

УДК 681.51

Ф. М. АХМЕДЖАНОВ, В. Г. КРЫМСКИЙ, Р. А. КУДАЯРОВ

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ И ЗАПАЗДЫВАНИЯ В МОДЕЛИ ОБЪЕКТА

Исследуются динамические свойства систем управления объектами, модели которых наряду с параметрической неопределенностью содержат компоненты с «чистым» запаздыванием. Выполнен анализ множеств значений частотных характеристик элементарного звена с запаздыванием и интервальными параметрами, и на этой основе разработан подход к синтезу систем указанного класса. Результаты иллюстрируются численным примером. *Управление; запаздывание; параметрическая неопределенность*

ВВЕДЕНИЕ

На практике значительную трудность представляет решение задач управления объектами, динамические модели которых наряду с неопределенностями содержат также и запаздывание. С подобной ситуацией приходится сталкиваться, в первую очередь, при управлении теплообменными процессами. В частности, для силовой установки летательного аппарата (СУЛА) важным аккумулятором энергии, следующим по порядку значимости за вращающимися массами роторов турбокомпрессора, является камера сгорания двигателя. Протекающие в ней тепловые процессы характеризуются пространственной распределенностью значений параметров. Соответствующая модель динамики представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. В монографии [1] предложено по информации, содержащейся в такой системе уравнений, находить эквивалентные трансцендентные передаточные функции, которые характеризуются записью

$$\frac{Y(x, s)}{U(s)} = B(s) \cdot e^{-C(s) \cdot x}, \quad (1)$$

где s — переменная Лапласа; x — пространственная координата; $Y(x, s)$ — изображение по Лапласу выходной координаты рассматриваемого объекта; $U(s) = Y(0, s)$ — изображение входной координаты; $B(s)$, $C(s)$ — дробно-рациональные функции s .

Дальнейшим шагом, позволяющим упростить описание динамических процессов в подобных объектах, обеспечивая при этом

приемлемую для технических приложений точность, является аппроксимация выражения (1) с помощью передаточной функции линейного звена с запаздыванием вида:

$$\frac{Y(x, s)}{U(s)} = W(s) \cdot e^{-\tau \cdot s}, \quad (2)$$

где $W(s)$ — дробно-рациональная функция s ; τ — постоянная времени запаздывания.

Такой подход известен в литературе (см., например, [2]) и может быть реализован путем разложения (1) в ряд с последующим удержанием членов, оказывающих наибольшее влияние на характер и показатели процесса.

Важно отметить, что применительно к задачам теплообмена τ , а также параметры числителя и знаменателя $W(s)$ следует рассматривать как неопределенные величины, т. е. их значения могут меняться в зависимости от конкретного состава газозооушной смеси, условий полета, режима работы двигателя и других факторов. Наиболее адекватной отмеченной ситуации моделью объекта является интервальная, согласно которой параметры $W(s)$ и величина τ могут принимать произвольные значения из интервалов с фиксированными границами. Описание свойств такой модели путем нахождения точных значений границ ее динамических характеристик при произвольном порядке $W(s)$ (и, следовательно, произвольной размерности вектора интервальных коэффициентов) на сегодняшний день оказывается нереализуемым. В то же время, если в знаменателе $W(s)$ удастся выделить доминирующую постоянную времени

(что, в частности, выполнимо для модели процессов в камере сгорания СУЛА), то возможно соответствующее понижение порядка этой передаточной функции. Поэтому существенный интерес представляет случай, когда

$$W(s) = \frac{K}{Ts + 1}. \quad (3)$$

Результирующая передаточная функция $\tilde{W}(s)$ рассматриваемой интервальной модели объекта при этом приобретает вид

$$\tilde{W}(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-\tau s}, \quad (4)$$

где K, T, τ — неопределенные параметры, удовлетворяющие неравенствам $\underline{K} \leq K \leq \overline{K}, \underline{T} \leq T \leq \overline{T}, \underline{\tau} \leq \tau \leq \overline{\tau}$; ($K \in [\underline{K}, \overline{K}], T \in [\underline{T}, \overline{T}], \tau \in [\underline{\tau}, \overline{\tau}]$); $\underline{K}, \overline{K}, \underline{T}, \overline{T}, \underline{\tau}, \overline{\tau}$ — границы интервалов возможного изменения соответствующих параметров.

Построение систем управления объектами с моделями вида (4) требует разработки специализированного подхода, суть которого изложена далее.

ОСОБЕННОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ НАЛИЧИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Для управления объектами, модели которых содержат звенья чистого запаздывания, предложен ряд вариантов системных структур.

Одной из наиболее подходящих в этом отношении является структура системы автоматического управления (САУ) с регулятором Смита [2] (рис. 1). Указанная структура предложена еще в 60-е годы прошлого века. Достоинством данной схемы является тот факт, что в ней по существу реализован принцип двухканальности академика Б. Н. Петрова (она содержит два канала передачи выходного сигнала регулятора: один — через объект, другой — через его модель). В результате появляется возможность не только компенсировать влияние запаздывания, но и «парировать» некоторые сигнальные и параметрические возмущения.

Обозначения изображений по Лапласу сигналов, присутствующих в схеме на рис. 1, сохранены в дальнейшем изложении. Кроме того, $R(s)$ — передаточная функция регулятора; $H(s)e^{-\tau s}$ — передаточная функция объекта (причем $H(s)$ — дробно-рациональная

функция; τ — постоянная времени запаздывания); $H_M(s)(1 - e^{-\tau_M s})$ — аналогичная передаточная функция модели.

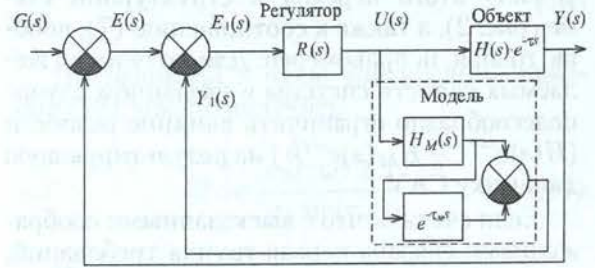


Рис. 1

Система уравнений относительно изображений сигналов согласно структурной схеме (рис. 1) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} E(s) &= G(s) - Y(s); \\ E_1(s) &= E(s) - Y_1(s); \\ Y(s) &= R(s)H(s) \cdot e^{-\tau s} \cdot E_1(s); \\ Y_1(s) &= R(s)H_M(s)(1 - e^{-\tau_M s})E_1(s). \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда

$$Y(s) = \frac{H(s)R(s)e^{-\tau s} \cdot G(s)}{(1 + H_M(s)R(s) + R(s) \times [H(s)e^{-\tau s} - H_M(s)e^{-\tau_M s}])}. \quad (6)$$

При $H(s) = H_M(s)$ и $\tau = \tau_M$ имеет место

$$Y(s) = \frac{H_M(s)R(s)}{1 + H_M(s)R(s)} e^{-\tau_M s} \cdot G(s). \quad (7)$$

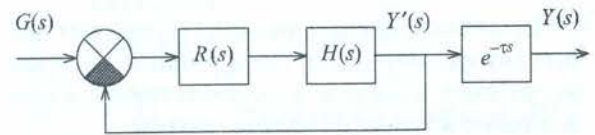


Рис. 2

Выражение (7) показывает, что при совпадении характеристик объекта и модели структура (рис. 1) эквивалентна показанной на рис. 2, при этом

$$Y'(s) = \frac{H(s)R(s) \cdot G(s)}{1 + H(s)R(s)}.$$

В результате разработчик получает возможность задания выходной реакции системы желаемого вида путем введения необходимого регулятора в замкнутый контур САУ. Для указанной реакции будет иметь место минимальное запаздывание, равное запаздыванию объекта.

В ситуации, когда объекту присуща интервальная параметрическая неопределенность, возможны отклонения характеристик объекта от номинальных, заложенных в модели. В силу этого переход к структурной схеме (рис. 2), а также к соотношению (7), вообще говоря, неправомерен. Для получения желаемых свойств системы в указанном случае целесообразно ограничить влияние разности $(H(s)e^{-\tau s} - H_M(s)e^{-\tau_M s})$ на результирующую динамику САУ.

Если считать, что с высказанными соображениями связана первая группа требований, предъявляемых к системе при синтезе, а вторая группа предусматривает задание доминирующей части передаточной функции САУ в желаемом виде, то возникает вопрос о модификации структуры (рис. 2) с целью одновременного удовлетворения двум группам системных требований.

Предлагается синтезировать специальную модификацию САУ с регулятором Смита в классе структур с двумя степенями свободы [3]. Возможный вариант такой структуры показан на рис. 3.

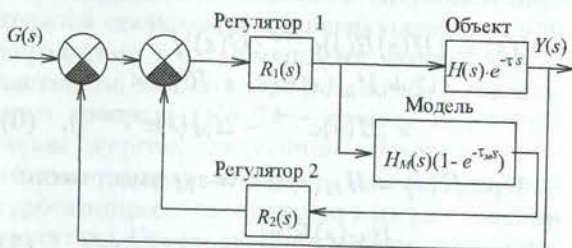


Рис. 3

При таком построении САУ содержит два регулятора, передаточные функции которых могут быть выбраны в соответствии с изложенной постановкой задачи синтеза.

Изображение выходной реакции предложенной системы характеризуется выражением

$$Y(s) = \frac{H(s)R_1(s)e^{-\tau s} \cdot G(s)}{(1 + H_M(s)R_1(s)R_2(s) + R_1(s) \times [H(s)e^{-\tau s} - H_M(s)R_2(s)e^{-\tau_M s}])}. \quad (8)$$

Обозначим $\text{mod}(Z(j\omega))$ модуль произвольной комплекснозначной функции $Z(j\omega)$, а $(\text{Re } Z(j\omega))$, $(\text{Im } Z(j\omega))$ — ее вещественную и мнимую части.

Тогда степень влияния присутствующего в знаменателе дробно-рациональной функции (8) слагаемого

$$R_1(s)[H(s)e^{-\tau s} - H_M(s)R_2(s)e^{-\tau_M s}]$$

на свойства САУ можно оценивать с помощью показателя

$$J = \max_{\omega} \{ \text{mod}(R_1(j\omega))[\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega)] \}, \quad (9)$$

в котором

$$\alpha(\omega) = \max \left\{ \begin{array}{l} \left| \sup[\text{Re}(H(j\omega)e^{-j\omega\tau}) - \right. \\ \left. - \text{Re}(H_M(j\omega)R_2(j\omega)e^{-j\omega\tau_M})] \right| \\ \left| \inf[\text{Re}(H(j\omega)e^{-j\omega\tau}) - \right. \\ \left. - \text{Re}(H_M(j\omega)R_2(j\omega)e^{-j\omega\tau_M})] \right| \end{array} \right\}$$

$$\beta(\omega) = \max \left\{ \begin{array}{l} \left| \sup[\text{Im}(H(j\omega)e^{-j\omega\tau}) - \right. \\ \left. - \text{Im}(H_M(j\omega)R_2(j\omega)e^{-j\omega\tau_M})] \right| \\ \left| \inf[\text{Im}(H(j\omega)e^{-j\omega\tau}) - \right. \\ \left. - \text{Im}(H_M(j\omega)R_2(j\omega)e^{-j\omega\tau_M})] \right| \end{array} \right\}$$

Для вычисления показателя (9) применительно к объекту, модель которого содержит интервальную параметрическую неопределенность и запаздывание, необходимо знать верхние и нижние оценки значений его частотных характеристик, в частности вещественной (ВЧХ) и мнимой (МЧХ), так как они входят в выражения для вычисления значений $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$.

Описание такой методики применительно к звену с передаточной функцией вида (4) приводится ниже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ МНОЖЕСТВ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТА

Одним из требований, предъявляемых к САУ при синтезе, в соответствии со сказанным может быть неравенство

$$J \leq J^*, \quad (10)$$

где J^* — заданное малое положительное число.

Второе требование относится к дробно-рациональной функции

$$W'(s) = \frac{H(s)R_1(s)}{1 + H_M(s)R_1(s)R_2(s)}. \quad (11)$$

В равенстве (11) $W'(s)$ представляет собой функцию желаемого вида, которая в рассматриваемой ситуации содержит интервальные коэффициенты.

Таким образом, необходимо определить передаточные функции регуляторов исходя из желаемых свойств (11) при наличии ограничений (10).

Остановимся далее на определении верхних и нижних границ множеств частотных характеристик звеньев с интервальной параметрической неопределенностью и запаздыванием. Такое исследование необходимо для вычисления оценочных показателей (9), используемых в процессе синтеза системы.

Амплитудно-фазовая характеристика интервального инерционного звена с запаздыванием (ИИЗЗ), полученная путем подстановки $s = j\omega$ в уравнение (4), имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{W}(j\omega) &= \frac{K}{jT\omega + 1} e^{-j\tau\omega} = \\ &= H(\omega) e^{j\Theta(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega). \end{aligned} \quad (12)$$

Учитывая (12), для звена с фиксированными значениями параметров можно записать выражения для амплитудно-частотной характеристики (АЧХ):

$$H(\omega) = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} \quad (13)$$

и фазо-частотной характеристики (ФЧХ):

$$\Theta(\omega) = -\text{arctg}(T\omega) - \tau\omega. \quad (14)$$

Зависимость $H(\omega)$ от коэффициента K имеет возрастающий характер, а зависимости $H(\omega)$ и $\Theta(\omega)$ от T и τ — убывающий, поэтому выражения для верхних и нижних границ АЧХ и ФЧХ принимают вид:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{K}}{\sqrt{\underline{T}^2\omega^2 + 1}}, \quad (15)$$

$$\overline{H}(\omega) = \frac{\overline{K}}{\sqrt{\overline{T}^2\omega^2 + 1}};$$

$$\underline{\Theta}(\omega) = -\text{arctg}(\underline{T}\omega) - \underline{\tau}\omega, \quad (16)$$

$$\overline{\Theta}(\omega) = -\text{arctg}(\overline{T}\omega) - \overline{\tau}\omega.$$

Амплитудно-фазовой характеристике звена (12) соответствует ВЧХ

$$U(\omega) = K \frac{\cos(\tau\omega) - T\omega \sin(\tau\omega)}{T^2\omega^2 + 1}. \quad (17)$$

Исследуем функцию $U(\omega)$ на наличие локального экстремума по отношению к параметру T . С этой целью найдем частную производную указанной функции по T :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} U(\omega) &= K\omega \times \\ &\times \frac{T^2\omega^2 \sin(\tau\omega) - 2T\omega \cos(\tau\omega) - \sin(\tau\omega)}{(T^2\omega^2 + 1)^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Приравнивая к нулю числитель выражения (18), можно получить

$$T = \frac{\cos(\tau\omega) \pm 1}{\omega \cdot \sin(\tau\omega)}. \quad (19)$$

Исследуя знак второй производной

$$\frac{\partial^2 U(\omega)}{\partial T^2} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial U(\omega)}{\partial T} \right) \quad (20)$$

в точке локального экстремума функции $U(\omega)$, можно показать:

при условии

$$\sin(\tau\omega) > 0; (2k\pi < \tau\omega < (2k + 1)\pi), \quad (21)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, локальный экстремум по отношению к параметру T будет представлять собой минимум, равный

$$\begin{aligned} U(\omega)|_T &= (\text{arctg}(\tau\omega/2)) / \omega = \\ &= -K \sin^2(\tau\omega/2); \end{aligned} \quad (22)$$

при альтернативном условии

$$\begin{aligned} \sin(\tau\omega) < 0 \\ ((2k + 1)\pi < \tau\omega < 2(k + 1)\pi), \end{aligned} \quad (23)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, указанный экстремум будет максимумом, равным

$$\begin{aligned} U(\omega)|_T &= -(\text{arctg}(\tau\omega/2)) / \omega = \\ &= K \cos^2(\tau\omega/2). \end{aligned} \quad (24)$$

Необходимо отметить периодический характер зависимости ВЧХ от $\tau\omega$. Так же периодична и ее частная производная по рассматриваемому параметру

$$\frac{\partial}{\partial \tau} U(\omega) = -K\omega \frac{\sin(\tau\omega) + T\omega \cos(\tau\omega)}{T^2\omega^2 + 1}. \quad (25)$$

Аналогично тому, как это делалось по отношению к параметру T , на основании (25)

можно записать условие существования локального экстремума ВЧХ звена при изменении параметра τ внутри заданного интервала

$$\sin(\tau\omega) = -T\omega \cos(\tau\omega), \quad (26)$$

откуда

$$\tau = -\frac{\arctg(T\omega)}{\omega}. \quad (27)$$

В случае выполнения условия (27) значение ВЧХ будет равно

$$U(\omega) = K \times \frac{\cos(\arctg(T\omega)) - T\omega \sin(\arctg(T\omega))}{T^2\omega^2 + 1}. \quad (28)$$

Найденный локальный экстремум будет являться минимумом при соблюдении неравенств

$$(2k + 1/2)\pi < \tau\omega < (2k + 1)\pi; \quad (29)$$

при условии

$$(2k + 3/2)\pi < \tau\omega < 2(k + 1)\pi, \quad (30)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, рассматриваемый экстремум будет максимумом.

Зависимость указанной характеристики от параметра K является возрастающей при положительных значениях ВЧХ и убывающей — при отрицательных. Таким образом, выбор значений параметра K (с целью подстановки в выражения для нахождения границ ВЧХ) будет определяться знаком функции, на которую умножается данный параметр в этих выражениях. В дальнейшем для удобства анализа зависимости ВЧХ от значений параметров звена сначала рассматривается построение верхней и нижней границ области ее возможного изменения при фиксированной величине ω , варьируемых T и τ , а также при $K=1$.

Затем производится уточнение (определение) величины параметра K , подставляемой в формулы для значений каждой из границ.

На рис. 4 изображена прямоугольная область возможных значений (сочетаний) T и τ , «наложенная» на графическое представление функциональной зависимости между значениями $T\omega$ и $\tau\omega$, которые обеспечивают условия существования локальных экстремумов ВЧХ звена на интервалах изменения T и τ . Вершинам a, b, c и d этой области будут соответствовать сочетания значений переменных $(\tau\omega, \underline{T}\omega)$, $(\bar{\tau}\omega, \underline{T}\omega)$, $(\bar{\tau}\omega, \bar{T}\omega)$ и $(\tau\omega, \bar{T}\omega)$.

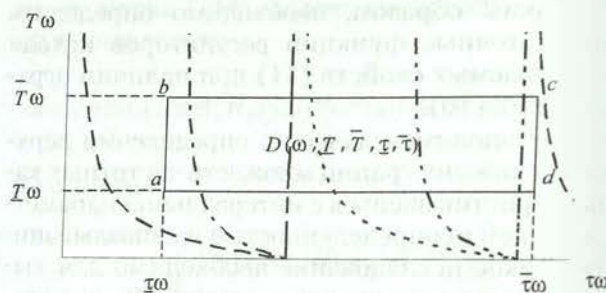


Рис. 4

Из рис. 4 видно, что линии зависимостей, отражающих условия существования локальных экстремумов применительно к различным сочетаниям значений параметров, не пересекаются внутри области D (т. е. там не могут выполняться одновременно условия наличия локальных экстремумов как по параметру T , так и по параметру τ).

Из сказанного следует, что наибольшее и наименьшее из возможных значений ВЧХ интервального звена будут лежать на границах указанной области. Отметим, что присутствующие на рис. 4 линии представляют собой геометрические места точек, соответствующих равенству нулю частной производной по одному из параметров.

Можно показать, что для каждой из рассматриваемых линий при движении в сторону возрастания (убывания) одного из параметров выполняется условие постоянства знака производной по другому параметру. Из проведенного анализа следует, что для линий, соответствующих условиям локальных максимумов, значения ВЧХ будут возрастать, а условиям минимума — уменьшаться в сторону уменьшения параметра T или увеличения τ .

В случае, если линии, соответствующие условиям существования экстремумов, не будут пересекать область D , вдоль ее границ зависимости значений ВЧХ от параметров будут или убывать, или возрастать. Верхняя и нижняя границы ВЧХ будут определяться сочетаниями параметров, имеющими место в точках a, b, c и d . Если на границах области D окажутся точки, в которых будут выполняться условия существования локальных экстремумов по параметру T или τ , граничные значения характеристики могут определяться также указанными точками.

Отметим, что на отрезках $[a, b]$ и $[c, d]$ характер варьирования значений ВЧХ определяется изменением частной производной

этой функции по параметру T , так как параметр τ остается постоянным. А для определения характера изменения значений характеристики на отрезках $[b, c]$ и $[a, d]$ необходимо знать о поведении частной производной по параметру τ . В случае поиска нижней границы ВЧХ звена представляют интерес пересечения области D линиями, соответствующими условиям минимума, а в случае верхней границы — линиями, соответствующими условиям максимума.

В случае пересечения отрезка $[a, b]$ линиями, отражающими условия палигия локального экстремума по параметру T , граничные значения характеристики определяются точками пересечения этих линий с другим отрезком ($[a, d]$ или $[c, d]$).

В ситуациях, когда область D не пересекается линиями, которые отражают условия наличия локальных экстремумов по параметрам, можно найти численные «граничные» значения ВЧХ исследуемого звена при $K = 1$, а затем уточнить, какие именно величины K следует подставить в окончательные выражения. В случае наличия на границах области D точек, задающих соответствующие локальные экстремумы, необходимо использовать наибольшее значение параметра K (а именно \bar{K}).

Проверку выполнения условий наличия локального экстремума на границах области D (на отрезках $[a, d]$ и $[c, d]$) можно производить путем определения знака частных производных в ее вершинах (точках a, c и d). Экстремум будет находиться на отрезке, если производная имеет противоположные знаки на его концах. Знак частных производных по параметрам τ и T будет определяться числителем выражений (18), (25), т. е.

$$\begin{aligned} \text{sign}\left(\frac{\partial}{\partial \tau} U(\omega, \tau, T)\right) &= \\ &= \text{sign}(T\omega \cdot \cos(\tau\omega) + \sin(\tau\omega)); \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sign}\left(\frac{\partial}{\partial T} U(\omega, \tau, T)\right) &= \text{sign}((T^2\omega^2 - 1) \times \\ &\times \sin(\tau\omega) - 2 \cdot T\omega \cos(\tau\omega)). \quad (32) \end{aligned}$$

Как уже отмечалось, ВЧХ является периодической функцией относительно $\tau\omega$. Поэтому на отрезке $[a, d]$ будут находиться локальные экстремумы (и максимум, и минимум), которые и будут определять значения верхней и нижней границ ВЧХ в следующих случаях:

- 1) при выполнении условия $2\pi \leq (\bar{\tau} - \underline{\tau})\omega$;
- 2) при $\pi < (\bar{\tau} - \underline{\tau})\omega < 2\pi$,

а также если знак частной производной по параметру τ будет один и тот же в точках a и d .

В соответствии со сказанным, можно предложить алгоритмы нахождения граничных значений ВЧХ для исследуемого звена (табл. 1, 2).

Таблица 1

Алгоритм определения нижней границы ВЧХ ИИЗЗ

№ п/п	Условия			Значение нижней границы ВЧХ ИИЗЗ, \underline{U}
	$\omega = 0$	усл. 1	усл. 2	
1	да	—	—	\underline{K}
2	нет	да	—	$\underline{K} \cos(\text{arctg}(\underline{T}\omega))$,
3	нет	нет	да	$\underline{U} = \underline{K} \cdot \underline{U}_B$, где $\underline{U}_B = \min\{U_B(\omega, \underline{\tau}, \underline{T}), U_B(\omega, \underline{\tau}, \bar{T}), -\sin^2(\bar{\tau}\omega/2)\}$
4	нет	нет	нет	$\underline{U} = \begin{cases} \underline{K} \cdot \underline{U}_B, & \text{при } \underline{U}_B \leq 0, \\ \underline{K} \cdot \underline{U}_B, & \text{при } \underline{U}_B > 0, \end{cases}$ где $\underline{U}_B = \min\{U_B(\omega, \underline{\tau}, \underline{T}), U_B(\omega, \bar{\tau}, \underline{T}), U_B(\omega, \underline{\tau}, \bar{T}), U_B(\omega, \bar{\tau}, \bar{T})\}$

Примечания:

Условие 1 =

$$= \left\{ (\omega(\bar{\tau} - \underline{\tau}) \geq 2\pi) \cup \left(\frac{\partial}{\partial \tau} U(\omega, \underline{\tau}, \underline{T}) < 0 \cap \right. \right. \\ \left. \left. \cap \frac{\partial}{\partial \tau} U(\omega, \bar{\tau}, \underline{T}) > 0 \right) \cup \left(\frac{\partial}{\partial \tau} U(\omega, \underline{\tau}, \underline{T}) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\partial}{\partial \tau} U(\omega, \bar{\tau}, \underline{T}) > 0 \cap \omega(\bar{\tau} - \underline{\tau}) > \pi \right) \right\};$$

Условие 2 =

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial T} U(\omega, \bar{\tau}, \underline{T}) < 0 \cap \frac{\partial}{\partial T} U(\omega, \bar{\tau}, \bar{T}) > 0 \right\};$$

$$U_B = \frac{\cos(\tau\omega) - T\omega \cdot \sin(\tau\omega)}{T^2\omega^2 + 1}.$$

Таблица 2

Алгоритм определения верхней границы ВЧХ ИИЗЗ

№ п/п	Условия			Значение верхней границы ВЧХ ИИЗЗ, \bar{U}
	$\omega = 0$	усл. 1	усл. 2	
1	да	—	—	\bar{K}
2	нет	да	—	$\bar{K} \cos(\text{arctg}(\underline{T}\omega))$,
3	нет	нет	да	$\bar{U} = \bar{K} \cdot \bar{U}_B$, где $\bar{U}_B = \max\{U_B(\omega, \underline{\tau}, \underline{T}), U_B(\omega, \underline{\tau}, \bar{T}), \cos^2(\bar{\tau}\omega/2)\}$

Окончание табл. 2

№ п/п	Условия			Значение верхней границы ВЧХ ИИЗЗ, \underline{U}
	$\omega = 0$	усл. 1	усл. 2	
4	нет	нет	нет	$\underline{U} = \begin{cases} K \cdot \overline{U}_B, & \text{при } \overline{U}_B \leq 0, \\ K \cdot \underline{U}_B, & \text{при } \overline{U}_B > 0, \end{cases}$ <p>где $\overline{U}_B = \max\{U_B(\omega, \underline{T}, \underline{T}), U_B(\omega, \overline{T}, \underline{T}), U_B(\omega, \underline{T}, \overline{T}), U_B(\omega, \overline{T}, \overline{T})\}$</p>

Примечания:

Условие 1 =

$$= \left\{ \begin{aligned} & (\omega(\overline{T} - \underline{T}) \geq 2\pi) \cup \left(\frac{\partial}{\partial \tau} U(\omega, \underline{T}, \underline{T}) > 0 \cap \right. \\ & \left. \cap \frac{\partial}{\partial \tau} U(\omega, \overline{T}, \underline{T}) < 0 \right) \cup \left(\frac{\partial}{\partial \tau} U(\omega, \underline{T}, \underline{T}) \times \right. \\ & \left. \times \frac{\partial}{\partial \tau} U(\omega, \overline{T}, \underline{T}) > 0 \cap \omega(\overline{T} - \underline{T}) > \pi \right) \end{aligned} \right\};$$

Условие 2 =

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial T} U(\omega, \overline{T}, \underline{T}) > 0 \cap \frac{\partial}{\partial T} U(\omega, \overline{T}, \overline{T}) < 0 \right\};$$

$$U_B = \frac{\cos(\tau\omega) - T\omega \cdot \sin(\tau\omega)}{T^2\omega^2 + 1}.$$

Таблица 3

Выражения, отражающие зависимости значений МЧХ от параметров звена

№ п/п	Характеристика	Выражение
1	Частная производная МЧХ по параметру K	$\frac{\partial}{\partial K} V(\omega) = -\frac{\sin(\tau\omega) + T\omega \cos(\tau\omega)}{T^2\omega^2 + 1}$
2	Частная производная МЧХ по параметру T	$\frac{\partial}{\partial T} V(\omega) = K\omega \times \frac{(T^2\omega^2 - 1)\cos(\tau\omega) + 2T\omega \sin(\tau\omega)}{(T^2\omega^2 + 1)^2}$
3	Условие локального экстремума МЧХ по отношению к параметру T	$T = -\frac{\sin(\tau\omega) \pm 1}{\omega \cos(\tau\omega)}$
4	Частная производная МЧХ по параметру τ	$\frac{\partial}{\partial \tau} V(\omega) = K\omega \frac{T\omega \sin(\tau\omega) - \cos(\tau\omega)}{T^2\omega^2 + 1}$
5	Условие локального экстремума МЧХ по отношению к параметру τ	$\tau = \frac{\text{arccctg}(T\omega)}{\omega}$

МЧХ рассматриваемого динамического звена имеет вид

$$V(\omega) = -K \frac{\sin(\tau\omega) + T\omega \cos(\tau\omega)}{T^2\omega^2 + 1}. \quad (33)$$

Если провести исследование зависимостей значений МЧХ от параметров K , τ и T подобно тому, как это было сделано для ВЧХ, то можно получить информацию, представленную в табл. 3. Анализ этой информации показывает, что зависимости ВЧХ и МЧХ от параметров звена имеют аналогичный характер.

Алгоритмы нахождения граничных значений МЧХ подобны соответствующим алгоритмам для ВЧХ (табл. 4, 5).

Таблица 4

Алгоритм определения нижней границы МЧХ ИИЗЗ

№ п/п	Условия			Значение нижней границы МЧХ ИИЗЗ, \underline{V}
	$\omega = 0$	усл. 1	усл. 2	
1	да	-	-	0
2	нет	да	-	$\overline{K} \sin(\text{arccctg}(T\omega))$,
3	нет	нет	да	$\underline{V} = \overline{K} \cdot \underline{V}_B,$ <p>где $\underline{V}_B = \min\{V_B(\omega, \underline{T}, \underline{T}), V_B(\omega, \underline{T}, \overline{T}), -\sin^2(\overline{T}\omega/2 - \pi/4)\}$</p>
4	нет	нет	нет	$\underline{V} = \begin{cases} \overline{K} \cdot \underline{V}_B, & \text{при } \underline{V}_B \leq 0, \\ \underline{K} \cdot \underline{V}_B, & \text{при } \underline{V}_B > 0, \end{cases}$ <p>где $\underline{V}_B = \min\{V_B(\omega, \underline{T}, \underline{T}), V_B(\omega, \overline{T}, \underline{T}), V_B(\omega, \overline{T}, \overline{T})\}$</p>

Примечания:

Условие 1 =

$$= \left\{ \begin{aligned} & (\omega(\overline{T} - \underline{T}) \geq 2\pi) \cup \left(\frac{\partial}{\partial \tau} V(\omega, \underline{T}, \underline{T}) < 0 \cap \right. \\ & \left. \cap \frac{\partial}{\partial \tau} V(\omega, \overline{T}, \underline{T}) > 0 \right) \cup \left(\frac{\partial}{\partial \tau} V(\omega, \underline{T}, \underline{T}) \times \right. \\ & \left. \times \frac{\partial}{\partial \tau} V(\omega, \overline{T}, \underline{T}) > 0 \cap \omega(\overline{T} - \underline{T}) > \pi \right) \end{aligned} \right\}$$

Условие 2 =

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial T} V(\omega, \overline{T}, \underline{T}) < 0 \cap \frac{\partial}{\partial T} V(\omega, \overline{T}, \overline{T}) > 0 \right\};$$

$$V_B = -\frac{\sin(\tau\omega) + T\omega \cos(\tau\omega)}{T^2\omega^2 + 1}.$$

Таблица 5

Алгоритм определения верхней границы МЧХ ИИЗЗ

№ п/п	Условия			Значение верхней границы МЧХ ИИЗЗ, \underline{V}
	$\omega = 0$	усл. 1	усл. 2	
1	да	-	-	0
2	нет	да	-	$\overline{K} \sin(\text{arctg}(T\omega))$,
3	нет	нет	да	$\overline{V} = \overline{K} \cdot \overline{V}_B$, где $\overline{V}_B = \max\{V_B(\omega, \underline{T}, \underline{T}), V_B(\omega, \underline{T}, \overline{T}), \cos^2(\overline{\tau}\omega/2)\}$
4	нет	нет	нет	$\overline{V} = \begin{cases} \overline{K} \cdot \overline{V}_B, & \text{при } \overline{V}_B \leq 0, \\ \overline{K} \cdot \overline{V}_B, & \text{при } \overline{V}_B > 0, \end{cases}$ где $\overline{V}_B = \max\{V_B(\omega, \underline{T}, \underline{T}), V_B(\omega, \overline{\tau}, \underline{T}), V_B(\omega, \underline{T}, \overline{T}), V_B(\omega, \overline{\tau}, \overline{T})\}$

Примечания:

Условие 1 =

$$= \left\{ \begin{aligned} & (\omega(\overline{\tau} - \underline{T}) \geq 2\pi) \cup \left(\frac{\partial}{\partial \tau} V(\omega, \underline{T}, \underline{T}) > 0 \cap \right. \\ & \left. \cap \frac{\partial}{\partial \tau} V(\omega, \overline{\tau}, \underline{T}) < 0 \right) \cup \left(\frac{\partial}{\partial \tau} V(\omega, \underline{T}, \underline{T}) \times \right. \\ & \left. \times \frac{\partial}{\partial \tau} V(\omega, \overline{\tau}, \underline{T}) > 0 \cap \omega(\overline{\tau} - \underline{T}) > \pi \right) \end{aligned} \right\};$$

Условие 2 =

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial T} V(\omega, \overline{\tau}, \underline{T}) > 0 \cap \frac{\partial}{\partial T} V(\omega, \overline{\tau}, \overline{T}) < 0 \right\};$$

$$V_B = -\frac{\sin(\tau\omega) + T\omega \cos(\tau\omega)}{T^2\omega^2 + 1}.$$

Полученные таким образом соотношения составляют основу реализуемой процедуры синтеза.

ПРИМЕР

Рассмотрим особенности применения предложенного подхода к построению управляющей части системы для объекта с запаздыванием и интервальной параметрической неопределенностью, используя числовые значения из табл. 6.

Ориентируясь на:

1) обеспечение в САУ нулевой статической ошибки;

2) введение в управляющую часть такого количества параметров, которого оказалось бы достаточно для одновременного задания расположения корней варьируемой части характеристического полинома системы (при условии компенсации влияния слагаемых, содержащих запаздывание) и для минимизации меры влияния этих слагаемых (последняя, как указывалось, формируется в частотной области);

3) реализацию принципа минимальной сложности (здесь он выражается в выборе минимально допустимой суммы порядков передаточных функций регуляторов), запишем $R_1(s)$ и $R_2(s)$ как

$$R_1(s) = K_1 \frac{T_1 s + 1}{s}; \quad R_2(s) = \frac{\tau_1 s + 1}{\tau_2 s + 1}, \quad (34)$$

где K_1, T_1, τ_1, τ_2 — неизвестные по величине параметры.

Таблица 6

Значения параметров объекта и модели

№ п/п	Элемент системы	Параметр	
		Обозначение	Значение
1	Объект управления	\underline{T}	0.4
2		\overline{T}	0.6
3	$H(s)e^{-\tau s} = \frac{K}{Ts+1}e^{-\tau s}$	\underline{K}	0.4
4		\overline{K}	0.6
5		$\underline{\tau}$	0.4
6		$\overline{\tau}$	0.6
7	Модель объекта управления	K_M	0.5
8	$H_M(s)e^{-\tau_M s} = \frac{K_M}{T_M s + 1}e^{-\tau_M s}$	T_M	0.5
9		τ_M	0.5

С учетом вышесказанного можно конкретизировать запись характеристического уравнения системы с передаточной функцией (11) (при условии компенсации его слагаемых, содержащих запаздывание):

$$D(s) = (Ts + 1)(T_M \tau_2 s^3 + (T_M + \tau_2 + K_M K_1 T_1 \tau_1) s^2 + (K_M K_1 \times (T_1 + \tau_1) + 1) s + K_M K_1) = 0. \quad (35)$$

Варьируемая часть полинома $D(s)$, а именно — $C(s) = D(s)/(Ts + 1)$, зависит от значений параметров регуляторов:

$$C(s) = c_0 s^3 + c_1 s^2 + c_2 s + c_3 = 0, \quad (36)$$

где $c_0 = T_M \cdot \tau_2, c_1 = T_M + \tau_2 + K_M K_1 T_1 \tau_1, c_2 = K_M K_1 (T_1 + \tau_1) + 1, c_3 = K_M K_1$.

Уравнение третьей степени может быть исследовано с точки зрения влияния корней (и значений коэффициентов) на устойчивость и другие свойства системы с помощью известного подхода Вышнеградского [4].

С этой целью приведем уравнение (36) к нормированному виду: разделим все члены на c_3 и введем новую переменную

$$q = s \cdot \sqrt[3]{\frac{c_0}{c_3}} = \frac{s}{\Omega_0}. \quad (37)$$

В результате получим нормированное уравнение

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0, \quad (38)$$

коэффициенты которого

$$A = \frac{c_1 \Omega_0^2}{c_3} = \frac{c_1}{\sqrt[3]{c_0^2 c_3}},$$

$$B = \frac{c_2 \Omega_0}{c_3} = \frac{c_2}{\sqrt[3]{c_0 c_3^2}},$$

как известно, называются параметрами Вышнеградского.

Условие устойчивости системы будет описываться соотношениями

$$A > 0, B > 0, A \cdot B > 1. \quad (39)$$

Наличие в решении колебательной составляющей определяется знаком дискриминанта D_1 указанного кубического уравнения, т. е.

$$D_1 = A^2 B^2 - 4(A^3 + B^3) + 18AB - 27. \quad (40)$$

Для анализа степени устойчивости системы, описываемой уравнением (38), подставим в него $q = z - \eta$, в результате получим смещенное уравнение

$$C_0 z^3 + C_1 z^2 + C_2 z + C_3 = 0, \quad (41)$$

где $C_0 = c_0, C_1 = -3c_0\eta + c_1, C_2 = 3c_0\eta^2 - 2c_1\eta + c_2, C_3 = -c_0\eta^3 + c_1\eta^2 - c_2\eta + c_3$.

Применяя к смещенному характеристическому полиному (41) любой критерий устойчивости, например, критерий Гурвица, который здесь представлен неравенствами $C_1 > 0, C_2 > 0, C_0 > 0, C_3 > 0, C_1 C_2 > C_0 C_3$, можно определить, обладает ли система заданной степенью устойчивости.

Наконец, надо принять во внимание соотношение (10), позволяющее ввести в заданные пределы влияние запаздывания на динамические свойства САУ.

Исходя из вышеотмеченных соображений, а также результатов рассмотрения ряда альтернатив, удовлетворяющих сформированным неравенствам, были выбраны определенные значения параметров регуляторов (табл. 7).

Таблица 7

Параметры регуляторов системы управления объектом с запаздыванием при наличии интервальной параметрической неопределенности в модели объекта

№ п/п	Элемент системы	Параметр	
		Обозначение	Значение
1	Регулятор 1	K_1	3,5
2		T_1	0,2
3	Регулятор 2	τ_1	0,15
4		τ_2	0,1

На рис. 5 показана структурная схема системы, при замене операторов которой дифференциальными уравнениями была получена ее исследуемая модель. Реализация исследования предполагает интегрирование дифференциальных уравнений САУ численным методом.

Была рассмотрена отработка системой управления ступенчатых воздействий для нескольких сочетаний значений (в том числе, и граничных) параметров объекта. Выполненное моделирование позволило оценить работоспособность системы при изменении параметров объекта внутри заданных интервалов (табл. 8). Полученные процессы, соответствующие этим значениям параметров, приведены на рис. 6, где «ряды» указывают на номер сочетания величин из табл. 8.

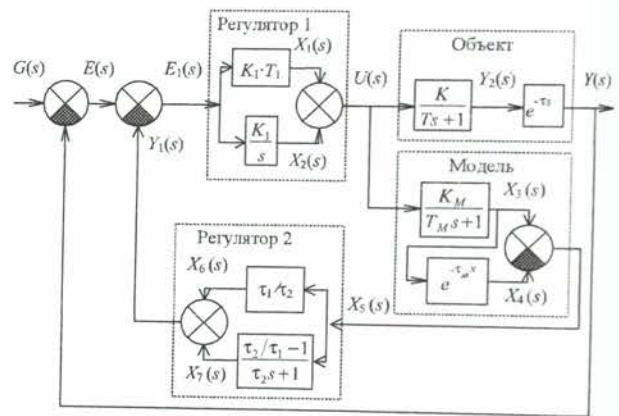


Рис. 5

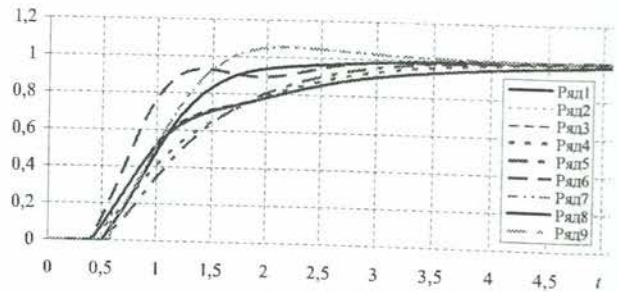


Рис. 6

Таблица 8
Сочетания значений параметров объекта управления, использованные в процессе моделирования («ряды» 1–9 на рис. 6)

№	K	T	τ
1	0,5	0,5	0,5
2	0,4	0,4	0,4
3	0,4	0,4	0,6
4	0,4	0,6	0,4
5	0,4	0,6	0,6
6	0,6	0,4	0,4
7	0,6	0,4	0,6
8	0,6	0,6	0,4
9	0,6	0,6	0,6

Как следует из результатов моделирования, предложенная система управления объектом с запаздыванием работоспособна и обладает следующими показателями качества регулирования: максимальное время регулирования (попадания в 5%-й диапазон точности) $t_{\sigma} = 3,85$ с, максимальное перерегулирование $\sigma = 5,5$ %.

Следует отметить, что данные значения показателей получены для случая, когда разность между граничными и средним значениями параметров объекта управления в интервале их изменения составляет 20 % (табл. 7, 8).

В заключение укажем еще на одну специфическую область применения полученных результатов при синтезе и анализе САУ СУДА. Эта область характерна тем, что всем указанным системам в случае их цифровой реализации свойственно запаздывание, вносимое в процесс выполнения управляющего алгоритма за счет конечной величины шага дискретизации, а также времени, затрачиваемого на операции ввода-вывода информации. При этом задержка передачи или обработки сигналов в зависимости от текущего состояния вычислительного процесса может существенно меняться, что в свою очередь позволяет рассматривать значение эквивалентного запаздывания как неопределенную (интервальную) величину. Предложенный в данной статье подход создает предпосылки для определения влияния данного типа неопределенности на свойства САУ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен подход к анализу и синтезу систем управления при наличии запаздывания и параметрической неопределенности в модели объекта. Подход основан на предварительном определении границ для множеств значений частотных характеристик объекта и системы при разнообразных сочетаниях неизвестных параметров. Показано, что в рамках структур с двумя степенями свободы можно добиться приемлемого уровня качества управления во всем диапазоне значений варьируемых параметров объекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шевяков, А. А.** Инженерные методы расчета динамики теплообменных аппаратов / А. А. Шевяков, Р. В. Яковлева. М.: Машиностроение, 1984. 320 с.
2. **Гурецкий, Х.** Анализ и синтез систем управления с запаздыванием / Х. Гурецкий. М.: Машиностроение, 1974. 328 с.
3. **Горовиц, А. М.** Синтез систем с обратной связью / А. М. Горовиц. М.: Сов. Радио, 1970. 600 с.
4. **Бесекерский, В. А.** Теория систем автоматического управления: учеб. пособие / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. СПб.: Профессional, 2004. 752 с.

ОБ АВТОРАХ



Ахмеджанов Фарит Маратович, доц. каф. пром. электроники. Дипл. инж. электрон. техники (УГАТУ, 1992). Канд. техн. наук в обл. упр. в техн. системах (УГАТУ, 1996). Иссл. в обл. систем упр. объектами с параметр. неопределенностью.



Крымский Виктор Григорьевич, проф. той же кафедры. Дипл. инж. по пром. электронике (УАИ, 1973). Д-р техн. наук по упр. в техн. системах (УГАТУ, 1997). Иссл. в обл. упр. сложн. системами в условиях неопределенности, анализа техногенного риска.



Кудаяров Рустем Ахкамудинович, доц. той же каф. Дипл. инж. электрон. техники (УАИ, 1988). Канд. техн. наук в обл. упр. в техн. системах (УГАТУ, 1996). Иссл. в обл. сложн. систем управл. и техн. диагностики.