Уфа : УГАТУ, 2007 Вестник УГАТУ • Математика Т. 9, № 3 (21). С. 136–144

Дифференциальные уравнения

УДК 517.9

А. В. ЖИБЕР, Ю. Г. МИХАЙЛОВА

О ЗАДАЧЕ ГУРСА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С НУЛЕВЫМИ ОБОБЩЕННЫМИ ИНВАРИАНТАМИ ЛАПЛАСА

В статье получен критерий обрыва цепочки обобщенных инвариантов Лапласа, построено общее решение линейной гиперболической системы уравнений с нулевыми инвариантами и приведено решение краевой задачи Гурса. *Обобщенные инварианты Лапласа; краевая задача Гурса; цепочки Тоды*

ВВЕДЕНИЕ

Одним из классических приемов построения общих решений линейных гиперболических уравнений вида

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0 \quad (1)$$

является каскадный метод Лапласа (см. например [1]). Основу этого метода составляет последовательность инвариантов Лапласа

$$\ldots, h_{-3}, h_{-2}, h_{-1}, h_0, h_1, h_2, h_3, \ldots \quad (2)$$

и связанные с ней преобразованиями Лапласа.

Элементы цепочки (2) вычисляются с помощью реккурентной формулы

$$h_{i+1} = 2h_i - h_{i-1} - (\ln h_i)_{xy}, \; i \in Z$$

исходя из "начальных значений"

$$h_{-1} = b_y + ab - c, \;\; h_0 = a_x + ab - c.$$

Если хотя бы один из инвариантов последовательности (2) тождественно равен нулю, то уравнение (1) интегрируется в квадратурах.

В случае, если цепочка Лапласа (2) обрывается с двух сторон, то можно построить общее решение уравнения (1), не прибегая к квадратурам. Для таких уравнений в работе [2] построена явная формула решения задачи с данными на характеристиках

$$u(x,0) = \psi(x), \quad u(y,0) = \phi(y), \quad (3)$$

а именно, если $h_n = 0$ и $h_{-m} = 0$, то

$$u = exp\left(-\int_{x_0}^{x} b(t,y)dt\right)\frac{1}{h_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{h_1}\cdots\frac{1}{h_{n-1}}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial x}\left\{exp\left(\int_{x_0}^{x} b(t,y)dt - \int_{y_0}^{y} a_n(x,t)dt\right)\times\right.$$

$$\times\int_{x_0}^{x} h_{n-1}(u_n)\cdots\int_{x_0}^{u_2} h_0(u_1)exp\left(-\int_{u_1}^{x} b(t)dt\right)\times$$

$$\left.\times\psi(u_1)du_1\cdots du_n\right\} + exp\left(-\int_{y_0}^{y} a(x,t)dt\right)\times$$

$$\times\frac{1}{h_{-1}}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{h_{-2}}\cdots\frac{1}{h_{-m+1}}\frac{\partial}{\partial y}\left\{exp\left(\int_{y_0}^{y} a(x,t)dt-\right.\right.$$

$$\left.-\int_{x_0}^{x} b_{-m+1}(t,y)dt\right)\int_{y_0}^{y} h_{-m+1}(u_m)\cdots$$

$$\cdots\int_{y_0}^{u_2} h_{-1}(u_1)exp\left(-\int_{u_1}^{y} a(x_0,t)dt\right)\left[\phi(u_1)-\right.$$

$$-\frac{h_0(y_0)\cdots h_{n-1}(y_0)}{h_0(u_1)\cdots h_{n-1}(u_1)}\psi(x_0)\times$$

$$\left.\left.\times exp\left(-\int_{y_0}^{u_1} a_n(x_0,t)dt\right)\right]du_1\cdots du_m\right\}.$$

В работе [3] построены точные формулы решения задачи Гурса для линеаризованных цепочек Тоды ранга 2.

Между тем, хотя инварианты и преобразования Лапласа для скалярных линейных

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 05-01-00775-а, 07-01-00081-а)

уравнений известны уже более сотни лет, для систем линейных уравнений эти понятия, по-видимому, начали изучаться лишь в последнее время (см. [4] – [9]).

Рассмотрим теперь системы линейных уравнений (1). В дальнейшем будем считать u n-мерным вектором, а коэффициенты a, b и c – квадратными матрицами. Введем понятие обобщенных инвариантов, предложенное в [4], [6].

Определение 1. *Обобщенными x-инвариантами Лапласа системы (1) называются матрицы X_i, заданные реккурентными формулами*

$$X_1 = H_1 = \frac{\partial}{\partial x}a + ba - c, \quad X_{i+1} = H_{i+1}X_i, \quad (4)$$

$$\begin{gathered} H_{i+1} = \frac{\partial}{\partial x}(a_i) - \frac{\partial}{\partial y}b + [b, a_i] + H_i, \\ \frac{\partial}{\partial y}(X_i) + a_i X_i - X_i a = 0. \end{gathered} \quad (5)$$

Аналогично, обобщенными y-инвариантами Лапласа системы (1) называются матрицы Y_i, заданные реккурентными формулами

$$Y_1 = K_1 = \frac{\partial}{\partial y}a + ab - c, \quad Y_{i+1} = K_{i+1}Y_i,$$

$$K_{i+1} = \frac{\partial}{\partial y}(b_i) - \frac{\partial}{\partial x}a + [a, b_i] + K_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(Y_i) + b_i Y_i - Y_i b = 0.$$

Заметим, что в случае вырожденных инвариантов Лапласа уравнения для нахождения матриц a_i и b_i могут быть неразрешимы, а при наличии решений матрицы a_i и b_i определены неоднозначно. Справедливо следующее утверждение (см. [4], [6], [10]):

Теорема 1. *Инвариант Лапласа X_i системы (1) существует и определен однозначно тогда и только тогда, когда для всех $k < i$ выполнены условия*

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)(\ker X_k) \subset \ker X_k, \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)(Im X_k) \subset Im X_k. \quad (7)$$

Известно (см. например [1]), что, если скалярное уравнение (1) имеет решение

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^{m} p_i(x, y)\frac{d^i}{dx^i}X(x),$$

где p_i, $i = 0, 1, \ldots, m$ – заданные функции, а $X(x)$–произвольная функция, то найдется целое число r $(0 \le r \le m)$ такое, что инвариант h_r равен нулю.

В данной работе этот факт обобщается на системы уравнений типа (1) и приводится схема построения точного решения задачи Гурса (1), (3).

1. УСЛОВИЕ ОБРЫВА ЦЕПОЧКИ ОБОБЩЕННЫХ ИНВАРИАНТОВ ЛАПЛАСА

Опираясь на утверждение теоремы 1, мы можем доказать следующий критерий завершения нулем последовательности обобщенных инвариантов Лапласа.

Теорема 2. *Пусть для системы уравнений (1) выполнены условия (6) и (7) для $k = 1, 2, \ldots, m$ и существует решение вида*

$$u = \sum_{i=0}^{m} p_i(x, y)\frac{\partial^i}{\partial x^i}X(x), \quad (1.1)$$

где $X(x)$–столбец произвольных функций $x_1(x), \ldots, x_n(x)$ переменного x, а $p_0, p_1, \ldots, p_m$–заданные матрицы-функции переменных x и y, причем $\det p_m \neq 0$. Тогда обобщенный инвариант Лапласа $X_{m+1} = 0$.

Нетрудно показать, что формула (6) дает необходимое и достаточное условие разрешимости системы (5), которую удобно записать так

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a_k\right)X_k = X_k\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right), \quad (1.2)$$

а (7) есть условие разрешимости уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)X_k = X_k\left(\frac{\partial}{\partial x} + B_k\right). \quad (1.3)$$

Далее, согласно (5), справедливо соотношение

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a_k\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) - H_k =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + a_k\right) - H_{k+1}. \quad (1.4)$$

Подстановка решения (1.1) в исходную систему (1) приводит к равенствам

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)p_m = 0, \ \left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)p_{m-1} = H_1 p_m,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+b\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+a\right)p_k - H_1 p_k +$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial y}+a\right)p_{k-1}=0, \qquad (1.5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+b\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+a\right)p_0 - H_1 p_0 = 0,$$

$$k=1,2,\ldots,m-1.$$

Теперь, полагая $\left(\frac{\partial}{\partial y}+a\right)p_k = Z_{k1}$, $k = 1,2,\ldots,m-2$, из (1.5) получаем соотношения

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+b\right)H_1 p_m - H_1 p_{m-1} + Z_{m-21} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+b\right)Z_{k1} - H_1 p_k + Z_{k-11} = 0,$$

$$k=1,2,\ldots,m-2, \qquad (1.6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+b\right)Z_{01} - H_1 p_0 = 0.$$

Далее к правым частям равенств (1.6) применим оператор $\left(\frac{\partial}{\partial y}+a_1\right)$ и, учитывая формулы (1.2) и (1.4), будем иметь

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+a_1\right)Z_{m-21} = X_2 p_m,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+b\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+a_1\right)Z_{k1} - H_2 Z_{k1} +$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial y}+a_1\right)Z_{k-11} = 0, \qquad (1.7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+b\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+a_1\right)Z_{01} - H_2 Z_{01} = 0,$$

$$k=1,2,\ldots,m-2.$$

В силу формул (1.3) и (1.6) получаем, что элементы Z_{k1} представимы следующим образом:

$$Z_{k1} = H_1 F_{k1},\ k=1,2,\ldots,m-2.$$

Продолжая этот процесс, на $m-1$ шаге приходим к соотношениям:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+a_{m-1}\right)Z_{0m-1} = X_m p_m, \qquad (1.8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+b\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+a_{m-1}\right)Z_{0m-1} - H_m Z_{0m-1} = 0,$$

$$Z_{0m-1} = X_{m-1}F_{0m-1}.$$

И, наконец, применим к второму соотношению (1.8) оператор $\left(\frac{\partial}{\partial y}+a_m\right)$ и, используя равенства (1.2) и (1.4), при $k=m$ получаем выражение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+b\right)X_m\left(\frac{\partial}{\partial y}+a\right)p_m - X_{m+1}p_m +$$
$$+H_m\left(X_m p_m - \left(\frac{\partial}{\partial y}+a_{m-1}\right)Z_{0m-1}\right) = 0.$$

Отсюда, в силу первого соотношения (1.8) и формулы $\left(\frac{\partial}{\partial y}+a\right)p_m = 0$ (см. (1.5)), следует, что $X_{m+1}p_m = 0$ и следовательно $X_{m+1} = 0$.

Поясним, что пользуясь симметрией $x \leftrightarrow y$ системы уравнений (1), выше мы привели лишь по одному из двух "симметричных"вариантов теорем 1, 2.

2. ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С НУЛЕВЫМИ ОБОБЩЕННЫМИ ИНВАРИАНТАМИ ЛАПЛАСА

Пусть для системы уравнений (1) найдутся $r > 0$ и $s > 0$, такие, что для всех $i \le r$, $j \le s$ ее инварианты Лапласа X_i и Y_j существуют, однозначно определены и $X_r = Y_s = 0$.

Для простоты изложения рассмотрим случай двухкомпонентных систем уравнений (1) (n=2).

Предлагаемая здесь схема построения решения системы (1) является обобщением так называемого метода "спуска" нахождения высших симметрий для систем уравнений экспоненциального типа (см. [11], [12]). Систему (1) можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+b\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+a\right)u = H_1 u,$$

последнюю перепишем следующим образом:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+a\right)u = u_1,\quad \left(\frac{\partial}{\partial x}+b\right)u_1 = H_1 u, \qquad (2.1)$$

Предположим, что инварианты $H_1 = X_1,\ldots,X_k$ – невырожденные матрицы. Теперь, полагая

$$u_1 = X_1 v_1,$$

из соотношений (2.1) и (1.3) при $k=1$ получаем, что

$$u = \left(\frac{\partial}{\partial x}+B_1\right)v_1 \qquad (2.2)$$

и

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+a\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+B_1\right)v_1 = H_1 v_1. \qquad (2.3)$$

Уравнение (2.3) можно переписать в эквивалентной форме

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)(\frac{\partial}{\partial y}+a_1)X_1v_1=X_2v_1. \qquad (2.4)$$

Для этого надо умножить левую и правую часть уравнения (2.3) на матрицу X_1 и воспользоваться равенствами (1.2)-(1.4) при $k=1$.

Далее систему (2.4) запишем в следующем виде

$$(\frac{\partial}{\partial y}+a_1)X_1v_1=u_2, \quad (\frac{\partial}{\partial x}+b)u_2=X_2v_1 \qquad (2.5)$$

и, полагая $u_2=X_2v_2$, как и выше получаем, что

$$v_1=(\frac{\partial}{\partial x}+B_2)v_2, \qquad (2.6)$$

где v_2 – решение системы уравнений

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)(\frac{\partial}{\partial y}+a_2)X_2v_2=X_3v_2.$$

При этом из (2.2) и (2.6) имеем

$$u=(\frac{\partial}{\partial x}+B_1)(\frac{\partial}{\partial x}+B_2)v_2.$$

Напомним, что так как инварианты $X_1,\dots,X_k$ по предположению невырожденные матрицы, то этот процесс можно продолжить и после k-го шага получаем следующее представление решения u исходной системы уравнений (1)

$$u=(\frac{\partial}{\partial x}+B_1)(\frac{\partial}{\partial x}+B_2)\dots(\frac{\partial}{\partial x}+B_k)v_k, \qquad (2.7)$$

где v_k – решение системы

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)(\frac{\partial}{\partial y}+a_k)X_kv_k=X_{k+1}v_k. \qquad (2.8)$$

Формулу (2.7), учитывая соотношения (1.3), можно записать так:

$$u=\left[X_1^{-1}(\frac{\partial}{\partial x}+b)X_1\right]\dots\left[X_k^{-1}(\frac{\partial}{\partial x}+b)X_k\right]v_k. \qquad (2.9)$$

Отметим, что обобщенный инвариант X_{k+1} является вырожденной матрицей.

Теперь при построении решения системы (2.8), мы будем учитывать, что исходная система (1) является двухкомпонентной. Тогда

$$KerX_{k+1}=\dots=KerX_{r-1}, \quad X_r=0. \qquad (2.10)$$

Рассмотрим случай, когда образы инвариантов равны

$$ImX_{k+1}=ImX_{k+2}=\dots=ImX_{r-1}. \qquad (2.11)$$

Кроме того, мы будем предполагать, что

$$\begin{array}{l}(\frac{\partial}{\partial x}+b)ImX_{k+1}=ImX_{k+1},\\ ImX_{k+1}\cap KerX_{k+1}=\{0\}.\end{array} \qquad (2.12)$$

Далее систему (2.8) запишем так:

$$(\frac{\partial}{\partial y}+a_k)X_kv_k=u_k, \quad (\frac{\partial}{\partial x}+b)u_k=X_{k+1}v_k \qquad (2.13)$$

Из равенств (2.12) следует, что u_k и v_k можно представить в виде

$$u_k=X_{k+1}v_{k+1},$$

$$v_k=X_{k+1}q_k+e_k, \quad e_k\in KerX_{k+1}.$$

Пусть P – базис ImX_{k+1}, а Q – базис $KerX_{k+1}$. Элемент Q можно выбрать таким, что $(\frac{\partial}{\partial y}+a)Q=0$, а P так, что $(\frac{\partial}{\partial x}+b)P=0$. Также справедливы соотношения

$$\begin{array}{c}(\frac{\partial}{\partial y}+a)P=pP+qQ,\\ X_iP=\psi_iP,\ i=k+1,k+2,\dots,r-1.\end{array} \qquad (2.14)$$

Отметим, что

$$v_k=W(x)Q, \qquad (2.15)$$

где $W(x)$ – произвольная функция, есть решение системы (2.8).

Теперь систему уравнений (2.13) перепишем следующим образом:

$$\left\{\begin{array}{l}(\frac{\partial}{\partial y}+a_k)X_k[X_{k+1}q_k+e_k]=X_{k+1}v_{k+1},\\ (\frac{\partial}{\partial x}+b)X_{k+1}v_{k+1}=X_{k+1}^2q_k.\end{array}\right. \qquad (2.16)$$

Умножая левую и правую части первого уравнения системы (2.16) на матрицу H_{k+1} и, учитывая формулы (1.2), получаем систему:

$$\left\{\begin{array}{l}(\frac{\partial}{\partial y}+a_{k+1})X_{k+1}^2q_k=H_{k+1}X_{k+1}v_{k+1},\\ (\frac{\partial}{\partial x}+b)X_{k+1}v_{k+1}=X_{k+1}^2q_k.\end{array}\right. \qquad (2.17)$$

Учитывая формулу (1.4), нетрудно показать, что система (2.17) эквивалентна следующей системе

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)(\frac{\partial}{\partial y}+a_{k+1})X_{k+1}v_{k+1}=X_{k+2}v_{k+1}, \qquad (2.18)$$

которую перепишем в эквивалентной форме

$$(\tfrac{\partial}{\partial y}+a_{k+1})X_{k+1}v_{k+1}=u_{k+1},$$
$$(\tfrac{\partial}{\partial x}+b)u_{k+1}=X_{k+2}v_{k+1}. \quad (2.19)$$

В силу (2.10) и (2.12) имеем

$$u_{k+1}=X_{k+2}v_{k+2},$$

а v_k будем искать, с точностью до ядра элемента X_{k+1}, в виде

$$v_{k+1}=X_{k+2}q_{k+1}.$$

Тогда система (2.19) примет следующий вид:

$$\begin{cases}(\tfrac{\partial}{\partial y}+a_{k+1})X_{k+1}X_{k+2}q_{k+1}=X_{k+2}v_{k+2},\\ (\tfrac{\partial}{\partial x}+b)X_{k+2}v_{k+2}=X^2_{k+2}q_{k+1}.\end{cases} \quad (2.20)$$

Умножая левую и правую части первого уравнения системы (2.20) на матрицу H_{k+2} и, учитывая формулы (1.2), приходим к системе

$$\begin{cases}(\tfrac{\partial}{\partial y}+a_{k+2})X^2_{k+2}q_{k+1}=H_{k+2}X_{k+2}v_{k+2},\\ (\tfrac{\partial}{\partial x}+b)X_{k+2}v_{k+2}=X^2_{k+2}q_{k+1}.\end{cases} \quad (2.21)$$

Система (2.21) эквивалентна следующей

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)(\frac{\partial}{\partial y}+a_{k+2})X_{k+2}v_{k+2}=X_{k+3}v_{k+2}. \quad (2.22)$$

Продолжая этот процесс на $(i-1)$-м шаге мы приходим к системе

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)(\frac{\partial}{\partial y}+a_{k+i})X_{k+i}v_{k+i}=X_{k+i+1}v_{k+i}. \quad (2.23)$$

которую, как и выше, перепишем так

$$(\tfrac{\partial}{\partial y}+a_{k+i})X_{k+i}v_{k+i}=u_{k+i},$$
$$(\tfrac{\partial}{\partial x}+b)u_{k+i}=X_{k+i+1}v_{k+i} \quad (2.24)$$

и, полагая

$$u_{k+i}=X_{k+i+1}v_{k+i+1},\quad v_{k+i}=X_{k+i+1}q_{k+i},$$

приходим к уравнениям

$$\begin{cases}(\tfrac{\partial}{\partial y}+a_{k+i})X_{k+i}X_{k+i+1}q_{k+i}=X_{k+i+1}v_{k+i+1},\\ (\tfrac{\partial}{\partial x}+b)X_{k+i+1}v_{k+i+1}=X^2_{k+i+1}q_{k+1}.\end{cases} \quad (2.25)$$

Умножая левую и правую части первого уравнения системы (2.25) на матрицу H_{k+i+1} и, учитывая формулы (1.2), мы получим систему вида

$$\begin{cases}(\tfrac{\partial}{\partial y}+a_{k+i+1})X^2_{k+i+1}q_{k+i}=\\ =H_{k+i+1}X_{k+i+1}v_{k+i+1},\\ (\tfrac{\partial}{\partial x}+b)X_{k+i+1}v_{k+i+1}=X^2_{k+i+1}q_{k+1}.\end{cases} \quad (2.26)$$

Последняя эквивалентна следующей

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)(\frac{\partial}{\partial y}+a_{k+i+1})X_{k+i+1}v_{k+i+1}=$$
$$=X_{k+i+2}v_{k+i+1}. \quad (2.27)$$

Далее, так как $X_r=0$, то при $i=r-k-2$ уравнение (2.27) принимает вид

$$(\frac{\partial}{\partial x}+b)(\frac{\partial}{\partial y}+a_{r-1})X_{r-1}v_{r-1}=0. \quad (2.28)$$

Используя соотношения (2.14), нетрудно показать, что система (2.28) имеет решение вида

$$v_{r-1}=w(x)exp\left(-\int\limits_{y_0}^{y}pdy\right)P, \quad (2.29)$$

здесь $w(x)$ – произвольная функция. Далее из системы (2.26) мы определим $X_{r-1}q_{r-2}$

$$X_{r-1}q_{r-2}=\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{(\psi_{r-1})'_x}{\psi_{r-1}}\right)z\right]P, \quad (2.30)$$

где $z=exp\left(-\int\limits_{y_0}^{y}pdy\right)w(x)$.

Нетрудно проверить, используя равенство

$$H_{r-1}P=\frac{\psi_{r-1}}{\psi_{r-2}}P,$$

что формулы (2.29), (2.30) удовлетворяют системе (2.25) при $i=r-k-1$. Таким образом построено решение v_{r-2} уравнения (2.24), а именно $v_{r-2}=X_{r-1}q_{r-2}$.

Продолжая этот процесс, мы получаем

$$v_{k+1}=$$
$$=\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{(\psi_{k+2})'_x}{\psi_{k+2}}\right)\dots\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{(\psi_{r-1})'_x}{\psi_{r-1}}\right)z\right]P. \quad (2.31)$$

Используя (2.14) и формулы

$$H_{k+1}P=hP,\quad X_kP=\frac{\psi_{k+1}}{h}P+\mu X_kQ,$$

непосредственно проверяется, с использованием первого уравнения (2.17), что решение системы (2.16) ((2.13)) $v_k = X_{k+1}q_k + e_k$ вычисляется по формуле

$$v_k = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\psi_{k+1})'_x}{\psi_{k+1}}\right)\dots\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\psi_{r-1})'_x}{\psi_{r-1}}\right)z\right]P - \\ -\int\limits_{y_0}^{y}\left[q\left(\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\psi_{k+1})'_x}{\psi_{k+1}}\right) + \mu h\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{(\psi_{k+2})'_x}{\psi_{k+2}}\right)\dots\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\psi_{r-1})'_x}{\psi_{r-1}}\right)z(\varsigma)\right]d\varsigma Q + WQ. \tag{2.32}$$

Теперь специальное решение исходной системы (1) вычисляется по формулам (2.9) и (2.32).

Используя обобщенные инварианты $Y_1, Y_2, \dots, Y_{s-1}$, получаем решение системы (1) вида:

$$\bar{u} = \left[Y_1^{-1}(\frac{\partial}{\partial y} + a)Y_1\right]\dots\left[Y_m^{-1}(\frac{\partial}{\partial y} + a)Y_m\right]\bar{v}_m, \tag{2.33}$$

где

$$\bar{v}_m = \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{(\bar{\psi}_{m+1})'_y}{\psi_{m+1}}\right)\dots\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{(\bar{\psi}_{s-1})'_y}{\psi_{s-1}}\right)\bar{z}\right]\bar{P} - \\ -\int\limits_{x_0}^{x}\left[\bar{q}\left(\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{(\bar{\psi}_{m+1})'_y}{\psi_{m+1}}\right) + \bar{\mu}\bar{h}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{(\bar{\psi}_{m+2})'_y}{\psi_{m+2}}\right)\dots\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{(\bar{\psi}_{s-1})'_y}{\psi_{s-1}}\right)\bar{z}(\varsigma)\right]d\varsigma\bar{Q} + \bar{W}\bar{Q}, \tag{2.34}$$

здесь $\bar{z} = exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x}\bar{p}dx\right)\bar{w}(y)$.

Отметим, что если нарушено условие (2.11), то решение системы (1), зависящее от четырех произвольных функций $w(x), W(x), \bar{w}(y)$ и $\bar{W}(y)$, строится по аналогичной схеме, как и выше.

3. ЗАДАЧА ГУРСА

Обозначим через v сумму специальных решений (2.9), (2.32) и (2.33), (2.34) системы уравнений (1):

$$v = u + \bar{u} \tag{3.1}$$

и определим функции $w(x), W(x), \bar{w}(y)$ и $\bar{W}(y)$, при которых выполнены граничные условия (3). Полагая в формуле (3.1) $y = y_0$, будем иметь

$$X_1^{-1}(\frac{\partial}{\partial x} + b)X_1X_2^{-1}(\frac{\partial}{\partial x} + b)X_2\dots \\ \dots X_k^{-1}(\frac{\partial}{\partial x} + b)X_kv_k(x, y_0) = F(x), \tag{3.2}$$

где

$$F(x) = \psi(x) - \bar{u}(x, y_0). \tag{3.3}$$

Отметим, что $\bar{u}(x, y_0)$, согласно (2.33) и (2.34), имеет следующую структуру

$$\bar{u}(x, y_0) = \sum_{i=0}^{s-1}\alpha_i(x)\bar{w}^{(i)}(y_0) + \sum_{i=0}^{m}\beta_i(x)\bar{W}^{(i)}(y_0). \tag{3.4}$$

Здесь $\alpha_i(x)$ и $\beta_i(x)$ – известные вектор-функции.

Введем обозначения

$$Z_i(x) = X_iX_{i+1}^{-1}(\frac{\partial}{\partial x} + b)X_{i+1}\dots \\ \dots X_{k-1}X_k^{-1}(\frac{\partial}{\partial x} + b)X_kv_k(x, y_0), \\ i = 1, 2, \dots, k-1, \tag{3.5}$$

$$V_i(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\psi_i)'_x}{\psi_i}\right)\dots\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\psi_{r-1})'_x}{\psi_{r-1}}\right)w, \\ i = k+1, .., r-1. \tag{3.6}$$

Ясно, что справедливы соотношения

$$Z_i = X_iX_{i+1}^{-1}(\frac{\partial}{\partial x} + b)Z_{i+1}, \quad i = 1, 2, .., k-1, \tag{3.7}$$

$$V_i = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\psi_i)'_x}{\psi_i}\right)V_{i+1}, \quad i = k+1, .., r-2. \tag{3.8}$$

Теперь, используя формулы (3.5), уравнение (3.2) примет вид

$$X_1^{-1}(\frac{\partial}{\partial x} + b)Z_1 = F(x). \tag{3.9}$$

Пусть $A(x)$–решение однородной системы уравнений

$$(\frac{\partial}{\partial x} + b)A = 0,$$

такое, что $A(x_0) = E$, где E–единичная матрица.

Тогда решение системы (3.9) представляется в виде

$$Z_1(x) = A(x)Z_1(x_0) + A(x)\int\limits_{x_0}^{x}A^{-1}(\xi)X_1F(\xi)d\xi. \tag{3.10}$$

А из (3.7) получаем

$$Z_{i+1}(x) = A(x)Z_{i+1}(x_0) + \\ + A(x)\int\limits_{x_0}^{x}A^{-1}(\xi)X_{i+1}X_i^{-1}Z_i(\xi)d\xi, \\ i = 1, 2, .., k-2. \tag{3.11}$$

Из формулы (3.11), с учетом (3.10), определяем $Z_{k-1}(x)$. Таким образом для определения функции $v_k(x, y_0)$, согласно (3.5), получаем уравнение

$$X_{k-1}X_k^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}+b\right)X_k v_k(x,y_0) = Z_{k-1}(x)$$

и, следовательно,

$$X_k v_k(x,y_0) = A(x)X_k v_k(x_0,y_0)+$$

$$+A(x)\int_{x_0}^{x} A^{-1}(\xi)X_k X_{k-1}^{-1} Z_{k-1}(\xi)d\xi. \quad (3.12)$$

Из формул (2.32), (3.3), (3.4), (3.5), (3.10), (3.11) и (3.12) вытекает, что

$$v_k(x,y_0) = \alpha(x) + \sum_{i=0}^{r-2}\gamma_i^1(x)w^{(i)}(x_0)+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-2}\gamma_i^2(x)W^{(i)}(x_0) + \sum_{i=0}^{s-1}\beta_i^1(x)\bar{w}^{(i)}(y_0)+$$

$$+\sum_{i=0}^{m}\beta_i^2(x)\bar{W}^{(i)}(y_0), \quad (3.13)$$

где $\alpha(x), \gamma_i^k(x), \beta_i^k(x)$ – известные вектор-функции.

Формулу (3.13) можно представить в виде

$$v_k(x,y_0) = \gamma(x)P(x,y_0)+\beta(x)Q(x,y_0). \quad (3.14)$$

Тогда для искомых функций $w(x), W(x)$, учитывая (2.32),(3.14) и (3.6), получаем

$$V_{k+1}(x) = \gamma(x), \qquad W(x) = \beta(x). \quad (3.15)$$

Из (3.8) находим, что

$$V_{i+1}(x) = \frac{\psi_i(x_0,y_0)}{\psi_i(x,y_0)}\,[V_{i+1}(x_0)+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\frac{\psi_i(\xi,y_0)}{\psi_i(x_0,y_0)}V_i(\xi)d\xi], \quad i=k+1,...,r-2.$$

$$(3.16)$$

Теперь из формул (3.16) и (3.15) определяем функцию $V_{r-2}(x)$. И, наконец, так как

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{(\psi_{r-1})'_x}{\psi_{r-1}}\right)w(x) = V_{r-2}(x),$$

то

$$w(x) = \frac{\psi_{r-1}(x_0,y_0)}{\psi_{r-1}(x,y_0)}\,[w(x_0)+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\frac{\psi_{r-1}(\xi,y_0)}{\psi_{r-1}(x_0,y_0)}V_{r-2}(\xi)d\xi]. \quad (3.17)$$

Итак, если функции $w(x)$ и $W(x)$ заданы формулами (3.15) и (3.17), то для решения (3.1) исходной системы выполнено первое граничное условие (3).

Отметим, что функции $w(x)$ и $W(x)$ являются линейными относительно неизвестных параметров $w^{(i)}(x_0)$, $i = 0,...,r-2$, $W^{(i)}(x_0)$, $i=0,...,k-1$, $\bar{w}^{(i)}(y_0)$, $i=0,...,s-1$, $\bar{W}^{(i)}(y_0)$, $i=0,...,m$.

Аналогично, как и выше, используя второе граничное условие (3), определяем функции $\bar{w}(y), \bar{W}(y)$.

Теперь воспользуемся условием согласования граничных условий (3). Положим в общем решении (3.1) $x=x_0$ и $y=y_0$, получим

$$\phi(y_0) = \sum_{i=0}^{r-1}C_{1i}w^{(i)}(x_0)+\sum_{i=0}^{k}C_{2i}W^{(i)}(x_0)+$$

$$+\sum_{i=0}^{s-1}\bar{C}_{1i}\bar{w}^{(i)}(y_0)+\sum_{i=0}^{m}\bar{C}_{2i}\bar{W}^{(i)}(y_0), \quad (3.18)$$

где $C_{1r-1} = P(x_0,y_0)$, $C_{2k} = Q(x_0,y_0)$.
Из равенства (3.18) можно определить величины $w^{(r-1)}(x_0)$ и $W^{(k)}(x_0)$, так как вектора P и Q–линейно независимы. Таким образом

$$w^{(r-1)}(x_0) = \sum_{i=0}^{r-2}C_{1i}^1 w^{(i)}(x_0)+\sum_{i=0}^{k-1}C_{2i}^1 W^{(i)}(x_0)+$$

$$+\sum_{i=0}^{s-1}\bar{C}_{1i}^1\bar{w}^{(i)}(y_0)+\sum_{i=0}^{m}\bar{C}_{2i}^1\bar{W}^{(i)}(y_0)+C_1, \quad (3.19)$$

$$W^{(k)}(x_0) = \sum_{i=0}^{r-2}C_{1i}^2 w^{(i)}(x_0)+\sum_{i=0}^{k-1}C_{2i}^2 W^{(i)}(x_0)+$$

$$+\sum_{i=0}^{s-1}\bar{C}_{1i}^2\bar{w}^{(i)}(y_0)+\sum_{i=0}^{m}\bar{C}_{2i}^2\bar{W}^{(i)}(y_0)+C_2. \quad (3.20)$$

Теперь, подставляя в (3.1) найденные выше функции $w(x), W(x), \bar{w}(y), \bar{W}(y)$ и заменяя величины $w^{(r-1)}(x_0)$ и $W^{(k)}(x_0)$ по формулам (3.19), (3.20), мы получаем следующее представление решения краевой задачи (1), (3):

$$v(x,y) = f_0(x,y)+\sum_{i=0}^{r-2}f_{1i}(x,y)w^{(i)}(x_0)+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1} f_{2i}(x,y)W^{(i)}(x_0)+\sum_{i=0}^{s-1} g_{1i}(x,y)\bar{w}^{(i)}(y_0)+$$
$$+\sum_{i=0}^{m} g_{2i}(x,y)\bar{W}^{(i)}(y_0),$$

где $w^{(i)}(x_0), W^{(i)}(x_0), \bar{w}^{(i)}(y_0), \bar{W}^{(i)}(y_0)$– произвольные постоянные. Так как решение задачи Гурса (1), (3) единственно, то коэффициенты f_{ki} и g_{ki} при этих постоянных равны нулю и следовательно

$$v(x,y)=f_0(x,y).$$

Предложенная схема решения задачи с данными на характеристиках позволяет построить явные формулы решения задачи Гурса для линеаризованных цепочек Тоды ранга 2. Например, решение краевой задачи

$$\begin{cases} f_{xy}+2e^u f-e^v g &= 0,\\ g_{xy}-e^u f+2e^v g &= 0,\end{cases}$$

$$\left.\begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}\right|_{x=x_0}=\Phi(y),\qquad \left.\begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}\right|_{y=y_0}=\Psi(x),$$

где u, v удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} u_{xy}+2e^u-e^v &= 0,\\ v_{xy}-e^u+2e^v &= 0,\end{cases}$$

задается формулой

$$\begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}=(D+B)(D+P)\times$$
$$\times\begin{bmatrix} \int_{x_0}^{x}\left[\frac{1}{3}(2u_1+v_1)W(\xi)+h^2\right]d\xi+W\\ \int_{x_0}^{x}\left[\frac{1}{3}(2u_1+v_1)W(\xi)+h^2\right]d\xi \end{bmatrix}+$$
$$+(\bar{D}+\bar{B})(\bar{D}+\bar{P})\times$$
$$\times\begin{bmatrix} \int_{y_0}^{y}\left[\frac{1}{3}(2\bar{u}_1+\bar{v}_1)\bar{W}(\xi)+p^2\right]d\xi+\bar{W}\\ \int_{y_0}^{y}\left[\frac{1}{3}(2\bar{u}_1+\bar{v}_1)\bar{W}(\xi)+p^2\right]d\xi \end{bmatrix},$$

где $B=\operatorname{diag}\{u_1,v_1\}$, $\bar{B}=\operatorname{diag}\{\bar{u}_1,\bar{v}_1\}$,

$$P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} u_1+2v_1 & -u_1-2v_1\\ -2u_1-v_1 & 2u_1+v_1\end{pmatrix},$$

$$\bar{P}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} \bar{u}_1+2\bar{v}_1 & -\bar{u}_1-2\bar{v}_1\\ -2\bar{u}_1-\bar{v}_1 & 2\bar{u}_1+\bar{v}_1\end{pmatrix}.$$

$$W(x)=\int_{x_0}^{x} exp\left(-\int_{t}^{x}(u_1+v_1)d\xi\right)\times$$
$$\times(h^1(t)-h^2(t))dt,$$

$$h(x)=\int_{x_0}^{x} exp\left(-\int_{t}^{x}B(\xi,y_0)d\xi\right)\Psi(t)dt,$$

$$\bar{W}(y)=\int_{y_0}^{y} exp\left(-\int_{t}^{y}(\bar{u}_1+\bar{v}_1)d\xi\right)\times$$
$$\times(p^1(t)-p^2(t))dt,$$

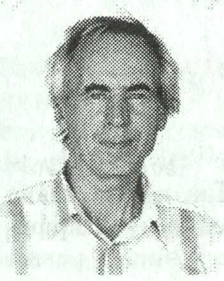
$$p(y)=\int_{y_0}^{y} exp\left(-\int_{t}^{y}\bar{B}(x_0,\xi)d\xi\right)(\Phi(t)-\Phi(y_0))dt.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Goursat, E.** Legon sur J'integretion des equations aux derivees partielles du second ordre a deux variables independantes / E. Goursat // Hermann, Paris,1896. 200 c.
2. **Михайлова, Ю. Г.** Решение задачи Гурса для линейного гиперболического уравнения интегрируемого каскадным методом Лапласа / Ю. Г. Михайлова // Региональная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике. Уфа: БГУ. 2004. Т. 1, С. 153–164.
3. **Михайлова, Ю. Г.** Точные решения задачи Гурса для линеаризованных цепочек Тоды / Ю. Г. Михайлова // Региональная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике, физике и химии. Уфа: БГУ. 2006. Т. 2. С. 85–94.
4. **Жибер, А. В.** Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа. / А. В. Жибер, В. В. Соколов // УМН. 2001. Т. 56, № 1. С. 63–106.
5. **Жибер, А. В.** Интегралы, решения и существование преобразований Лапласа линейной гиперболической системы уравнений / А. В. Жибер, С. Я. Старцев // Матем. заметки. 2003. Т. 74, № 6. С. 848–857.
6. **Гурьева, А. М.** Инварианты Лапласа двумеризованных открытых цепочек Тоды / А. М. Гурьева, А. В. Жибер // ТМФ. 2004. Т. 138, № 3. С. 401–421.
7. **Anderson, J. M.** The variational bicomplex for second order scalar partial differential equations in the plane / J. M. Anderson, N. Kamran // Duke. Math. J. 1997. V.87, №2. P. 265-319.
8. **Царев, С. П.** Факторизация линейных дифференциальных операторов с частными производными и метод Дарбу интегрирования нелинейных уравнений с частными производными / С. П. Царев // ТМФ. 2000. Т. 122, №1. С.144-160.

9. **Старцев, С. Я.** О построении симметрий систем уравнений лиувиллевского типа / С. Я. Старцев // Труды международной конференции. Орел: ОГУ. 2006. Т. 1. С. 117- 122.
10. **Жибер, А. В.** Нелинейные гиперболические системы уравнений лиувиллевского типа / А. В. Жибер, В. В. Соколов. С. Я. Старцев // Международная конференция "Тихонов и современная математика": тезисы докладов. М.: МГУ, 2006. С. 305-306.
11. **Лезнов, А. Н.** Интегрируемые системы / А. Н. Лезнов, А. Б. Шабат // Уфа: БФАНС-ССР. 1982. С. 34–44.
12. **Лезнов, А. Н.** Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем / А. Н. Лезнов, В. Г. Смирнов, А. Б. Шабат // ТМФ. 1982. Т. 51, № 1. С. 10–21.

ОБ АВТОРАХ



Жибер Анатолий Васильевич, проф., вед. научн. сотр. ИМ УНЦ РАН. Дипл. математик (Новосиб. гос. ун-т, 1969). Д-р физ.-мат. наук по диф. уравнениям (защ. в ИМиМ УрОРАН, Екб., 1994). Исследования в области современного группового анализа дифференциальных уравнений.

Михайлова Юлия Геннадьевна, магистрант кафедры математики УГАТУ. Дипл. бакалавр в области прикладной математики и информатики (УГАТУ, 2005). Готовит магистрскую диссертацию о преобразованиях Лапласа линейных гиперболических уравнений под рук. проф. А.В. Жибера.