УДК 517.9

С. В. ХАБИРОВ

КЛАССИФИКАЦИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается переопределенная линейная система из трех дифференциальных уравнений, каждое второго порядка, для одной функции трех переменных с 9-ю произвольными постоянными. Решены задачи групповой классификации и интегрирования этой системы. *Групповая классификация; совместность переопределенной системы*

ВВЕДЕНИЕ

При симметрийном анализе уравнений механики сплошных сред возникают переопределенные системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} f_{xx} &= a_{11} f_x + a_{12} f_y + a_{13} f_z, \\ f_{xy} &= a_{21} f_x + a_{22} f_y + a_{23} f_z, \\ f_{yy} &= a_{31} f_x + a_{32} f_y + a_{33} f_z, \end{aligned} \tag{1}$$

где $A = (a_{ij})$ — постоянная матрица, $a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 \neq 0$. Условия совместности порождают новые уравнения для некоторых значений коэффициентов. Приведение в инволюцию системы (1) дает множество вариантов.

Классификация вариантов эквивалентна задачи групповой классификации системы (1) по произвольным элементам a_{ij} [1]. В этой задаче нужно знать группу преобразований эквивалентности и ее инварианты. По инвариантам классифицируют системы, приводя их в инволюцию, т. е. сравнивая смешанные производные различного порядка, полученные из разных уравнений, и получая конечное число новых уравнений. По теории Картана это всегда можно сделать за конечное число дифференцирований [2]. Практически реализация программы может осложниться при вычислении инвариантов, так как инварианты могут не удовлетворять интегрируемым уравнениям. Это случилось при классификации системы (1). Поэтому классификация проводилась по относительным инвариантам. В результате получены 25 разных случаев инвалютивных систем, каждая из которых либо проинтегрирована, либо сведена к определенной системе.

1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Система (1) допускает следующие линейные преобразования эквивалентности

$$\begin{aligned} f' &= f + c, \\ x' &= b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z + x_0, \\ y' &= b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z + y_0, \\ z' &= b_{33}z + z_0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\det B = b_{33}\triangle \neq 0$, $\triangle = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$. Система (1) в штрихованных переменных (2) имеет такой же вид с коэффициентами

$$\begin{aligned} a'_{11} = \triangle^{-2}[&b_{11}(b_{22}^2 a_{11} - 2b_{21}b_{22}a_{21} + b_{21}^2 a_{31}) + \\ &+ b_{12}(b_{22}^2 a_{12} - 2b_{21}b_{22}a_{22} + b_{21}^2 a_{32}) + \\ &+ b_{13}(b_{22}^2 a_{13} - 2b_{21}b_{22}a_{23} + b_{21}^2 a_{33})], \\ a'_{12} = \triangle^{-2}[&b_{21}(b_{22}^2 a_{11} - 2b_{21}b_{22}a_{21} + b_{21}^2 a_{31}) + \\ &+ b_{22}(b_{22}^2 a_{12} - 2b_{21}b_{22}a_{22} + b_{21}^2 a_{32}) + \\ &+ b_{23}(b_{22}^2 a_{13} - 2b_{21}b_{22}a_{23} + b_{21}^2 a_{33})], \\ a'_{13} = \triangle^{-2}&b_{33}(b_{22}^2 a_{13} - 2b_{21}b_{22}a_{23} + b_{21}^2 a_{33}), \\ a'_{21} = \triangle^{-2}[&b_{11}(-b_{12}b_{22}a_{11} - b_{11}b_{21}a_{31} + \\ &+ (b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})a_{21}) + \\ &+ b_{12}(-b_{12}b_{22}a_{12} - b_{11}b_{21}a_{32} + \\ &+ (b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})a_{22}) + \\ &+ b_{13}(-b_{12}b_{22}a_{13} - b_{11}b_{21}a_{33} + \\ &+ (b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})a_{23})], \\ a'_{22} = \triangle^{-2}[&b_{21}(-b_{12}b_{22}a_{11} - b_{11}b_{21}a_{31} + \\ &+ (b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})a_{21}) + \\ &+ b_{22}(-b_{12}b_{22}a_{12} - b_{11}b_{21}a_{32} + \\ &+ (b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})a_{22}) + \\ &+ b_{23}(-b_{12}b_{22}a_{13} - b_{11}b_{21}a_{33} + \\ &+ (b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})a_{23})], \end{aligned}$$

Работа выпонсна при поддсржкс РФФИ (гранты НШ-5245.2006.1, 05-01-00775-а, 05-01-00080-а)

Таблица 1

Коммутаторы базисных операторов алгебры Ли L_7

	X_{33}	X_+	X_-	X_{12}	X_{21}	X_{13}	X_{23}
X_{33}						X_{13}	X_{23}
X_+						$-X_{13}$	$-X_{23}$
X_-				$-X_{12}$	$2X_{21}$	$-X_{13}$	X_{23}
X_{12}			X_{12}		$-X_-$		$-X_{13}$
X_{21}			$-2X_{21}$	X_-		$-X_{13}$	
X_{13}	$-X_{13}$	X_{13}	X_{13}		X_{13}		
X_{23}	$-X_{23}$	X_{23}	$-X_{23}$	X_{13}			

$$a'_{23} = \triangle^{-2} b_{33}(-b_{12}b_{22}a_{13} - b_{11}b_{21}a_{33} + (b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})a_{23}),$$

$$a'_{31} = \triangle^{-2}[b_{11}(b_{12}^2 a_{11} - 2b_{11}b_{12}a_{21} + b_{11}^2 a_{31}) + b_{12}(b_{12}^2 a_{12} - 2b_{11}b_{12}a_{22} + b_{11}^2 a_{32}) + b_{13}(b_{12}^2 a_{13} - 2b_{11}b_{12}a_{23} + b_{11}^2 a_{33})],$$

$$a'_{32} = \triangle^{-2}[b_{21}(b_{12}^2 a_{11} - 2b_{11}b_{12}a_{21} + b_{11}^2 a_{31}) + b_{22}(b_{12}^2 a_{12} - 2b_{11}b_{12}a_{22} + b_{11}^2 a_{32}) + b_{23}(b_{12}^2 a_{13} - 2b_{11}b_{12}a_{23} + b_{11}^2 a_{33})],$$

$$a'_{33} = \triangle^{-2} b_{33}(b_{12}^2 a_{13} - 2b_{11}b_{12}a_{23} + b_{11}^2 a_{33}).$$

Преобразования (2) образуют линейную группу с групповыми параметрами b_{ij}, c, x_0, y_0, z_0. Тождественному преобразованию отвечают значения $b_{ij} = \delta_{ij}$, $c = x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

Система (1) допускает также дискретные преобразования эквивалентности

$$\begin{aligned}
&1) x \leftrightarrow y; a_{12} \leftrightarrow a_{31}, a_{11} \leftrightarrow a_{32}, \\
&\quad a_{21} \leftrightarrow a_{22}, a_{13} \leftrightarrow a_{33}, a_{23} \leftrightarrow a_{23}; \\
&2) x \to -x; a_{11} \to -a_{11}, a_{22} \to -a_{22}, \\
&\quad a_{23} \to -a_{23}, a_{31} \to -a_{31}; \\
&3) z \to -z; a_{13} \to -a_{13}, a_{23} \to -a_{23}, \\
&\quad a_{33} \to -a_{33}; \\
&4) y \to -y; a_{12} \to -a_{12}, a_{21} \to -a_{21}, \\
&\quad a_{23} \to -a_{23}, a_{32} \to -a_{32}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Индуцированная на коэффициенты a_{ij} системы (1), эта группа задается алгеброй Ли L_7 [1] с базисом операторов

$$X_{11} = -a_{11}\partial_{a_{11}} - 2a_{12}\partial_{a_{12}} - 2a_{13}\partial_{a_{13}} - a_{22}\partial_{a_{22}} - a_{23}\partial_{a_{23}} + a_{31}\partial_{a_{31}},$$

$$X_{22} = a_{12}\partial_{a_{12}} - a_{21}\partial_{a_{21}} - a_{23}\partial_{a_{23}} - 2a_{31}\partial_{a_{31}} - a_{32}\partial_{a_{32}} - 2a_{33}\partial_{a_{33}},$$

$$X_{33} = a_{13}\partial_{a_{13}} + a_{23}\partial_{a_{23}} + a_{33}\partial_{a_{33}},$$

$$X_{12} = a_{12}\partial_{a_{11}} + (-a_{11} + a_{22})\partial_{a_{21}} - a_{12}\partial_{a_{22}} - a_{13}\partial_{a_{23}} + (-2a_{21} + a_{32})\partial_{a_{31}} - 2a_{22}\partial_{a_{32}} - 2a_{23}\partial_{a_{33}},$$

$$X_{21} = -2a_{21}\partial_{a_{11}} + (a_{11} - 2a_{22})\partial_{a_{12}} - 2a_{23}\partial_{a_{13}} - a_{31}\partial_{a_{21}} + (a_{21} - a_{32})\partial_{a_{22}} - a_{33}\partial_{a_{23}} + a_{31}\partial_{a_{32}},$$

$$X_{13} = a_{13}\partial_{a_{11}} + a_{23}\partial_{a_{21}} + a_{33}\partial_{a_{31}},$$

$$X_{23} = a_{13}\partial_{a_{12}} + a_{23}\partial_{a_{22}} + a_{33}\partial_{a_{32}}.$$

Удобно заменить базис $X_- = X_{11} - X_{22}$, $X_+ = X_{11} + X_{22}$.

Таблица коммутаторов позволяет обнаружить некоторые идеалы и подалгебры.

Алгебра L_7 допускает дискретную симметрию в силу (3)

$$X_{11} \longleftrightarrow X_{22}, X_{12} \longleftrightarrow X_{21}, X_{13} \longleftrightarrow X_{23},$$
$$X_{33} \longleftrightarrow X_{33}, X_- \longleftrightarrow -X_-, X_+ \longleftrightarrow X_+.$$

Из таблицы коммутатоов следует: $J_2 = \{X_{13}, X_{23}\}$ — абелев идеал, $J_5 = \{X_-, X_{12}, X_{21}, X_{13}, X_{23}\}$ — неразрешимый идеал, $L_2 = \{X_{33}, X_+\}$ — абелева подалгебра, $L_5 = \{X_{33}, X_+, X_-, X_{12}, X_{21}\}$ — подалгебра, $L_3 = \{X_-, X_{12}, X_{21}\}$ — подалгебра.

Справедливы разложения в полупрямые суммы $L_7 = L_5 \oplus J_2 = L_2 \oplus J_5$, $J_5 = L_3 \oplus J_2$.

Выражения $J = \mathbf{det} A$, $I = a_{23}^2 - a_{13}a_{33}$ являются инвариантами для идеала J_5 и относительными инвариантами для всей алгебры L_7:

$$J' = b_{33}\triangle^{-2} J, \; I' = b_{33}^2 \triangle^{-2} I.$$

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОСТАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ ИДЕАЛА J_5

Инварианты идеала J_2: I, J, a_{23} и либо

1) $a_{13}, \alpha_1 = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$,
$\alpha_2 = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}, \alpha_3 = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}$;

либо

2) $a_{33}, \beta_1 = a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}$,

$\beta_2 = a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}, \beta_3 = a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33}$.

Связь между двумя группами функционально независимых инвариантов такова

$$\begin{gathered} I = a_{23}^2 - a_{13}a_{33}, \\ a_{13}\alpha_1 + a_{23}\beta_2 + a_{33}\alpha_3 = 0, \\ a_{13}\beta_3 + a_{23}\alpha_2 + a_{33}\beta_1 = 0, \\ Ja_{13}a_{33} + \alpha_2\beta_2 a_{23} + \\ +\beta_2\beta_3 a_{13} + \alpha_2\alpha_3 a_{33} = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Операторы X_-, X_{12}, X_{21} в новых переменных имеют вид

$$\begin{gathered} X_- = \alpha_1\partial_{\alpha_1} + \alpha_2\partial_{\alpha_2} - 3\alpha_3\partial_{\alpha_3} - 2a_{13}\partial_{a_{13}} = \\ = -\beta_1\partial_{\beta_1} - \beta_2\partial_{\beta_2} + 3\beta_3\partial_{\beta_3} + 2a_{33}\partial_{a_{33}}, \\ X_{12} = -a_{13}\partial_{a_{23}} + \beta_2\partial_{\alpha_1} + (2\beta_1 - \beta_2)\partial_{\alpha_2} = \\ = -a_{13}\partial_{a_{23}} - 2a_{23}\partial_{a_{33}} - \alpha_3\partial_{\beta_1} + \\ +2\alpha_3\partial_{\beta_2} + (\alpha_2 - \alpha_1)\partial_{\beta_3}, \\ X_{21} = -a_{33}\partial_{a_{23}} - 2a_{23}\partial_{13} - \beta_3\partial_{\alpha_1} + \\ +2\beta_3\partial_{\alpha_2} + (\beta_2 - \beta_1)\partial_{\alpha_3} = -a_{33}\partial_{a_{23}} + \\ \alpha_2\partial_{\beta_1} + (2\alpha_1 - \alpha_2)\partial_{\beta_2}. \end{gathered}$$

Инварианты оператора X_- : a_{23} и

$$\bar\alpha_1 = a_{13}^{1/2}\alpha_1, \bar\alpha_2 = a_{13}^{1/2}\alpha_2, \bar\alpha_3 = a_{13}^{-3/2}\alpha_3,$$

или

$$\bar\beta_1 = a_{33}^{1/2}\beta_1, \bar\beta_2 = a_{33}^{1/2}\beta_2, \bar\beta_3 = a_{33}^{-3/2}\beta_3.$$

Связь между инвариантами получается из (4)

$$\begin{gathered} \bar\alpha_1 + a_{23}(a_{23}^2 - I)^{-1/2}\bar\beta_2 + \\ +(a_{23}^2 - I)\bar\alpha_3 = 0, \\ \bar\beta_1 + a_{23}(a_{23}^2 - I)^{-1/2}\bar\alpha_2 + \\ +(a_{23}^2 - I)\bar\beta_3 = 0, \\ J + \bar\alpha_2\bar\beta_2 a_{23}(a_{23}^2 - I)^{-3/2} + \\ +\bar\beta_2\bar\beta_3 + \bar\alpha_2\bar\alpha_3 = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

В инвариантах оператора X_- записываются операторы X_{12}, X_{21}, используя (5):

$$\begin{gathered} a_{13}^{-1}X_{12} = \bar X_{12} = -\partial_{a_{23}} + \\ +(a_{23}^2 - I)^{-1/2}\bar\beta_2\partial_{\bar\alpha_1} + \\ +(a_{23}^2 - I)^{-1/2}(2\bar\beta_1 - \bar\beta_2)\partial_{\bar\alpha_2} = \\ = -\partial_{a_{23}} - [a_{23}(a_{23}^2 - I)^{-1}\bar\beta_1 + \\ +(a_{23}^2 - I)^{1/2}\bar\alpha_3]\partial_{\bar\beta_1} + \\ +[2(a_{23}^2 - I)^{1/2}\bar\alpha_3 - a_{23}(a_{23}^2 - I)^{-1}\bar\beta_2]\partial_{\bar\beta_2} + \\ +[3a_{23}(a_{23}^2 - I)^{-1}\bar\beta_3 + \\ +(a_{23}^2 - I)^{-3/2}(\bar\alpha_2 - \bar\alpha_1)]\partial_{\bar\beta_3}, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} a_{33}^{-1}X_{21} = \bar X_{21} = -\partial_{a_{23}} - [a_{23}(a_{23}^2 - I)^{-1}\bar\alpha_1 + \\ +(a_{23}^2 - I)^{1/2}\bar\beta_3]\partial_{\bar\alpha_1} + [2(a_{23}^2 - I)^{1/2}\bar\beta_3 - \\ -a_{23}(a_{23}^2 - I)^{-1}\bar\alpha_2]\partial_{\bar\alpha_2} + [3a_{23}(a_{23}^2 - I)^{-1}\bar\alpha_3 + \\ +(a_{23}^2 - I)^{-3/2}(\bar\beta_2 - \bar\beta_1)]\partial_{\bar\alpha_3} = -\partial_{a_{23}} + \\ +(a_{23}^2 - I)^{-1/2}\bar\alpha_2\partial_{\bar\beta_1} + \\ +(a_{23}^2 - I)^{-1/2}(2\bar\alpha_1 - \bar\alpha_2)\partial_{\bar\beta_2}. \end{gathered}$$

Инварианты оператора $\bar X_{12}$: $\bar\alpha_3$,

$$\begin{gathered} A_1 = \bar\beta_1(a_{23}^2 - I)^{-1/2} - a_{23}\bar\alpha_3 = \\ = -a_{23}\left(\bar\alpha_3 + \frac{J + \bar\alpha_2\bar\alpha_3}{\bar\alpha_1 + (a_{23}^2 - I)\bar\alpha_3}\right), \\ A_2 = \bar\beta_2(a_{23}^2 - I)^{-1/2} + 2a_{23}\bar\alpha_3 = \\ = a_{23}^{-1}\left[\bar\alpha_3(a_{23}^2 + I) - \bar\alpha_1\right]. \end{gathered}$$

В инвариантах оператора $\bar X_{12}$ оператор $(a_{23}^2 - I)\bar X_{21}$ имеет вид:

$$\begin{gathered} (A_2 - A_1)\partial_{\bar\alpha_3} + \left(\bar\alpha_3^{-1}(A_1A_2 - J) - I\bar\alpha_3\right)\partial_{A_1} + \\ + \left(\bar\alpha_3^{-1}(J - A_1A_2) + 4I\bar\alpha_3\right)\partial_{A_2}. \end{gathered}$$

Замена $s = \frac{3I}{2J}\bar\alpha_3^2$; $b = J^{-1/2}(A_2 - A_1)$, $c = J^{-1/2}(A_2 + A_1)$ приводит к оператору

$$bs\partial_s + \left(1 + \frac{5}{3}s + \frac{1}{4}(b^2 - c^2)\right)\partial_b + s\partial_c.$$

Инварианты есть интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{ds}{bs} = \frac{dc}{s} = \frac{db}{1 + \frac{5}{3}s + \frac{1}{4}(b^2 - c^2)}.$$

Пусть $b = \frac{ds}{dc}, s\frac{db}{dc} = 1 + \frac{5}{3}s + \frac{1}{4}(b^2 - c^2)$. Тогда нахождение инвариантов сводится к интегрированию уравнеия

$$ss_{cc} - \frac{1}{4}s_c^2 = 1 + \frac{5}{3}s - \frac{1}{4}c^2.$$

Уравнение имеет два частных решения $s = \frac{3}{2}(c^2 + \frac{1}{2})$; $s = \frac{1}{6}c^2 - \frac{3}{4}$. Общее решение не найдено, поэтому классификация системы проводится по относительным инвариантам I и J.

3. СЛУЧАЙ $I = a_{23}^2 - a_{13}a_{33} > 0$

Параметры b_{ij} выбираются так, чтобы $a'_{13} = a'_{33} = 0$, $a'_{23} = 1$, $a'_{21} = a'_{22} = 0$. Для этого $b_{21} = k_1^{-1}b_{22}$, $b_{12} = k_2 b_{11}$, где $k_{1,2}$ – корни квадратного уравнения $k^2 a_{13} - 2ka_{23} + a_{33} = 0$,

$$k_1 = \frac{a_{23} + I^{1/2}}{a_{13}} = \frac{a_{33}}{a_{23} - I^{1/2}};$$

$$k_2 = \frac{a_{23} - I^{1/2}}{a_{13}} = \frac{a_{33}}{a_{23} + I^{1/2}}, k_1 \neq k_2.$$

В этих формулах учтены возможности $a_{13} = 0$ или $a_{33} = 0$ или $a_{13} = a_{33} = 0$.

$$a'_{23} = 1 \Rightarrow b_{33}(a_{23} + I^{1/2}) = 2b_{11}b_{22},$$
$$a'_{21} = 0 \Rightarrow 2Ib_{11}^{-1}b_{13} = a_{33}a_{11} - 2a_{21}a_{23} + a_{13}a_{31} + k_2(a_{33}a_{12} - 2a_{22}a_{23} + a_{13}a_{32}),$$
$$a'_{22} = 0 \Rightarrow 2Ib_{22}^{-1}b_{23} = a_{33}a_{12} - 2a_{22}a_{23} + a_{13}a_{32} + k_1^{-1}(a_{33}a_{11} - 2a_{21}a_{23} + a_{13}a_{31}).$$

При этом

$$a'_{11} = b_{11}^{-1}A_{11},$$
$$A_{11} = (k_1 - k_2)^{-2}[a_{11}k_1^2 - 2a_{21}k_1 + a_{31} + k_2(a_{12}k_1^2 - 2a_{22}k_1 + a_{32})],$$
$$a'_{12} = b_{11}^{-2}b_{22}A_{12},$$
$$A_{12} = (k_1 - k_2)^{-2}k_1^{-1}[a_{11}k_1^2 - 2a_{21}k_1 + a_{31} + k_1(a_{12}k_1^2 - 2a_{22}k_1 + a_{32})],$$
$$a'_{31} = b_{11}b_{22}^{-2}A_{31},$$
$$A_{31} = (k_1 - k_2)^{-2}k_1^2[a_{11}k_2^2 - 2a_{21}k_2 + a_{31} + k_2(a_{12}k_2^2 - 2a_{22}k_2 + a_{32})],$$
$$a'_{32} = b_{22}^{-1}A_{32}, A_{32} = (k_1 - k_2)^{-2}k_1[a_{11}k_2^2 - 2a_{21}k_2 + a_{31} + k_1(a_{12}k_2^2 - 2a_{22}k_2 + a_{32})].$$

Выбором параметров b_{11}, b_{22} можно сделать одинаковыми две из четырех величин a'_{11}, a'_{12}, a'_{31}, a'_{32} не равных нулю. Обозначим $a'_{11} = \delta$, $a'_{32} = \epsilon$, $a'_{12} = \alpha$, $a'_{31} = \beta$.

Система (1) принимает вид (штрихи убираем):

$$f_{xx} = \delta f_x + \alpha f_y,$$
$$f_{xy} = f_z,$$
$$f_{yy} = \beta f_x + \epsilon f_y.$$

Условия совместности дают еще три уравнения

$$f_{xz} = \alpha\beta f_x + \epsilon\alpha f_y + \delta f_z,$$
$$f_{yz} = \delta\beta f_x + \beta\alpha f_y + \epsilon f_z,$$
$$f_{zz} = (\delta^2 + \epsilon\alpha)\beta f_x + (\epsilon^2 + \beta\delta)\alpha f_y + (\delta\epsilon + \alpha\beta) f_z.$$

Есть интеграл этой системы

$$f_z = \epsilon f_x + \delta f_y + (-\delta\epsilon + \alpha\beta) f + C.$$

Общее решение таково: $x_1 = x + \epsilon z$, $y_1 = y + \delta z$;

$$a)\alpha\beta - \epsilon\delta = J = 0 \Rightarrow f = Cz + g(x_1, y_1),$$
$$b)\alpha\beta - \epsilon\delta = J \neq 0 \Rightarrow f = g(x_1, y_1)\exp(Jz),$$

с точностью до переноса по f.

Случай a. Система (6) принимает вид

$$g_{x_1x_1} = \delta g_{x_1} + \alpha g_{y_1},$$
$$g_{x_1y_1} = \epsilon g_{x_1} + \delta g_{y_1} + C, \qquad (7)$$
$$g_{y_1y_1} = \beta g_{x_1} + \epsilon g_{y_1}.$$

Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда выбором b_{22} можно сделать $\alpha = 1$, $\beta = \epsilon\delta$. Система (7) сводится к обыкновенному уравнению

$$g_{y_1} = g_{x_1x_1} - \delta g_{x_1};$$
$$g_{x_1x_1x_1} - 2\delta g_{x_1x_1} + (\delta^2 - \epsilon)g_{x_1} = C. \qquad (8)$$

Если $\epsilon - \delta^2 \neq 0$, то второе уравнение (8) интегрируется

$$g = C(\delta^2 - \epsilon)^{-1}x_1 + g_1(y_1)\exp(\kappa_1 x_1) + g_0(y_1) + g_2(y_1)\exp(\kappa_2 x_1), \kappa_{1,2} = \delta \pm \epsilon^{1/2},$$

где в силу первого уравнения (8)

$$g_0 = -C\delta(\delta^2 - \epsilon)^{-1}y_1 + C_0,$$
$$g_1 = C_1\exp(-\delta\kappa_1 y_1), g_2 = C_2\exp(-\delta\kappa_2 y_1).$$

Итак, с точностью до переноса по f имеем

$$f = C(\delta^2 - \epsilon)^{-1}(x - \delta y) + C_1\exp[\kappa_1(x - \delta y + (\epsilon - \delta^2)z)] + C_2\exp[\kappa_2(x - \delta y + (\epsilon - \delta^2)z)]. \qquad (1*)$$

Одну ненулевую постоянную из δ, ϵ можно сделать 1 с помощью преобразований эквивалентности.

Если $\epsilon = \delta^2, \delta \neq 0$, т.е. $A_{11}^2 = A_{12}A_{32}$, то можно сделать $\delta = 1, \epsilon = 1$, и (8) интегрируется. Получается решение

$$f = -\tfrac{1}{4}(x - y)^2 - (\tfrac{1}{2}C + C_1)y + C_1 x + \tfrac{1}{2}Cz + C_2\exp[2(x + y + 2z)]. \qquad (2*)$$

Если $\epsilon = \delta = 0$, т.е. $A_{11} = A_{32} = A_{31} = 0$, то $g = \frac{1}{6}Cx_1^3 + g_2(y_1)x_1^2 + g_1(y_1)x_1 + g_0(y_1)$ и (8) интегрируется. Получается решение

$$f = C(\frac{1}{6}x^3 + xy + z) + C_2(x^2 + 2y) + C_1 x. \qquad (3*)$$

Пусть $\alpha = \beta = 0$ (если $\beta \neq 0$, то замена переменных $x \leftrightarrow y$ приводит к случаю $\alpha \neq 0$), $\epsilon\delta = 0$.

При $\epsilon = \delta = 0$ имеем

$$f = C(z + xy) + C_1 x + C_2 y. \qquad (4*)$$

При $\epsilon = 0, \delta = 1$ имеем

$$f = -Cy + e^x(C_1 y + C_1 z + C_2). \qquad (5*)$$

Случай b. Система (5) принимает вид

$$\begin{gathered} g_{x_1x_1} = \delta g_{x_1} + \alpha g_{y_1}, \\ g_{x_1y_1} = \epsilon g_{x_1} + \delta g_{y_1} + g, \\ g_{y_1y_1} = \beta g_{x_1} + \epsilon g_{y_1}. \end{gathered} \qquad (9)$$

Можно считать $J = \alpha\beta - \epsilon\delta = 1$.

Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда выбором b_{22} делаем $\alpha = 1, \beta = 1 + \epsilon\delta$. Система (9) сводится к обыкновенному уравнению

$$\begin{gathered} g_{y_1} = g_{x_1x_1} - \delta g_{x_1}; \\ g_{x_1x_1x_1} - 2\delta g_{x_1x_1} + (\delta^2 - \epsilon) g_{x_1} - g = 0. \end{gathered}$$

Характеристическое уравнение $\kappa^3 - 2\delta\kappa^2 + (\delta^2 - \epsilon)\kappa - 1 = 0$ имеет три корня. Если все корни простые $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$, то

$$g = \sum_i C_i \exp\left[\kappa_i(x_1 + (\kappa_i - \delta)y_1)\right].$$

Если только один корень κ_1 простой, то

$$\begin{gathered} g = C_1 \exp\left[\kappa_1(x_1 + (\kappa_1 - \delta)y_1)\right] + \\ +(C_2(2\kappa_2 - \delta)y_1 + C_2 x_1 + \\ +C_3)\exp\left[\kappa_2(x_1 + (\kappa_2 - \delta)y_1)\right]. \end{gathered}$$

Итак, получается два случая

$$\begin{gathered} f = \textstyle\sum_i C_i \exp[\kappa_i(x + \\ (\kappa_i - \delta)y + \kappa_i(\kappa_i - \delta)z)], \end{gathered} \qquad (6*)$$

$$\begin{gathered} f = C_1 \exp[\kappa_1(x + (\kappa_1 - \delta)y + \\ +\kappa_1(\kappa_1 - \delta)z)] + [C_2((2\kappa_2 - \delta)y + \\ +x + \kappa_2^{-1}(\kappa_2^3 - 1)z) + C_3)]\exp[\kappa_2(x + \\ (\kappa_2 - \delta)y + \kappa_2(\kappa_2 - \delta)z)]. \end{gathered} \qquad (7*)$$

Пусть $\alpha = \beta = 0, \epsilon\delta = -1$. Можно считать $\delta = 1, \epsilon = -1$. Если $\beta \neq 0$, то замена $x \leftrightarrow y$ приводит к случаю $\alpha \neq 0$. Интегрирование (9) приводит к решению

$$f = C_1 e^{-y} + C_2 e^x + C_3 e^{x-y-z}. \qquad (8*)$$

4. СЛУЧАЙ $I = a_{23}^2 - a_{13}a_{33} < 0$

Параметры преобразования (2) выбираются так, чтобы они удовлетворяли линейной системе уравнений

$$\begin{gathered} a_{23}b_{12} = a_{33}b_{11} - (-I)^{-1/2}b_{22}, \\ a_{23}b_{21} = a_{13}b_{22} - (-I)^{-1/2}b_{11}. \end{gathered}$$

В этом случае $a'_{23} = 0$, $a'_{13} = a'_{33} = -b_{33}I\triangle^{-1}$, где $a_{23}^2\triangle = (-I)^{1/2}(a_{33}b_{11}^2 - 2(-I)^{1/2}b_{11}b_{22} + a_{13}b_{22}^2)$.

Выбором b_{33} можно сделать $a'_{13} = a'_{33} = 1$. Выбором b_{13}, b_{23} можно сделать $a'_{12} = a'_{31} = 0$. Остается два свободных параметра, которыми можно упростить оставшиеся коэффициенты $a'_{11}, a'_{21}, a'_{22}, a'_{32}$.

Преобразования вида (2), сохраняющие $a_{13} = a_{33} = 1$, $a_{23} = a_{12} = a_{31} = 0$ имеет вид: $b_{11} = b_{22} = \sigma\cos\varphi$, $b_{21} = -b_{12} = \sigma\sin\varphi$, $\triangle = \sigma^2$, $J' = J\sigma^{-2}$,

$$\begin{gathered} \sigma a'_{11} = -a_{32}\sin^3\varphi + (4a_{22} - a_{11})\sin^2\varphi\cos\varphi - \\ -(4a_{21} - a_{32})\sin\varphi\cos^2\varphi + a_{11}\cos^3\varphi, \\ \sigma a'_{32} = a_{11}\sin^3\varphi + (4a_{21} - a_{32})\sin^2\varphi\cos\varphi + \\ +(4a_{22} - a_{11})\sin\varphi\cos^2\varphi + a_{32}\cos^3\varphi, \\ \sigma a'_{21} = a_{21}\cos^3\varphi + (a_{11} - a_{22})\sin\varphi\cos^2\varphi + \\ +(a_{32} - a_{21})\sin^2\varphi\cos\varphi + a_{22}\sin^3\varphi, \\ \sigma a'_{22} = -a_{21}\sin^3\varphi + (a_{11} - a_{22})\sin^2\varphi\cos\varphi - \\ -(a_{32} - a_{21})\sin\varphi\cos^2\varphi + a_{22}\cos^3\varphi. \end{gathered}$$

Выбором φ можно сделать $a'_{32} = 0$. Выбором σ можно сделать любой ненулевой коэффициент $a'_{11}, a'_{21}, a'_{22}$ единицей.

Итак, рассматривается система (штрихи опускаем)

$$\begin{gathered} f_{xx} = \delta f_x + f_z, \\ f_{xy} = \alpha f_x + \beta f_y, \\ f_{yy} = \epsilon f_y + f_z. \end{gathered} \qquad (10)$$

Условия совместности дают еще три уравнения

$$\begin{gathered} f_{xz} = \alpha(\alpha - \epsilon)f_x + \beta\alpha f_y + \beta f_z, \\ f_{yz} = \alpha\beta f_x + \beta(\beta - \delta)f_y + \alpha f_z, \\ f_{zz} = (2\alpha^2 - \epsilon)\alpha\beta f_x + (2\beta - \delta)\alpha\beta f_y + \\ +(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\epsilon - \delta\beta)f_z. \end{gathered}$$

Есть интеграл этой системы

$$f_z = \beta f_x + \alpha f_y - (\alpha\epsilon + \beta\delta)f + C. \qquad (11)$$

Общее решение (11) таково: $x_1 = x + \beta z$, $y_1 = y + \alpha z$;

$$a)\alpha\epsilon + \beta\delta = J = 0 \Rightarrow f = Cz + g(x_1, y_1),$$
$$b)\alpha\epsilon + \beta\delta = J \neq 0 \Rightarrow f = g(x_1, y_1)\exp(-Jz),$$

с точностью до переноса по f.

Случай a. Система (10) принимает вид

$$\begin{gathered} g_{x_1x_1} = (\delta+\beta)g_{x_1} + \alpha g_{y_1} + C, \\ g_{x_1y_1} = \alpha g_{x_1} + \beta g_{y_1}, \\ g_{y_1y_1} = \beta g_{x_1} + (\epsilon+\alpha)g_{y_1} + C. \end{gathered} \tag{12}$$

Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда можно сделать $\alpha = 1$, $\beta = \epsilon = 0$. Система (12) сводится к обыкновенному уравнению

$$\begin{gathered} g_{y_1} = g_{x_1x_1} - \delta g_{x_1} - C; \\ g_{x_1x_1x_1} - \delta g_{x_1x_1} - g_{x_1} = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Отсюда получаем решение

$$\begin{gathered} f = -Cy + C_1\exp(y + \kappa_1 x + z) + \\ +C_2\exp(y + \kappa_2 x + z), \end{gathered} \tag{9*}$$

где $\kappa_i = \frac{1}{2}\delta \pm (\frac{1}{4}\delta^2 + 1)^{1/2}$.

При $\alpha = 0$ следует $\beta = 0$ (в противном случае делается замена $x \leftrightarrow y$),

$$g_{xy} = 0,\ g_{xx} - \delta g_x = C, g_{yy} - \epsilon g_y = C.$$

Отсюда следует:
при $\delta \neq 0$, $\epsilon \neq 0$ ($\epsilon\delta = \pm 1$)

$$f = C(z - \frac{x}{\delta} - \frac{y}{\epsilon}) + C_1 e^{\delta x} + C_2 e^{\epsilon y}, \tag{10*}$$

при $\epsilon = 0$, $\delta = 1$

$$f = C(\frac{1}{2}y^2 - x + z) + C_2 y + C_1 e^x, \tag{11*}$$

при $\delta = \epsilon = 0$

$$f = C(z + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2) + C_1 x + C_2 y. \tag{12*}$$

Случай b. Система (10) принимает вид

$$\begin{gathered} g_{x_1x_1} = (\delta+\beta)g_{x_1} + \alpha g_{y_1} - Jg, \\ g_{x_1y_1} = \alpha g_{x_1} + \beta g_{y_1}, \\ g_{y_1y_1} = \beta g_{x_1} + (\epsilon+\alpha)g_{y_1} - Jg. \end{gathered} \tag{13}$$

Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда можно считать $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\epsilon = J$. Система (13) сводится к обыкновенному уравнению

$$\begin{gathered} g_{y_1} = g_{x_1x_1} - \delta g_{x_1} + Jg; \\ g_{x_1x_1x_1} - \delta g_{x_1x_1} + (J-1)g_{x_1} = 0. \end{gathered}$$

Отсюда получаются решения: при $\frac{1}{4}\delta^2 + 1 \neq J$

$$\begin{gathered} f = C_0 e^{Jy} + C_1 e^{y + \kappa_1 x + (1-J)z} + \\ +C_2 e^{y + \kappa_2 x + (1-J)z}, \end{gathered} \tag{13*}$$

где $\kappa_{1,2} = \frac{1}{2}\delta \pm (\frac{1}{4}\delta^2 - J + 1)^{1/2}$; при $\frac{1}{4}\delta^2 + 1 = J$

$$\begin{gathered} f = C_0\exp[y(1 + \delta^2/4)] + \\ (C_1 + C_2 x)\exp(x\delta/2 + y - \delta^2 z/4). \end{gathered} \tag{14*}$$

При $\alpha = 0$ следует $\beta = 0$ (иначе делается замена $x \leftrightarrow y$) и $J = 0$ противоречие.

5. СЛУЧАЙ $I = a_{23}^2 - a_{13}a_{33} = 0$

Можно считать $a_{33} \neq 0$. Выбирая $b_{21} = a_{23}a_{33}^{-1}b_{22}$, $b_{33} = b_{22}^2(a_{33}b_{11} - a_{23}b_{12})^{-1}$, придем к равенствам $a'_{13} = a'_{23} = 0$, $a'_{33} = 1$. Выбором b_{13}, b_{23} делаем $a'_{31} = a'_{32} = 0$. Преобразования (2), сохраняющие $a_{33} = 1$, $a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$ имеют вид:

$$\begin{gathered} a'_{11} = b_{11}^{-2}(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{12}),\ a'_{12} = b_{11}^{-2}b_{22}a_{12}, \\ a'_{21} = b_{11}^{-2}b_{22}^{-1}[b_{11}(b_{11}a_{21} - b_{12}a_{11}) + \\ +b_{12}(b_{11}a_{22} - b_{12}a_{12})], \\ a'_{22} = b_{11}^{-2}(b_{11}a_{22} - b_{12}a_{12}). \end{gathered}$$

Если $a_{12} \neq 0$, то выбор $b_{12} = b_{11}a_{22}a_{12}^{-1}$, $b_{22} = b_{11}^2 a_{12}^{-1}$ делает $a'_{22} = 0$, $a'_{12} = 1$, $a'_{11} = b_{11}^{-1}(a_{11} + a_{22})$, $a'_{21} = b_{11}^{-2}(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})$.
1) $a_{11} + a_{22} \neq 0 \Rightarrow a'_{11} = 1, a'_{21} = \delta$;
2) $a_{11} + a_{22} = 0 \Rightarrow a'_{11} = 0, a'_{21} = \delta = \pm 1, 0$.

Если $a_{12} = 0$, то $a'_{12} = 0$.
3) $a_{11} \neq a_{22} \Rightarrow a'_{21} = 0$;
один из ненулевых a'_{11}, a'_{22} можно сделать единицей.
4) $a_{11} = a_{22} \Rightarrow a'_{11} = a'_{22} = \delta = 1, 0; a'_{21} = \epsilon = 1, 0$.

Рассмотрим каждый из четырех случаев, опуская штрихи.
1) $f_{xx} = f_x + f_y$, $f_{xy} = \delta f_x$, $f_{yy} = f_z \Rightarrow f_z = \delta f_y$.

Отсюда $f = g(x, y_1)$, $y_1 = y + \delta z$, $g_{y_1} = g_{xx} - g_x, g_{xxx} - g_{xx} - \delta g_x = 0$.

Получаются решения при $\delta \neq -\frac{1}{4}$

$$\begin{gathered} f = C_1\exp[\delta(y + \delta z) + \kappa_1 x] + \\ +C_2\exp[\delta(y + \delta z) + \kappa_2 x], \end{gathered} \tag{15*}$$

где $\kappa_{1,2} = \frac{1}{2} \pm (\frac{1}{4} + \delta)^{1/2}$; при $\delta = -\frac{1}{4}$

$$f = (C_1 + C_2 x)\exp[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}(y - \frac{1}{4}z)]. \tag{16*}$$

2) $f_{xx} = f_y,\ f_{xy} = \delta f_x, f_{yy} = f_z \Rightarrow f_z = \delta f_y$.
Отсюда $f = g(x, y_1),\ y_1 = y + \delta z$,

$$g_{y_1} = g_{xx},\ g_{xxx} = \delta g_x.$$

Получаются решения при $\delta \neq 0$

$$f = \big(C_1 \exp(\delta^{1/2} x) + \\ + C_2 \exp(-\delta^{1/2} x)\big) \exp[\delta(y + \delta z)], \tag{17*}$$

при $\delta = 0$

$$f = C_1 x + C_2(x^2 - 2y). \tag{18*}$$

3) $f_{xx} = \alpha f_x,\ f_{xy} = \beta f_y, f_{yy} = f_z$

$$\beta = 0, \alpha = 1 \Rightarrow f = Ce^x + g(y, z), \\ g_z = g_{yy}; \tag{19*}$$

$$\beta = \alpha = 1 \Rightarrow f = e^x g(y, z),\ g_z = g_{yy}; \tag{20*}$$

$$\beta = 1, \alpha \neq 1, \alpha \neq 0 \Rightarrow f = Ce^x; \tag{21*}$$

$$\beta = 1, \alpha = 0 \Rightarrow f = Cx; \tag{22*}$$

$$\beta = \alpha = 0 \Rightarrow f = xg(z) + h(y, z), \\ h_z = h_{yy}. \tag{23*}$$

4) $f_{xx} = \alpha f_x,\ f_{xy} = \beta f_x + \alpha f_y, f_{yy} = f_z$, ненулевые α, β можно сделать единицами.

$$\beta = 0 \Rightarrow 3);$$

$$\beta = 1, \alpha = 0 \Rightarrow f = Ce^{y+z} + g(y, z), \\ g_z = g_{yy}; \tag{24*}$$

$$\beta = 1, \alpha = 1 \Rightarrow f = 0. \tag{25*}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вычисления приведенные в пунктах 3 – 5 позволяют формулировать следующее утверждение.

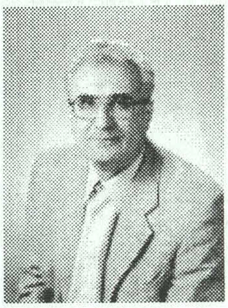
Теорема. Решения системы (1) сводятся преобразованиями (2), (3) к одному из решений (1∗)–(25∗).

Заметим, что классификация (доказательство теоремы) проведена с помощью относительных инвариантов I и J. Инварианты линейной группы преобразований эквивалентности явно не определяются в элементарных функциях. По-видимому, это первый пример для линейных преобразований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Овсянников, Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. – М.: Наука, 1978. – 400с.
2. **Фиников, С. П.** Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии / С. П. Фиников. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948. – 500с.

ОБ АВТОРЕ



Хабиров Салават Валеевич, проф., гл. науч. сотр., зав. лаб. ИМ УНЦ РАН, проф. каф. математики УГАТУ. Дипл. механик (Новосиб. гос. ун-т, 1970). Д-р физ.-мат. наук (защ. Ин-те мат. и мех. РАН, Екб., 1991). Иссл. в обл. груп. анализа диф. уравнений.