, то и* $\tilde{h}(x) = \tilde{h}(|x|)$ *является радиальной.*

Доказательство. По определению $\tilde{h}(x) = \sup_{t\in D}(<x,t> - h(|t|))$. Так как в неравенстве Коши – Буняковского $<x,t> \le |x||t|$ достижимо равенство, то $\sup_{t\in D}(<t,x> - h(t)) = \sup_{t\in D}(|t||x| - h(|t|))$. Следовательно, значения функции $\tilde{h}(x)$ не зависят от поворотов аргумента x и $\tilde{h}(x) = \tilde{h}(|x|)$.

Лемма 2. *Пусть* $B = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ *и* $d\sigma = d\sigma_B(x/|x|)$ *– мера Лебега на сфере. Обозначим функцию*

$$s(y) = \begin{cases} y^{(n-1)/2}, & y > 1, \\ 1, & y \le 1, \end{cases}$$

тогда верны неравенства

$$m_n \frac{e^{|x||t|}}{s(|x||t|)} \le \int\limits_{B} e^{<x,t>} d\sigma \le M_n \frac{e^{|x||t|}}{s(|x||t|)},$$

где m_n, M_n *константы.*

Доказательство. Пусть $|x||t| > 1$, тогда обозначим меньшую часть сферы отсеченной плоскостью $B_y(t) = \{x/|x| \in B : 0 \geq \geq < x, t > - |x||t| \geq -y\}$, тогда $B(-1, t)$— множество точек на единичной сфере отсеченной плоскостью от края на расстоянии $1/|x||t|$, причем площадь сечения плоскостью $P(-1, t)$ соизмерима с площадью $S(B(-1, t))$. Поэтому

$$\int_B e^{<x,t>} d\sigma = e^{|x||t|} \int_B e^{<x,t> - |x||t|} d\sigma \geq$$

$$\geq e^{|x||t|} \int_{B_1(-1,t)} e^{-1} d\sigma \geq \frac{e^{|x||t|-1}}{(2|x||t|)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}}.$$

Если рассмотреть конус с вершиной в точке пересечения единичной сферы с лучем из 0 в направлении вектора t и образующей окружностью $P(-1, t)$, тогда

$$S(B(-\alpha, t)) \leq 2^{(n-1)/2} P(-\alpha, t) \leq$$
$$\leq 2^{(n-1)/2} \alpha^{n-1} P(-1, t).$$

Следовательно,

$$\int_B e^{<x,t>} d\sigma = e^{|x||t|} \int_B e^{<x,t> - |x||t|} d\sigma \leq$$

$$\leq e^{|x||t|} e^{-\alpha} \alpha^{n-1} P(-1, t) \leq$$

$$\leq e^{|x||t| - n - 1} \left(\frac{2(n-1)^2}{|x||t|} \right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

Если $|x||t| \leq 1$, то

$$e^{-1} \leq e^{-|x||t|} \leq e^{<x,t>} \leq e^{|x||t|} \leq e$$

и интеграл соизмерим с площадью поверхности единичного шара. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $h(t)$ – выпуклая функция на интервале $I = (0, r)$. Число a определим из условия $ah'(a) = 1$. Тогда справедливо соотношение*

$$m \leq \int_0^{+\infty} u(x, t) d\tilde{h}'(x) \leq M s\left(\frac{r}{a}\right), \qquad (3)$$

где $u(x, t) = e^{2xt - 2h(t) - 2\tilde{h}(x)} \rho(x) \dfrac{s\left(x\tilde{h}'(x)\right)}{s(xt)}$.

Доказательство. По определению

$$\tilde{h}(x) = \sup_{t \in D} (< x, t > - h(t)),$$

тогда, если обозначим t_x точку максимума вогнутой функции $xt - h(t)$ т.е. $x = h'(t_x)$, то верно тождество

$$\tilde{h}(x) = xt_x - h(t_x).$$

Продифференцируем это тождество по x

$$\tilde{h}'(x) = h''(t_x) t'_x t_x + h'(t_x) t'_x - h'(t_x) t'_x.$$

Учитывая, что $h''(t_x) t'_x = 1$, получаем равенство $\tilde{h}'(x) = t_x \in I$ или $0 \leq \tilde{h}'(x) \leq r$. Из равенств $x = h'(t_x)$ и $\tilde{h}'(x) = t_x$ получаем $x = h'(\tilde{h}'(x))$, т.е. функции $h'(t)$ и $\tilde{h}'(x)$ обратные. По условию $ah'(a) = 1 \Rightarrow \tilde{h}'(h'(a)) = = \tilde{h}'(1/a) \Rightarrow a = \tilde{h}'(1/a)$. Оценим интеграл $\int_0^{+\infty} u(x, t) d\tilde{h}'(x)$ в соотношении (3) сверху. Пусть $1/t \leq 1/a$. Разобьем интеграл леммы на сумму трех интегралов

$$\int_0^{+\infty} u(x, t) d\tilde{h}'(x) = \int_0^{1/t} u(x, t) d\tilde{h}'(x) +$$

$$+ \int_{1/t}^{1/a} u(x, t) d\tilde{h}'(x) + \int_{1/a}^{+\infty} u(x, t) d\tilde{h}'(x).$$

В первом интеграле при $x \in [0; 1/t] \Rightarrow s(xt) = = s(x\tilde{h}'(x)) = 1$, тогда, если обозначим $v(x, t) = e^{2xt - 2h(t) - 2\tilde{h}(x)} \rho(x)$, то получим цепочку неравенств

$$\int_0^{1/t} v(x, t) s(xt) d\tilde{h}'(x) \leq \int_0^{1/t} v(x, t) d\tilde{h}'(x) \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} e^{xt - h(t) - \tilde{h}(x)} \rho(x) d\tilde{h}'(x) = Int$$

Во втором интеграле $s(xt) = (xt)^{(n-1)/2}$ и $s\left(x\tilde{h}'(x)\right) = 1$. При $x \geq 1/t$ справедлива оценка $1/s(xt) \leq 1$, и второй интеграл можно оценить

$$\int_{1/t}^{1/a} v(x, t) \frac{1}{s(xt)} d\tilde{h}'(x) \leq \int_{1/t}^{1/a} v(x, t) d\tilde{h}'(x) \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{+\infty} e^{xt-h(t)-\tilde{h}(x)}\rho(x)\,d\tilde{h}'(x) = Int$$

При $x \geq 1/a$ верно

$$s\left(x\tilde{h}'(x)\right)/s(xt) = \left(x\tilde{h}'(x)/(xt)\right)^{(n-1)/2} =$$

$$= \left(\tilde{h}'(x)/t\right)^{(n-1)/2} \leq (r/a)^{(n-1)/2} \leq s(r/a).$$

И тогда третий интеграл оценивается следующим образом

$$\int\limits_{1/a}^{+\infty} v(x,t)\frac{s\left(x\tilde{h}'(x)\right)}{s(xt)}\,d\tilde{h}'(x) \leq$$

$$\leq s\left(\frac{r}{a}\right)\int\limits_{1/a}^{+\infty} v(x,t)d\tilde{h}'(x) \leq s\left(\frac{r}{a}\right)Int.$$

Учитывая, согласно лемме А, что $Int \leq M$, получаем оценку

$$\int\limits_0^{+\infty} v(x,t)s(xt)d\tilde{h}'(x) \leq 2Int + s\left(\frac{r}{a}\right)Int \leq$$

$$\leq 3Ms\left(\frac{r}{a}\right).$$

При $1/t > 1/a$ аналогично разобьем интеграл на сумму трех интегралов

$$\int\limits_0^{+\infty} u(x,t)d\tilde{h}'(x) = \int\limits_0^{1/a} u(x,t)d\tilde{h}'(x) +$$

$$+\int\limits_{1/a}^{1/t} u(x,t)d\tilde{h}'(x) + \int\limits_{1/t}^{+\infty} u(x,t)d\tilde{h}'(x).$$

Первый интеграл оценивается так же, как и первый интеграл в вышерассмотренном случае.

При оценке второго интеграла используем следующие вспомогательные рассуждения.

При $xt \leq 1$ верны равенства $s(xt) = 1$ и $s\left(x\tilde{h}'(x)\right) = \left(x\tilde{h}'(x)\right)^{(n-1)/2}$. Выпуклая функция находится выше своей касательной. Это верно и для касательной в точке $1/a$, другими словами, справедлива оценка

$$\tilde{h}(x) \geq \tilde{h}'(1/a)(x - 1/a) +$$

$$+\tilde{h}(1/a) = ax - 1 + \tilde{h}(1/a).$$

Тогда показатель экспоненты при $1/a \leq x \leq 1/t$ удовлетворяет неравенству

$$xt - h(t) - \tilde{h}(x) \leq 1 - h(t) - ax +$$

$$+1 - \tilde{h}(1/a) \leq 2 - ax.$$

Далее,

$$e^{xt-h(t)-\tilde{h}(x)}\frac{s\left(x\tilde{h}'(x)\right)}{s(xt)} \leq$$

$$\leq e^2\left[e^{-ax}(ax)^{(n-1)/2}\right]\left(\frac{\tilde{h}'(x)}{a}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \leq$$

$$\leq e^{2+(n-1)/2}\left((n-1)/2\right)^{(n-1)/2}s\left(\frac{r}{a}\right).$$

Оценим второй интеграл

$$\int\limits_{1/a}^{1/t} v(x,t)\frac{s\left(x\tilde{h}'(x)\right)}{s(xt)}\,d\tilde{h}'(x) \leq$$

$$\leq \int\limits_{1/a}^{1/t} e^{xt-h(t)-\tilde{h}(x)}\frac{s\left(x\tilde{h}'(x)\right)}{s(xt)} \times$$

$$\times e^{xt-h(t)-\tilde{h}(x)}\rho(x)\,d\tilde{h}'(x) \leq$$

$$\leq e^{2+(n-1)/2}\left((n-1)/2\right)^{(n-1)/2}Ms\left(\frac{r}{a}\right).$$

В третьем интеграле $x \geq 1/t \geq 1/a$, и рассмотренная оценка с касательной остается справедливой, т.е.

$$\tilde{h}(x) \geq \tilde{h}'(1/a)(x - 1/a) + \tilde{h}(1/a) =$$

$$= ax - 1 + \tilde{h}(1/a).$$

Оценим показатель экспоненты

$$xt - h(t) - \tilde{h}(x) \leq xt - h(t) - ax + 1 - \tilde{h}(1/a) \leq$$

$$\leq -(a-t)x + 1.$$

Далее, если $1/a \leq 1/t \leq 2/a$, то

$$\frac{s\left(x\tilde{h}'(x)\right)}{s(xt)} \leq \frac{\left(\tilde{h}'(x)\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}}{t^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}} \leq 2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}s\left(\frac{r}{a}\right).$$

Если $1/t > 2/a$, то $1/(a-t) \leq 2/a$ и справедливы неравенства

$$e^{xt-h(t)-\tilde{h}(x)}\frac{s\left(x\tilde{h}'(x)\right)}{s(xt)} \leq$$

$$\le e^1\left[e^{-(a-t)x}((a-t)x)^{\frac{n-1}{2}}\right]\left(\frac{\tilde{h}'(x)}{(a-t)xt}\right)^{\frac{n-1}{2}} \le$$

$$\le \frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{e}e^{2+(n-1)/2}\left((n-1)/2\right)^{(n-1)/2} s\left(\frac{r}{a}\right).$$

Поэтому третий интеграл оценивается

$$\int\limits_{1/t}^{+\infty} e^{2xt-2h(t)-2\tilde{h}(x)}\rho(x)\frac{s\left(x\tilde{h}'(x)\right)}{s(xt)}d\tilde{h}'(x) \le$$

$$\le M2^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{K_n}{e}+1\right)s\left(\frac{r}{a}\right),$$

где $K_n = e^{2+(n-1)/2}\left((n-1)/2\right)^{(n-1)/2}$

Следовательно, суммируя рассуждения в случае $1/t > 1/a$, получим неравенство

$$\int\limits_{1/t}^{+\infty} e^{2xt-2h(t)-2\tilde{h}(x)}\rho(x)\frac{s\left(x\tilde{h}'(x)\right)}{s(xt)}d\tilde{h}'(x) \le$$

$$\le 3M2^{\frac{n-1}{2}}K_n s\left(\frac{r}{a}\right),$$

и окончательную оценку сверху

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{2xt-2h(t)-2\tilde{h}(x)}\rho(x)\frac{s\left(x\tilde{h}'(x)\right)}{s(xt)}d\tilde{h}'(x) \le$$

$$\le 3e^2M(e(n-1))^{\frac{n-1}{2}}s\left(\frac{r}{a}\right).$$

Использование леммы А с аналогичными рассуждениями дают оценку снизу в неравенстве (3).

Доказательство основной теоремы: по теореме А достаточно найти меру $d\eta$ с условием

$$c \le \int\limits_{R^n} e^{2<x,t>-2h(t)}d\eta(x) \le C, \quad t \in D.$$

Докажем, что нам подойдет мера

$$d\eta = d\sigma\left(\tilde{h}(x)\right).$$

Из условия теоремы 1 по лемме 1 функция $\tilde{h}(x)$ –радиальная, следовательно, в интеграле можно ввести полярную систему координат и упростить запись

$$\int\limits_{B}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{2<x,t>-2h(|t|)-2\tilde{h}(|x|)}\rho(|x|)\times$$

$$\times s\left(\frac{|x|}{\tilde{h}'(|x|)}\right)\left(\tilde{h}'(|x|)\right)^{\frac{n-1}{2}}d\tilde{h}'(|x|)\,d\sigma_B\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Поменяем пределы интегрирования и используем определение функции s, чтобы заменить интеграл эквивалентным выражением

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2h(|t|)-2\tilde{h}(|x|)}\rho(|x|)\times$$

$$\times s\left(|x|\tilde{h}'(|x|)\right)d\tilde{h}'(|x|)\int\limits_{B} e^{2<x,t>}d\sigma_B\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

По лемме 2 внутренний интеграл эквивалентен функции $e^{2|x||t|}/s(|x||t|)$, и поэтому если мы примем для простоты обозначения: $|x| = x$ и $|t| = t$, то тогда достаточно будет оценить снизу и сверху следующий интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{2xt-2h(t)-2\tilde{h}(x)}\rho(x)\frac{s\left(x\tilde{h}'(x)\right)}{s(xt)}d\tilde{h}'(x).$$

Требуемые оценки получаются применением леммы 3. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Youlmukhametov, R. S.** Weighted Laplas transform / R. S. Youlmukhametov, V. I. Lutsenko // Pitman Research Notes in Mathematics, Logman Scientific & Technical, 1991. P.232-240.
2. **Saitoh, S.** Generalization of Paley-Wiener's theorem for entire function of exponential type / S. Saitoh //Proc.Amer.Math.Soc. 99(1987). P. 465-467.
3. **Луценко, В. И.** Обобщение теоремы Пэли - Винера на функционалы в пространствах Смирнова / В. И. Луценко, Р. С. Юлмухаметов //Труды Математического института им. В.А.Стеклова. Т. 200. М.: «Наука», 1991. С. 245-254.
4. **Исаев, К. П.** Весовые последовательности //Сб. научных тр. Актуальные проблемы математического анализа./ К. П. Исаев, В. И. Луценко. Ростов-на-Дону: ГинГо,2000. С. 76-80.
5. **Исаев, К. П.** Топологический изоморфизм весовых пространств/ К. П. Исаев, В. И. Луценко // Комплексный анализ: труды междунар. конференц. Уфа, 2000. С. 65-70.
6. **Зайцева, Г. А.** Теорема типа Пэли – Винера для весовых пространств последовательностей / Г. А. Зайцева //Комплексный анализ: труды междунар. конференц. Уфа, 2000. С. 54-58.

7. **Напалков, В. В.** Теорема типа Пэли – Винера для пространств последовательностей/ В. В. Напалков, Г. А. Зайцева // ДАН 2000. Т. 374, №2, С. 157-159.
8. **Луценко, В. И.** Обобщение теоремы Пэли – Винера на весовые пространства/ В. И. Луценко, Р. С. Юлмухаметов // Математические заметки. Т.48, вып. 5, 1990. С. 80-87.
9. **Луценко, В. И.** Теорема Пэли – Винера на неограниченном интервале / В. И. Луценко // Исследования по теории приближений. Уфа, 1989. С. 79-85.
10. **Юлмухаметов, Р. С.** Асимптотика многомерного интеграла Лапласа/ Р. С. Юлмухаметов // Исследования по теории приближений. Уфа, 1989. С. 132-139.

ОБ АВТОРАХ

Луценко Владимир Иванович, доцент кафедры программирования и экономической информатики математического факультета БашГУ. Дипл. математик (БашГУ, 1982). Канд.физ.-мат. наук (ИМ с ВЦ УНЦ РАН, 1992). Иссл. в обл. комплексного анализа.

Юлмухаметов Ринад Салаватович, проф., зав. каф. программирования и экономической информатики БашГУ. Дипл. математик (БашГУ, 1979). Д-р физ.-мат. наук по теор. функций (защ. в МИАН СССР, М.,1987). Иссл. в обл. комплексного анализа.