Уфа : УГАТУ, 2007 Вестник УГАТУ • Математика Т. 9, № 3 (21). С. 125–135

**Дифференциальные уравнения**

УДК 517.9

Р. К. ГАЗИЗОВ, А. А. КАСАТКИН, С. Ю. ЛУКАЩУК

# НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Методы группового анализа адаптируются к исследованию симметрийных свойств дифференциальных уравнений с производными дробного порядка. На основе инфинитезимального подхода строятся формулы продолжения точечных преобразований на дробные производные и интегралы. На простейших примерах демонстрируется техника построения группы точечных преобразований, допускаемой дифференциальным уравнением дробного порядка, а также построение общего вида уравнения, допускающего данную группу симметрий. В заключении обсуждается возможность перехода от точечных преобразований к нелокальным. *Группы точечных преобразований, дробные производные, дифференциальные уравнения дробного порядка, симметрии, инвариантные решения*

## ВВЕДЕНИЕ

В последние годы аппарат дробного интегро-дифференцирования находит все более широкое применение в качестве эффективного средства описания физических, химических и биологических процессов в сложных неупорядоченных и неоднородных средах [1] - [3]. Тем не менее, методы как аналитического, так и численного решения дифференциальных уравнений с производными дробного порядка все еще недостаточно разработаны. Большинство существующих подходов позволяет получать аналитические решения лишь для определенного класса линейных уравнений и некоторых нелинейных уравнений с дробными производными (см. монографии [4] - [9] и цитируемую в них литературу).

Одним из эффективных подходов к построению решений уравнений с производными целого порядка является использование методов современного группового анализа (см., например, [10]). Однако до сих пор эти методы не нашли применения в теории дробных дифференциальных уравнений. Известны лишь отдельные работы, использующие элементы группового анализа для исследования таких уравнений. Например, в работе [11] построена группа преобразований растяжения для линейного диффузионно-волнового уравнения дробного порядка, оставляющая его инвариантным, а также показана возможность использования этих преобразований для построения автомодельных решений.

Распространение методов группового анализа на уравнения с дробной производной встречает на своем пути ряд трудностей, вытекающих из самой природы дробного дифференцирования.

Первая из них связана с особенностями замены переменных в подынтегральном выражении производной дробного порядка. Оператор дробного дифференцирования является интегро-дифференциальным с конкретным ядром специального вида. В общем случае точечные преобразования изменяют вид ядра, а значит, и самого оператора. Поэтому важным является нахождение преобразований, не выводящих рассматриваемое дробное дифференциальное уравнение за пределы изучаемого класса.

Другой чертой, отличающей дробные дифференциальные уравнения от дифференциальных уравнений целого порядка является наличие фиксированного начала отсчета независимой переменной, являющегося постоянным (нижним или верхним) пределом интегрирования в операторе дробного дифференцирования. Тогда требование инвариантности дробного уравнения относительно преобразования приводит к условию инвариантности данного начала отсчета.

Наконец, одной из основных проблем является существенная нелокальность оператора дробного дифференцирования. Это проявляется, например, в том, что производная произведения двух функций, а также производная сложной функции выражаются как бесконечные суммы, включающие в себя нелокальные переменные, представляющие собой производные и интегралы дробного порядка. Такие же переменные появляются при продолжении точечных преобразований на производные дробного порядка. Простейшим подходом в этом случае является зануление коэффициентов, возникающих при интегралах дробного порядка в соответствующих уравнениях. При этом обычно оказывается достаточно рассмотреть коэффициенты при первых двух-трех дробных интегралах младших порядков и задача отыскания допускаемых преобразований некоторым образом решается. Приведенные в работе примеры это иллюстрируют. Тем не менее, для сложных уравнений дробного порядка выше первого указанный подход не обеспечивает нахождения всех допускаемых уравнением симметрий.

Описанные трудности более детально обсуждаются в первом разделе настоящей работы на примере анализа простейшего дифференциального уравнения дробного порядка $\alpha+1,\ \alpha \in (0,1)$.

Второй раздел работы посвящен выводу формул продолжения точечных преобразований на производные и интегралы дробного порядка. Построение данных формул продолжения проведено в рамках классического инфинитезимального подхода [10] и общих положений теории дробного интегро-дифференцирования [4]. Получены продолжения для дробных производных двух наиболее часто используемых на практике видов: Римана-Лиувилля и Капуто.

Подробному рассмотрению примера использования инвариантного подхода для построения симметрий, допускаемых дифференциальным уравнением дробного порядка, посвящен третий раздел. Для уже рассмотренного в первом разделе простейшего дробного уравнения с использованием полученных во втором разделе формул продолжения строится инфинитезимальный оператор группы, продолженной на дробные производные, выписывается определяющее уравнение, демонстрируется методика его расщепления и разрешения. В результате выписываются все точечные симметрии рассматриваемого уравнения.

В последнем, четвертом, разделе работы приводятся примеры, иллюстрирующие построение общего вида дифференциального уравнения дробного порядка $\alpha+1$, допускающего заданную симметрию, а также построение на основе известных симметрий точного частного решения нелинейного дробного дифференциального уравнения типа Рикката.

Наконец, в заключении обсуждаются некоторые вопросы, связанные с переходом от точечных преобразований к нелокальным. Приводится пример одного нелокального преобразования, допускаемого простейшим дифференциальным уравнением дробного порядка.

## 1. АНАЛИЗ ПРОСТЕЙШЕГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение дробного порядка

$$D_x^{\alpha+1}y(x)=0, \qquad 0<\alpha<1 \qquad (1)$$

с дробной производной Римана-Лиувилля

$$D_x^{\beta}y(x)\equiv D_x^m\left(I_x^{m-\beta}y(x)\right)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(m-\beta)}\frac{d^m}{dx^m}\int\limits_0^x\frac{y(t)}{(x-t)^{\beta+1-m}}dt, \qquad (2)$$

$$0\le m-1<\beta\le m, \qquad m=1,2,\dots .$$

Здесь через $I_x^{m-\beta}y(x)$ обозначен интеграл дробного порядка $m-\beta$. Отметим, что начало отсчета независимой переменной $x$ (нижний предел интегрирования в операторе дробного дифференцирования) не обязано быть нулем, а может принимать любое вещественное значение. В этом случае соответствующий оператор обозначается ${}_bD_x^{\beta}$, где $b$ — начало отсчета.

Следуя [6] будем предполагать, что $y(x)$ принадлежит классу $\mathsf{C}$ функций, представляемых конечной линейной комбинацией функций вида

$$f(x)=x^{\mu}h(x), \qquad \mu>-1, \qquad x\ge 0, \qquad (3)$$

где $h(x)$ — гладкая (бесконечно дифференцируемая) функция. Принадлежность функции этому классу гарантирует существование для нее дробной производной Римана-Лиувилля.

Отметим, что если функция $f(x)$ принадлежит классу $\mathsf{C}$, а некоторая функция $g(x)$ дифференцируема при всех $x\ge 0$, то справедливо обобщенное правило Лейбница [6]:

$$D_x^{\alpha}\left(f(x)g(x)\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}D_x^{\alpha-n}f(x)\ D_x^n g(x), \quad \alpha>0, \quad (4)$$

где
$$\binom{\alpha}{n} = \frac{(-1)^{n-1}\alpha\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(n+1)} \tag{5}$$
— биномиальные коэффициенты. Для сохранения единообразия в обозначениях в (4) интегральные операторы дробного порядка обозначены как дифференциальные операторы отрицательного дробного порядка:
$$I_x^{n-\alpha} f(x) \equiv D_x^{\alpha-n} f(x), \qquad \alpha > 0. \tag{6}$$

Общее решение уравнения (1) может быть легко построено классическими методами теории дробного интегродифференцирования (см., например, [4], [5]) и в классе **C** имеет вид
$$y(x) = x^{\alpha-1}(c_1 x + c_2), \tag{7}$$
где $c_1$ и $c_2$ произвольные постоянные интегрирования.

Если ввести обозначение
$$z(x) = x^{1-\alpha} y(x), \tag{8}$$
то (7) записывается в виде $z(x) = c_1 x + c_2$, то есть является общим решением обыкновенного дифференциального уравнения $z'' = 0$. Однако это уравнение не эквивалентно (1). Действительно, в результате замены в дробной производной $y(x)$ на $z(x)$ в соответствии с (8) и применения обобщенного правила Лейбница (4) имеем
$$D_x^{\alpha+1} y(x) = D_x^{\alpha+1}\left(x^{\alpha-1} z(x)\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+1}{n} D_x^{\alpha+1-n}\left(x^{\alpha-1}\right) z^{(n)} =$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{2} z'' + \sum_{n=3}^{\infty} \binom{\alpha+1}{n} \frac{\Gamma(\alpha) x^{n-2}}{(n-2)!} z^{(n)} =$$
$$= \Gamma(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+1}{n+2} \frac{x^n}{n!} z^{(n+2)}.$$

Отметим, что полученное выражение обращается в нуль при $z'' = 0$.

Точечные преобразования, допускаемые уравнением $z'' = 0$, сохраняют его общее решение, а значит после замены (8) будут сохранять и общее решение (7) дробного уравнения (1). Найдем среди них те, которые будут сохранять и само дробное дифференциальное уравнение (1).

Хорошо известно (см., например, [10]), что уравнение $z'' = 0$ допускает восьмипараметрическую группу симметрий. Ниже приводятся эти преобразования после замены (8) и соответствующие им инфинитезимальные операторы.

I. $\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y + a x^{\alpha-1},$
$$X_1 = x^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial y};$$

II. $\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y + a x^{\alpha},$
$$X_2 = x^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y};$$

III. $\bar{x} = x, \quad \bar{y} = e^a y,$
$$X_3 = y\frac{\partial}{\partial y};$$

IV. $\bar{x} = e^a x, \quad \bar{y} = y,$
$$X_4 = x\frac{\partial}{\partial x};$$

V. $\bar{x} = \dfrac{x}{1-ax}, \quad \bar{y} = \dfrac{y}{(1-ax)^{\alpha}},$
$$X_5 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + \alpha x y\frac{\partial}{\partial y};$$

VI. $\bar{x} = x + a, \quad \bar{y} = \dfrac{x^{1-\alpha}}{(x+a)^{1-\alpha}} y,$
$$X_6 = \frac{\partial}{\partial x} - (1-\alpha)\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y};$$

VII. $\bar{x} = x + a x^{1-\alpha} y, \quad \bar{y} = \dfrac{y}{(1+a x^{-\alpha} y)^{1-\alpha}},$
$$X_7 = x^{1-\alpha} y\frac{\partial}{\partial x} - (1-\alpha)x^{-\alpha} y^2\frac{\partial}{\partial y};$$

VIII. $\bar{x} = \dfrac{x}{1 - a x^{1-\alpha} y}, \quad \bar{y} = \dfrac{y}{(1 - a x^{1-\alpha} y)^{\alpha}},$
$$X_8 = x^{2-\alpha} y\frac{\partial}{\partial x} + \alpha x^{1-\alpha} y^2\frac{\partial}{\partial y}.$$

Нетрудно проверить непосредственно, что преобразования I – IV уравнение (1) сохраняют. При проективной замене переменных V дробная производная преобразуется по правилу
$$D_{\bar{x}}^{1+\alpha}\bar{y} = (1-ax)^{2+\alpha} D_x^{1+\alpha} y,$$
поэтому преобразования V также сохраняют уравнение.

Проверим преобразование VI (перенос по переменной $x$). Имеем
$$D_{\bar{x}}^{1+\alpha}\bar{y}(\bar{x}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d^2}{d\bar{x}^2}\int_0^{\bar{x}} \frac{\bar{y}(t)}{(\bar{x}-\bar{t})^{\alpha}} d\bar{t} =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d^2}{dx^2}\int_0^{x+a}\left(\frac{\bar{t}-a}{\bar{t}}\right)^{1-\alpha}\frac{y(\bar{t}-a)}{(x+a-\bar{t})^{\alpha}} d\bar{t}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int\limits_{-a}^{x} \left(\frac{t}{t+a}\right)^{1-\alpha} \frac{y(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt \equiv$$

$$\equiv {}_{-a}D_x^{1+\alpha} \left[ \left(\frac{x}{x+a}\right)^{1-\alpha} y(x) \right].$$

Видно, что произошло изменение как подынтегральной функции, так и самого оператора дробного дифференцирования — изменился нижний предел интегрирования. Таким образом, в результате преобразования VI уравнение осталось в классе линейных дифференциальных уравнений дробного порядка, но в соответствующем операторе дробного дифференцирования возникло смещение начала отсчета, то есть преобразование VI привело к выходу уравнения из рассматриваемого класса.

Важно отметить, что (7) является общим решением полученного после преобразования VI уравнения

$${}_{-a}D_x^{1+\alpha} \left[ \left(\frac{x}{x+a}\right)^{1-\alpha} y(x) \right] = 0,$$

то есть одно и то же общее решение может соответствовать различным дробным дифференциальным уравнениям одного и того же порядка, отличающимся операторами дробного дифференцирования. Таким образом, в отличие от дифференциальных уравнений целого порядка, однозначно восстанавливаемых по общему решению, дифференциальные уравнения дробного порядка этим свойством не обладают. Поэтому сохранение под действием преобразования общего решения дробного дифференциального уравнения не гарантирует сохранения самого уравнения.

В дальнейшем будем говорить, что дифференциальное уравнение с производными дробного порядка инвариантно относительно некоторой однопараметрической группы точечных преобразований, если в результате соответствующей группе замены переменных уравнение переходит само в себя при любых допускаемых значениях параметра группы. Это означает, что в результате замены переменных должен сохраняться вид дробной производной, а значит, и пределы интегрирования в соответствующем интегро-дифференциальном операторе дробного дифференцирования. Последнее эквивалентно требованию инвариантности уравнения $x = 0$ относительно группы преобразований.

По этой же причине не будет допускаться и преобразование VII. Поскольку функция $y(x)$ принадлежит классу **C**, допускающему интегрируемую особенность, то значение $x^{1-\alpha}y(x)$ при $x=0$ в общем случае неопределенно. На общем решении (7) $x^{1-\alpha}y(x)\big|_{x=0} = c_2$ и имеет место смещение начала отсчета.

Преобразование VIII также не сохраняет уравнение, так как в этом случае нарушается линейность по $y$ подынтегральной функции в дробной производной и изменяется ядро оператора дробного дифференцирования.

Таким образом, исходя из симметрий уравнения $z'' = 0$ получили пяти-параметрическую группу точечных преобразований, сохраняющих дифференциальное уравнение дробного порядка (1). Далее, с использованием методов группового анализа будет показано, что эта группа является максимальной группой точечных симметрий этого уравнения.

## 2. ФОРМУЛЫ ПРОДОЛЖЕНИЯ

Рассмотрим одно-параметрическую группу точечных преобразования вида

$$\bar{x} = \varphi(x, y, a), \qquad \bar{y} = \psi(x, y, a); \tag{9}$$

$$\varphi|_{a=0} = x, \qquad \psi|_{a=0} = y.$$

Для вывода формул продолжения воспользуемся инфинитезимальным подходом. Пусть инфинитезимальное преобразование для (9) имеет вид

$$\bar{x} \approx x + a\xi(x, y), \qquad \bar{y} \approx y + a\eta(x, y), \tag{10}$$

где

$$\xi(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial a}\bigg|_{a=0}, \qquad \eta(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial a}\bigg|_{a=0}.$$

Наряду с (10) будем рассматривать инфинитезимальный оператор

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{11}$$

Из условия инвариантности уравнения $x = 0$ получаем

$$\xi(x, y(x))|_{x=0} = 0. \tag{12}$$

Для упрощения записи обозначим

$$\xi[x] = \xi(x, y(x)), \qquad \eta[x] = \eta(x, y(x)).$$

Найдем инфинитезимальные преобразования дробной производной $D_x^{\alpha} y$:

$$D_{\bar{x}}^{\alpha}\bar{y}(\bar{x}) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{d\bar{x}}\int\limits_0^{\bar{x}}\frac{\bar{y}(t)}{(\bar{x}-t)^{\alpha}}d\bar{t} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{1+aD(\xi[x])}\times$$

$$\times\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x+a\xi[x]}\frac{y(\bar{t}-a\xi[t])+a\eta[\bar{t}-a\xi[t]]}{(x+a\xi[x]-\bar{t})^{\alpha}}d\bar{t} =$$

$$= \left|\begin{array}{c}\bar{t}=t+a\xi[t]\\ d\bar{t}=(1+aD(\xi[t]))\,dt\end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{1+aD(\xi[x])}\times$$

$$\times\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x}\frac{(y(t)+a\eta[t])(1+aD(\xi[t]))}{(x+a\xi[x]-t-a\xi[t])^{\alpha}}dt \approx$$

$$\approx \frac{1-aD(\xi[x])}{\Gamma(1-\alpha)}\times$$

$$\times\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x}\frac{y(t)+a\eta[t]+ay(t)D(\xi[t])}{(x-t)^{\alpha}\left(1+a\dfrac{\xi[x]-\xi[t]}{x-t}\right)^{\alpha}}dt. \quad (13)$$

Рассмотрим второй множитель в знаменателе подынтегрального выражения. В силу малости параметра $a$ можно записать

$$\left(1+a\frac{\xi[x]-\xi[t]}{x-t}\right)^{\alpha} \approx 1+a\alpha\frac{\xi[x]-\xi[t]}{x-t}. \quad (14)$$

Данное соотношение справедливо, если функция $\xi[x]$ непрерывно дифференцируема как функция $x$ при $x \geq 0$.

Подставляя (12) в (7), получаем

$$D_{\bar{x}}^{\alpha}\bar{y}(\bar{x}) \approx \frac{1-aD(\xi[x])}{\Gamma(1-\alpha)}\times$$

$$\times\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x}\frac{y(t)+a\eta[t]+ay(t)D(\xi[t])}{(x-t)^{\alpha}\left(1+a\alpha\dfrac{\xi[x]-\xi[t]}{x-t}\right)}dt \approx$$

$$\approx \frac{1-aD(\xi[x])}{\Gamma(1-\alpha)}\times$$

$$\times\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x}\frac{y(t)+a\eta[t]+ay(t)D(\xi[t])}{(x-t)^{\alpha}}\times$$

$$\times\left(1-a\alpha\frac{\xi[x]-\xi[t]}{x-t}\right)dt \approx$$

$$\approx \frac{1-aD(\xi[x])}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x}\frac{y(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt +$$

$$+\frac{a}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x}\frac{\eta[t]}{(x-t)^{\alpha}}dt +$$

$$+\frac{a}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x}\frac{y(t)D(\xi[t])}{(x-t)^{\alpha}}dt -$$

$$-\frac{a\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x}\frac{y(t)(\xi[x]-\xi[t])}{(x-t)^{1+\alpha}}dt =$$

$$= D_x^{\alpha}y - aD_x(\xi)D_x^{\alpha}y + aD_x^{\alpha}\eta + aD_x^{\alpha}\left(yD_x(\xi)\right) -$$

$$-\frac{a\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x}\frac{y(t)(\xi[x]-\xi[t])}{(x-t)^{1+\alpha}}dt. \quad (15)$$

Рассмотрим последний интеграл в (15). Известно [4], что для дифференцируемой функции $f(x)$ справедливо представление

$$D_x^{\alpha}f(x) = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)x^{\alpha}} +$$

$$+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^{x}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt. \quad (16)$$

Тогда

$$\int\limits_0^{x}\frac{y(t)(\xi[x]-\xi[t])}{(x-t)^{1+\alpha}}dt =$$

$$= \int\limits_0^{x}\frac{y(t)(\xi[x]-\xi[t])+y(x)\xi[x]-y(x)\xi[x]}{(x-t)^{1+\alpha}}dt =$$

$$= \xi[x]\int\limits_0^{x}\frac{y(t)-y(x)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt +$$

$$+\int\limits_0^{x}\frac{y(x)\xi(x)-y(t)\xi[t]}{(x-t)^{1+\alpha}}dt =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}\left(D_x^{\alpha}(\xi y)-\xi D_x^{\alpha}y\right). \quad (17)$$

Дифференцированием (17) получаем выражение для последнего слагаемого в (15):

$$\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x}\frac{y(t)(\xi[x]-\xi[t])}{(x-t)^{1+\alpha}}dt =$$

$$= D_x^{\alpha+1}(\xi y) - D_x(\xi)D_x^{\alpha}y - \xi D_x^{\alpha+1}y. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (15), находим искомое инфинитезимальное преобразование дробной производной:

$$D_{\bar{x}}^{\alpha}\bar{y} \approx D_x^{\alpha}y + a\zeta_{\alpha},$$

где

$$\zeta_\alpha = D_x^\alpha \eta + D_x^\alpha\left(D_x(\xi)y\right) + \\ + \xi D_x^{\alpha+1} y - D_x^{\alpha+1}(\xi y). \quad (19)$$

Отметим, что формула (19) записана с использованием дробных производных более высокого порядка $(\alpha+1)$, однако, само $\zeta_\alpha$ от производной $D_x^{\alpha+1}y$ не зависит. Применяя (4) ко второму и последнему слагаемым (19) получим, что в общем случае $\zeta_\alpha$ зависит от $x$, $y$, $D_x^\alpha y$, а также бесконечного числа интегралов от $y$ дробного порядка вида $I_x^{n-\alpha}y$ $(n = 1, 2, \ldots)$ :

$$\zeta_\alpha = D_x^\alpha(\eta) - \alpha D_x(\xi) D_x^\alpha(y) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{\alpha}{n} - \binom{\alpha+1}{n+1}\right] D_x^{\alpha-n}(y) D_x^{n+1}(\xi) = \\ = D_x^\alpha(\eta) - \alpha D_x(\xi) D_x^\alpha(y) - \\ - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n+1} I_x^{n-\alpha}(y) D_x^{n+1}(\xi). \quad (20)$$

Очевидно, что если рассматриваемое уравнение не будет зависеть от этих интегралов, то на допускаемых преобразованиях все члены ряда должны будут обращаться в нуль или сокращать друг друга.

Имея продолжение порядка $\alpha$ можно построить продолжение порядка $\alpha+1$. Так как

$$D_x^{\alpha+1}y \equiv D_x(D_x^\alpha y),$$

то продолжение порядка $(\alpha+1)$ легко получается из классической формулы группового анализа на продолжение обычной производной:

$$\zeta_{\alpha+1} = D_x(\zeta_\alpha) - D_x(\xi) D_x^{\alpha+1}(y).$$

Подставляя $\zeta_\alpha$ из (19), получаем

$$\zeta_{\alpha+1} = D_x^{\alpha+1}(\eta) + D_x^{\alpha+1}\left(D_x(\xi)y\right) + \\ + \xi D_x^{\alpha+2}(y) - D_x^{\alpha+2}(\xi y) \quad (21)$$

или

$$\zeta_{\alpha+1} = D_x^{\alpha+1}(\eta) - (\alpha+1) D_x(\xi) D_x^{\alpha+1}(y) - \\ - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} D_x^2(\xi) D_x^\alpha(y) - \\ - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{n+2} I_x^{n-\alpha}(y) D_x^{n+2}(\xi). \quad (22)$$

Замечание 1. Полученная формула продолжения порядка $(\alpha+1)$ была построена как формула первого продолжения относительного дробного продолжения порядка $\alpha$. Построить эту формулу в обратном порядке, то есть как формулу дробного продолжения порядка $\alpha$ относительно первого продолжения, в общем случае нельзя, так как

$$D_x^{1+\alpha}y = D_x(D_x^\alpha y) \neq D_x^\alpha(D_x y).$$

Формулы (19) и (21) можно обобщить на случай произвольного продолжения порядка $\alpha+n$, $\alpha \in (0,1)$:

$$\zeta_{\alpha+n} = D_x^{\alpha+n}\eta + D_x^{\alpha+n}\left(D_x(\xi)y\right) + \\ + \xi D_x^{\alpha+1+n}y - D_x^{\alpha+1+n}(\xi y). \quad (23)$$

Более того, $n$ здесь может принимать и отрицательные значения. В этом случае мы имеем продолжение отрицательного порядка, то есть продолжение на интегралы (подразумевается, что справедливо правило записи (6)). Например, продолжение порядка $\alpha-1$ будет иметь вид

$$\zeta_{\alpha-1} = D_x^{\alpha-1}\eta + D_x^{\alpha-1}(D_x(\xi)y) + \xi D_x^\alpha y - D_x^\alpha(\xi y) = \\ = I_x^{1-\alpha}\eta + I_x^{1-\alpha}(D_x(\xi)y) + \xi D_x^\alpha y - D_x^\alpha(\xi y). \quad (24)$$

Данная формула может быть проверена непосредственно по той же схеме, которая была использована для получения (19).

Замечание 2. Аналогичным образом могут быть построены формулы продолжения и для функции двух независимых переменных $z(x,y)$. Если инфинитезимальные точечные преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{x} &\approx x + a\xi^0(x,y,z), \\ \bar{y} &\approx y + a\xi^1(x,y,z), \\ \bar{z} &\approx z + a\eta(x,y,z), \end{aligned}$$

то

$$D_{\bar{x}}^{\alpha+n}\bar{z}(\bar{x},\bar{y}) \approx D_x^{\alpha+n}z(x,y) + a\zeta_{\alpha+n}, \quad n \in Z,$$

где

$$\zeta_{\alpha+n} = D_x^{\alpha+n}(\eta) + \xi^1 D_x^{\alpha+n}(z_x) - \\ - D_x^{\alpha+n}(\xi^1 z_x) + D_x^{\alpha+n}(D_x(\xi^0)z) - \\ - D_x^{\alpha+n+1}(\xi^0 z) + \xi^0 D_x^{\alpha+n+1}(z). \quad (25)$$

Замечание 3. Наряду с дробной производной Римана-Лиувилля на практике часто используется и другой вид дробной производной — регуляризованная производная или дробная производная Капуто:

$$
{}^C D_x^\beta(y(x)) \equiv I_x^{m-\beta}(D_x^m y(x)) =
$$

$$
= \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int\limits_0^x \frac{y^{(m)}(t)}{(x-t)^{\beta+1-m}} dt, \quad (26)
$$

$$
0 \le m-1 < \beta \le m, \qquad m = 1, 2, \ldots .
$$

Из определения (26) видно, что формула продолжения для производной Капуто может быть легко построена на основе уже полученных формул продолжения для дробных интегралов и известных из классического группового анализа формул продолжения для обыкновенных производных целого порядка. Например, формула продолжения порядка $\alpha$ для дробной производной Капуто имеет вид

$$
{}^C\zeta_\alpha = {}^C D_x^\alpha(\eta) - \alpha D_x(\xi)\, {}^C D_x^\alpha(y) -
$$

$$
- \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n+1} I_x^n \left({}^C D_x^\alpha(y)\right) D_x^{n+1}(\xi). \quad (27)
$$

Данная формула легко обобщается на случай произвольного порядка $(\alpha + n)$.

В завершении данного раздела приведем одну полезную формулу.

Полученные формулы продолжения содержат производные дробного порядка от сложных функций. Например, в (19) такой является производная $D_x^\alpha(\eta(x, y))$, поскольку $y = y(x)$. Очевидно, что для разрешения определяющих уравнений, содержащих такие производные, необходимо иметь их представление через соответствующие частные производные. Одно из таких представлений в виде бесконечного ряда получается на основе формулы Ослера (Osler) [5] и имеет вид

$$
D_x^\alpha [f(x, y(x))] =
$$

$$
= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} \sum_{r=0}^{k} \binom{\alpha}{n} \binom{n}{m} \binom{k}{r} \frac{1}{k!} \frac{x^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} \times
$$

$$
\times [-y(x)]^r \frac{d^m}{dx^m} \left[(y(x))^{k-r}\right] \frac{\partial^{n-m+k} f(x, y)}{\partial x^{n-m} \partial y^k}. \quad (28)
$$

Данная формула получается путем обобщения известной классической формулы производной сложной функции

$$
\frac{d^m g(y(x))}{dx^m} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \frac{1}{k!} [-y(x)]^r \times
$$

$$
\times \frac{d^m}{dx^m} \left[(y(x))^{k-r}\right] \frac{d^k g(y)}{dy^k}
$$

с учетом (4) при $f(x) = 1$.

Формулу (28) можно переписать, выделив из нее слагаемые, не зависящие от производных $y$ и зависящие от них линейно — они получаются, соответственно, при $k = 0$ и $k = 1$:

$$
D_x^\alpha(f) = \partial_x^\alpha(f) + \partial_x^\alpha(y f_y) - y \partial_x^\alpha(f_y) + g, \quad (29)
$$

где

$$
\partial_x^\alpha(f) = \partial_x^\alpha [f(x, y)] \equiv
$$

$$
\equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_0^x \frac{f(t, y)}{(x-t)^\alpha} dt \quad (30)
$$

— оператор частной дробной производной, а функция

$$
g = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=2}^{n} \sum_{k=2}^{m} \sum_{r=0}^{k-1} \binom{\alpha}{n} \binom{n}{m} \binom{k}{r} \frac{1}{k!} \times
$$

$$
\times \frac{x^{n-\alpha} [-y(x)]^r}{\Gamma(n+1-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \left[(y(x))^{k-r}\right] \frac{\partial^{n-m+k} f(x, y)}{\partial x^{n-m} \partial y^k}
$$

нелинейно зависит от производных функции $y$ и их произведений.

Отметим одно важное свойство функции $g$: поскольку в соответствующем ряде $k \ge 2$, то в случае линейности функции $f(x, y)$ по переменной $y$ функция $g$ обращается в нуль:

$$
g|_{f_{yy}=0} = 0. \quad (31)
$$

## 3. ПОСТРОЕНИЕ ДОПУСКАЕМЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $D_x^{\alpha+1}(y) = 0$

Вновь обратимся к рассмотренному ранее уравнению (1) и найдем допускаемые этим уравнением операторы методами группового анализа с использованием полученных выше формул продолжения. Допускаемые операторы группы ищутся в виде

$$
\underset{\alpha+1}{X} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \zeta_\alpha \frac{\partial}{\partial y^{(\alpha)}} + \zeta_{\alpha+1} \frac{\partial}{\partial y^{(\alpha+1)}}
$$

(здесь для простоты обозначено $y^{(\alpha)} \equiv D_x^\alpha(y)$) и определяются из критерия инвариантности

$$
\underset{\alpha+1}{X}\left(y^{(\alpha+1)}\right)\Big|_{y^{(\alpha+1)}=0} = \zeta_{\alpha+1}\big|_{y^{(\alpha+1)}=0} = 0.
$$

С учетом формулы продолжения (22) оно принимает вид

$$
\Big[ D_x^{\alpha+1}(\eta) - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} D_x^2(\xi) D_x^\alpha(y) -
$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{n+2}I_x^{n-\alpha}(y)D_x^{n+2}(\xi)\Bigg]\Bigg|_{y^{(\alpha+1)}=0}=0,$$

где в соответствии с (29) можно записать

$$D_x^{\alpha+1}(\eta)=\partial_x^{\alpha+1}(\eta)+\partial_x^{\alpha+1}(y\eta_y)-y\partial_x^{\alpha+1}(\eta_y)+\mu,$$

$$D_x^{n+2}(\xi)=\frac{\partial^{n+2}\xi}{\partial x^{n+2}}+ +\sum_{m=1}^{n+2}\binom{n+2}{m}y^{(m)}\frac{\partial^{n-m+3}\xi_y}{\partial x^{n-m+3}}+\nu_n,$$

$$n=1,2,\ldots$$

Подставляя эти соотношения в определяющее уравнение и используя обобщенное правило Лейбница, получаем

$$\partial_x^{\alpha+1}(\eta)+(\alpha+1)\eta_{xy}D_x^{\alpha}(y)+ +\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{n+1}I_x^{n-\alpha}(y)\frac{\partial^{n+1}\eta_y}{\partial x^{n+1}}-y\partial_x^{\alpha+1}(\eta_y)+\mu- -\frac{\alpha^2+\alpha}{2}\left[\xi_{xx}+2\xi_{xy}y'+\xi_{yy}(y')^2+\xi_y y''\right]D_x^{\alpha}(y)- -\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{n+2}I_x^{n-\alpha}(y)\left[\frac{\partial^{n+2}\xi}{\partial x^{n+2}}+\right. \left.+\sum_{m=1}^{n+2}\binom{n+2}{m}y^{(m)}(x)\frac{\partial^{n-m+3}\xi_y}{\partial x^{n-m+3}}+\nu_n\right]=0.$$

При рассмотрении уравнений с дробными производными наряду с $y', y''$ и т.д. в качестве независимых переменных можно рассматривать $D_x^{\alpha}(y)$ и $D_x^{\alpha-n}(y)\equiv I_x^{n-\alpha}(y)$. Расщепление по ним полученного определяющего уравнения приводит к системе

$$\eta_{xy}-\frac{\alpha}{2}\left[\xi_{xx}+2\xi_{xy}y'+\xi_{yy}(y')^2+\xi_y y''\right]=0;$$

$$\partial_x^{\alpha+1}(\eta)-y\partial_x^{\alpha+1}(\eta_y)=0;$$

$$\binom{\alpha+1}{n+1}\frac{\partial^{n+1}\eta_y}{\partial x^{n+1}}-\binom{\alpha+1}{n+2}\left[\frac{\partial^{n+2}\xi}{\partial x^{n+2}}+\right. \left.+\sum_{m=1}^{n+2}\binom{n+2}{m}y^{(m)}(x)\frac{\partial^{n-m+3}\xi_y}{\partial x^{n-m+3}}+\nu_n\right]=0,$$

$$n=1,2,\ldots \qquad (32)$$

Обратим внимание, что в отличие от случая обыкновенных дифференциальных уравнений целого порядка, после расщепления определяющего уравнения дробного порядка мы получили систему из бесконечного числа уравнений.

Из первого уравнения (32) следует, что $\xi$ не зависит от $y$, то есть $\xi=\xi(x)$. Тогда в силу свойства (31) все $\nu_n$ обращаются в нуль.

Дифференцирование первого и второго уравнений (32) по $y$ приводит к системе

$$\partial_x^{\alpha+1}(\eta_{yy})=0,\qquad \eta_{xyy}=0,$$

откуда

$$\eta_{yy}=0$$

и функция $\mu$ обращается в нуль в силу (31). Разрешая последнее уравнение, имеем

$$\eta(x,y)=g(x)y+h(x),$$

где $g(x)$ и $h(x)$ — функции, подлежащие определению.

В результате от (32) переходим к следующей системе уравнений:

$$D_x^{1+\alpha}h=0,$$

$$g'-\frac{\alpha}{2}\xi''=0,$$

$$\binom{\alpha+1}{n+1}D_x^{n+1}g-\binom{\alpha+1}{n+2}D_x^{n+2}\xi=0,$$

$$n=1,2,\ldots$$

В данной системе первое уравнение является независимым от остальных и его общее решение в классе $\mathsf{C}$ имеет вид

$$h(x)=x^{\alpha-1}(c_1x+c_2). \qquad (33)$$

Из второго уравнения находим

$$g(x)=\frac{\alpha}{2}\xi'+c, \qquad (34)$$

где $c$ – постоянная интегрирования.

Подставляя это соотношение в третье уравнение, получаем

$$\left[\frac{\alpha}{2}\binom{\alpha+1}{n+1}-\binom{\alpha+1}{n+2}\right]\xi^{(n+2)}=0,\ \ n=1,2,\ldots.$$

Используя определение биномиальных коэффициентов (5), можно показать, что выражение в квадратных скобках не равно нулю при $\alpha\in(0,1)$. Поэтому данная система из бесконечного числа уравнений становится эквивалентна единственному уравнению

$$\xi'''=0,$$

откуда

$$\xi(x)=c_3x+c_4x^2 \qquad (35)$$

(здесь учтено условие $\xi(0)=0$).

Подставляя (35) в (34), находим

$$g(x) = c_5 + c_4 \alpha x, \qquad c_5 = c + \frac{\alpha}{2} c_3.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\xi(x) = c_3 x + c_4 x^2,$$

$$\eta(x, y) = x^{\alpha-1}(c_1 x + c_2) + (c_5 + c_4 \alpha x) y. \quad (36)$$

На основе (36) выписываем допускаемые операторы:

$$X_1 = x^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = x^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y\frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_4 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_5 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + \alpha x y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (37)$$

Видно, что все операторы (37) совпадают с найденными ранее в первом разделе и соответствуют преобразованиям, сохраняющим вид уравнения.

## 4. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНВАРИАНТОВ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Использование инвариантов для дробных производных будет иметь одну важную особенность: задача построения инвариантов продолженной группы зачастую приводит к бесконечной системе уравнений. Это связано с тем, что продолжения дробных производных почти всегда зависят от интегралов дробного порядка, которые не входят в исходное уравнение. Поэтому применение точечных преобразований для дробных производных весьма ограничено. Следующий пример иллюстрирует сказанное.

П р и м е р 1. Построим общий вид уравнений дробного порядка, допускающих проективное преобразование с оператором

$$X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + \alpha x y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (38)$$

По формулам (19) и (21) находим соответствующие продолжения порядка $\alpha$ и $(\alpha + 1)$:

$$\zeta_\alpha = -\alpha x D_x^\alpha y + \alpha D_x^{\alpha-1} y,$$

$$\zeta_{\alpha+1} = (\alpha + 2) x D_x^{\alpha+1} y.$$

Поскольку продолжение $\zeta_\alpha$ зависит от дробного интеграла $D_x^{\alpha-1} y \equiv I_x^{1-\alpha} y$, то соответствующая система характеристических уравнений

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{\alpha x y} = \frac{y^{(\alpha)}}{-\alpha x y^{(\alpha)} + \alpha y^{(1-\alpha)}} \quad \left(y^{(\beta)} \equiv D_x^\beta y\right)$$

является незамкнутой и не может быть разрешена. Таким образом, уравнений вида $y^{(\alpha)} = f(x, y)$, допускающих симметрию (38), не существует.

Тем не менее, следующее продолжение $\zeta_{\alpha+1}$ зависит лишь от дробной производной $y^{(\alpha+1)}$, а значит, соответствующая система характеристических уравнений становится замкнутой и разрешается однозначно. В результате находятся два инварианта

$$I_1 = x^{-\alpha} y, \qquad I_2 = x^{2+\alpha} y^{(\alpha+1)}$$

с использованием которых получаем общий вид уравнения порядка $(\alpha + 1)$, допускающего проективное преобразование с оператором (38):

$$D_x^{\alpha+1} y = x^{-\alpha-2} f(x^{-\alpha} y). \quad (39)$$

По аналогии с классическим групповым анализом, для уравнений с дробными производными симметрии могут использоваться для построения инвариантных решений.

П р и м е р 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение дробного порядка

$$y^{(\alpha)} + a y^2 = \frac{b}{x^{2\alpha}}, \qquad \alpha \in (0, 1), \quad (40)$$

которое по аналогии с уравнением целого порядка мы будем называть дробным уравнением Риккати. Нетрудно убедиться, что данное уравнение допускает однопараметрическую группу неоднородных растяжений с симметрией

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - \alpha y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Это легко проверить с использованием критерия инвариантности и формулы продолжения (19). Инвариантом группы является $I = y x^\alpha$, который определяет инвариантное решение уравнения (40):

$$y(x) = \frac{c}{x^\alpha}, \qquad c = const. \quad (41)$$

Подстановка данного решения в исходное уравнение (40) приводит к квадратному уравнению относительно постоянной $c$:

$$a c^2 + \frac{\Gamma(-\alpha)}{2\Gamma(-2\alpha)} c - b = 0,$$

подстановка решений которого в (41) дает окончательный вид частных решений дробного уравнения Риккати (40).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из рассмотренных в работе примеров видно, что классы симметрий, получаемые при локальных преобразованиях дифференциальных уравнений дробного порядка, оказываются существенно более узкими, чем у соответствующих дифференциальных уравнений целого порядка. Причина этого заключается в нелокальности оператора дробного дифференцирования. Поэтому представляется естественным переход от точечных преобразований к нелокальным. Одним из возможных путей такого перехода является использование преобразований, зависящих от дробных производных и интегралов.

Обратимся к примеру. Вновь рассмотрим подробно разобранное в предыдущих разделах простейшее уравнение дробного порядка $D_x^{\alpha+1}y=0$, которое может быть переписано в виде $D^2\left(I_x^{1-\alpha}y\right)=0$. Вводя нелокальную переменную $z=I_x^{1-\alpha}y$, переходим от рассматриваемого уравнения к системе

$$z(x)=I_x^{1-\alpha}y(x), \qquad z''(x)=0.$$

Применяя к первому уравнению оператор дробного дифференцирования $D_x^{1-\alpha}$, получаем

$$D_x^{1-\alpha}z(x)=y(x), \qquad z''(x)=0. \tag{42}$$

Исходное уравнение предполагает, что $z(0)$ существует и конечно. В силу этого приведенные системы оказываются эквивалентны.

Для системы (1) одно-параметрические преобразования можно искать в виде

$$\bar{x}=\varphi(x,y,z,a),$$
$$\bar{y}=\psi(x,y,z,a),$$
$$\bar{z}=\theta(x,y,z,a),$$

которые для исходного уравнения будут нелокальными.

В отличие от рассмотренных ранее локальных точечных преобразований, в данном случае преобразование переноса по $x$ для системы (42) становится допустимым:

$$\bar{x}=x+a,$$
$$\bar{y}=y+\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_{-a}^{0}\frac{z(t)dt}{(x-t)^{2-\alpha}},$$
$$\bar{z}=z. \tag{43}$$

Так как функция $z(x)$ определена при $x\geq 0$, то допустимы лишь значения параметра $a\leq 0$.

Соответствующий инфинитезимальный оператор имеет вид

$$X=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{z(0)}{x^{2-\alpha}}\frac{\partial}{\partial y},$$

а уравнения Ли

$$\frac{d\varphi}{da}=1, \qquad \varphi|_{a=0}=x;$$
$$\frac{d\psi}{da}=\frac{\theta(\varphi)|_{\varphi=0}}{\varphi^{2-\alpha}}, \qquad \psi|_{a=0}=y;$$
$$\frac{d\theta}{da}=0, \qquad \theta|_{a=0}=z$$

дают в результате решения преобразования (43).

Теория нелокальных преобразований для дробных дифференциальных уравнений подлежит дальнейшей проработке.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Учайкин, В. В.** Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы / В. В. Учайкин // УФН. 2003. Т. 173, № 8. С. 847–876.
2. **Metzler, R.** The random walks guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach / R. Metzler, J. Klafter // Phys. Rep. 2000. Vol. 339. P. 1–77.
3. **Зеленый, Л. М.** Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики / Л. М. Зеленый, А. В. Милованов // УФН. 2004. Т. 174, N 8. С. 809–850.
4. **Самко, С. Г.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
5. **Oldham, K. B.** The fractional calculus / K. B. Oldham, J. Spanier. Academic Press, 1974. 234 p.
6. **Miller, K. S.** An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations / K. S. Miller, B. Ross. John Wiley & Sons Inc. 1993. 366 p.
7. **Нахушев, А. М.** Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
8. **Podlubny, I.** Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications / I. Podlubny. Academic Press, San Diego, California, 1999. 368 p.
9. **Псху, А. В.** Уравнения в частных производных дробного порядка / А. В. Псху. М.: Наука, 2005. 199 с.

10. **Ibragimov, N. H.** CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations / N. H. Ibragimov (Ed.). CRC Press, Boca Raton, FL. Vol. 1, 1994; Vol. 2, 1995; Vol. 3, 1996.

11. **Buckwar, E.** Invariance of a Partial Differential Equation of Fractional Order under the Lie Group of Scaling Transformations / E. Buckwar, Yu. Luchko // J. Math. Anal. Appl, 1998. Vol. 227. P. 81-97.

## ОБ АВТОРАХ

**Газизов Рафаил Кавыевич,** проф., зав. кафедрой высокопроизводит. вычислит. технологий и систем УГАТУ. Дипл. математик (БГУ, 1983), д-р физ.-мат. наук по дифференциальным уравнениям (ИММ Уральского отделения РАН, 1999). Исследования в области группового анализа дифференциальных уравнений.

**Касаткин Алексей Александрович,** студент УГАТУ.

**Лукащук Станислав Юрьевич,** доцент кафедры высокопроизводит. вычислит. технологий и систем УГАТУ. Дипл. инж. по авиационной и ракетно-космической теплотехнике (УГАТУ, 1997), канд. физ.-мат. наук по теплофизике и молекулярной физике (БГУ, 1999). Исследования в области математического моделирования.