Уфа: УГАТУ, 2005 *Вестник УГАТУ* Т. 6, № 1 (12). С. 33–40

УДК 519.21,517.51

Ф. С. НАСЫРОВ

ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА ИТО И ПОТРАЕКТОРНЫЕ ИТОВСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

С помощью техники расширенных симметричных интегралов типа Стильтьеса по произвольной непрерывной функции, обладающей совместно непрерывным локальным временем, которые в случае винеровского процесса можно рассматривать как несобственные стохастические интегралы Стратоновича, доказывается обобщенная формула Ито как формула, устанавливающая связь между стохастическим интегралом Ито и потраекторным расширенным симметричным интегралом. Это дает возможность построить интегралы итовского типа по определенному классу детерминированных непрерывных функций неограниченной вариации и по широкому классу случайных процессов, которые не являются мартингалами, без предположений предсказуемости интеграндов. *Вполне регулярная функция; локальное время; винеровский процесс; симметричный интеграл; расширенный симметричный интеграл; стохастический интеграл Стратоновича; стохастический интеграл Ито; детерминированный интеграл Ито*

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что интеграл Ито лежит в основе современного стохастического исчисления, и поэтому его максимально возможное обобщение является важной задачей теории случайных процессов. Одним из ключевых инструментов стохастического исчисления является формула Ито, которую можно рассматривать как формулу, которая связывает стохастические интегралы Стратоновича и Ито. Одно из последних принципиально важных обобщений формулы Ито приведено в работе А. Н. *Ширяева* и его соавторов [12], там же изложена и история этого вопроса.

Поскольку класс возможных интеграндов для интеграла Стратоновича, по сравнению с интегралом Ито, достаточно узок, то возникает соблазн попытаться расширить его с помощью предельных переходов, т. е. рассматривать несобственные интегралы Стратоновича. В работах автора [6, 9] эту задачу удалось решить в более общей форме и построить симметричные интегралы типа Стильтьеса по произвольной непрерывной функции, в частности, и по траекториям винеровского процесса, в этом случае мы приходим к детерминированному аналогу стохастического интеграла Стратоновича. К сожалению, класс интеграндов для симметричного интеграла оказался тоже достаточно узок, тем не менее удалось построить с помощью предельных переходов расширенный симметричный интеграл как интеграл по заряду (знакопеременной мере), который является несобственным симметричным интегралом.

Настоящую статью можно считать продолжением работ [6–9], в ней с помощью разработанной в этих работах техники доказывается обобщенная формула Ито для непрерывных слева предсказуемых интеграндов. Это позволяет обсуждать вопрос о построении не стохастического, а потраекторного варианта интегралов Ито уже без предположений о предсказуемости интеграндов и выделить условия существования такого интеграла. Отметим, что, по-видимому, впервые детерминированный вариант интеграла Ито для определенного класса интеграндов был построен в работе Фелмера [11].

Особенностью данной работы является тот факт, что в ней почти не используются мартингальные методы, вместо этого применяется техника теории функций. В данном разделе приводятся необходимые обозначения и сведения из теории локальных времен и симметричных интегралов, в п. 1 приведены основные результаты работы.

Введем необходимые обозначения. Множества $R = (-\infty, +\infty)$, $[0, t]$, $t > 0$, предполагаются наделенными σ-алгебрами борелев-

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 04-01-00286а, 05-01-97909

ских множеств, которые соответственно обозначаются B, B_t, $t > 0$; на этих подмножествах считается заданной мера Лебега $\lambda(.)$. Для непрерывной функции $X(s)$, $s \in [0, +\infty)$, положим

$$M(t) = \max\{X(s) : s \in [0, t]\},$$
$$m(t) = \min\{X(s) : s \in [0, t]\},$$
$$M(t_1, t_2) = \max\{X(s) : s \in [t_1, t_2]\},$$
$$m(t_1, t_2) = \min\{X(s) : s \in [t_1, t_2]\}.$$

Обозначим через $\operatorname{sgn}(x)$ знак вещественного числа x, а $\mathbf{1}(A)$ пусть обозначает индикатор множества A, т.е. функцию, равную 1 на A и 0 вне A; далее всюду $a \wedge b = \min(a, b)$, $a \vee b = \max(a, b)$, $\kappa(v, A, B) = \operatorname{sgn}(B - A)\, \mathbf{1}(A \wedge B < v < A \vee B)$.

Приведем некоторые сведения о симметричных интегралах и связанных с ними конструкциях.

1. Пусть $X(s)$, $s \in [0, 1]$ — борелевская вещественнозначная функция, $\tau(\cdot)$ — мера на σ-алгебре B_1 борелевских множеств отрезка $[0, 1]$. Введем меры $\nu_T(\Gamma) = \int_T \mathbf{1}(X(s) \in \Gamma)\tau(ds)$, $\Gamma \in B$, $T \subset [0, 1]$, тогда $\nu_T(\Gamma)$ есть «количество времени», проводимое функцией $X(s)$, $s \in T$, в множестве Γ. Производная Радона–Никодима $\alpha_\tau(T, u) \equiv \alpha_T(u) = \frac{d\nu_T}{d\lambda}(u)$, $u \in R$, если она существует, называется *локальным временем* функции $X(s)$. Оказывается (см. [13]), можно всегда считать, что локальное время $\alpha_\tau(t, u) = \alpha_\tau([0, t], u)$ измеримо как функция двух переменных и является при каждом u неубывающей непрерывной справа функцией по t; меру на B_1, которую она порождает, мы будем обозначать $\alpha_\tau(ds, u)$.

Из определения локального времени следует (см. [13]), что для любой ограниченной (или знакопостоянной) борелевской функции $f(s, u)$ справедливо равенство

$$\int_0^t f(s, X(s))\tau(ds) = \int_R \int_0^t f(s, u)\alpha_\tau(ds, u)\, du. \qquad \text{(B.1)}$$

Говорят, что случайный процесс обладает локальным временем, если почти все его траектории имеют локальное время. В случае, когда $\tau(ds) = ds$, положим $\alpha_\tau(t, u) \equiv \alpha(t, u)$. Ряд общих сведений о локальных временах детерминированных функций и случайных процессов приведен в работах [1, 2, 4–6, 8–10, 13].

2. Назовем (см. [9]) непрерывную функцию $X(s)$, $s \in [0, 1]$ с локальным временем $\alpha(t, u)$ *вполне регулярной*, если для любого отрезка $[t_1, t_2]$ справедливо равенство $\int_{m(t_1,t_2)}^{M(t_1,t_2)} \mathbf{1}(\alpha([t_1, t_2], u) = 0)\, du = 0$. Можно показать (см. [4]), что типичная траектория винеровского процесса вполне регулярна. Ряд сведений о вполне регулярных функциях можно найти в работе [8].

3. Будем говорить, что пара функций $X(s)$, $s \in [0, 1]$, и $f(s, u)$, $s \in [0, 1]$, $u \in R$, удовлетворяет *условию* (S) *на* $[0, t]$, $t \in [0, 1]$, если:

(a) функция $X(s)$, $s \in [0, t]$, непрерывна;

(b) при п. в. u функция $f(s, u)$, $s \in [0, t]$, имеет ограниченное изменение и непрерывна справа по $s \in [0, t]$;

(c) при п. в. u справедливо равенство $\int_0^t \mathbf{1}(X(s) = u)|f|(ds, u) = 0$, где при каждом u функция $|f|(s, u)$ есть полное изменение функции $f(\tau, u)$ по переменной τ на отрезке $[0, s]$;

(d) полное изменение $|f|(t, u)$ функции $f(s, u)$ по переменной s на отрезке $[0, t]$ локально суммируемо по u.

4. Пусть функции $X(s)$ и $f(s, u)$ удовлетворяют условию (S) на отрезке $[0, t]$. Рассмотрим разбиения T_n, $n \in N$, отрезка $[0, t]$: $T_n = \{t_k^{(n)}\}$, $0 = t_0^{(n)} \leqslant t_1^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant t_k^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant t_{m_n}^{(n)} = t$, $n \in N$, такие, что $T_n \subset T_{n+1}$, $n \in N$, и $\lambda_n = \max_k \left| t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)} \right| \to 0$ при $n \to \infty$. Через $X^{(n)}(s)$, $s \in [0, t]$, обозначим ломаную, построенную по функции $X(s)$ и отвечающую разбиению T_n. Введем следующие обозначения: $\Delta t_k^{(n)} = t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}$, $\left[\Delta t_k^{(n)}\right] = \left[t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}\right]$, $\Delta X_k^{(n)} = X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)})$.

Симметричным интегралом (см. [6, 9]) называется

$$\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s) = \lim_{n \to \infty} \sum_k \frac{1}{\Delta t_k^{(n)}} \int_{[\Delta t_k^{(n)}]} f(s, X^{(n)}(s))\, ds\, \Delta X_k^{(n)},$$

если предел в правой части равенства существует и не зависит от выбора последовательности разбиений T_n, $n \in N$. Симметричный интеграл в случае винеровского процесса $X(s)$ является (см. [6]) детерминированным аналогом стохастического интеграла Стратоновича.

5. Пусть функции $X(s)$ и $f(s, u)$ удовлетворяют условию (S) на $[0, t]$, тогда симметричный интеграл $\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s)$ может

быть вычислен по формуле

$$\int_0^t f(s,X(s))*dX(s) = \int_{X(0)}^{X(t)} f(t,v)\,dv - \int_{m(t)}^{M(t)}\int_0^t \kappa(v,X(0),X(\tau))f(d\tau,v)\,dv. \quad (B.2)$$

В случае, когда $X(s) = X(s,\omega)$ — стандартный винеровский процесс, а детерминированная функция $h(s,u)$ имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial}{\partial u}h(s,u)$, *формулу Ито* можно записать в виде

$$\int_0^t h(s,X(s))*dX(s) = \int_0^t h(s,X(s))\,dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial}{\partial u}h(s,X(s))\,ds,$$

где первое слагаемое в правой части равенства есть стохастический интеграл Ито.

6. Пусть $X(s), s \in [0,t]$ — непрерывная функция с локальным временем $\alpha(s,u)$, а $f(s)$, $s \in [0,t]$ — суммируемая функция. С функцией $f(s)$ можно связать некоторые специальным образом построенные функции, зависящие только от функций $X(s)$ и $\xi(s) = \alpha(s,X(s))$ и эквивалентные ей по мере Лебега, например,

$$f(s) = f^+{}_t(\xi(s),X(s)) \quad (B.3)$$

при п.в. $s \in [0,t]$, где $f^+{}_t(x,u) = f(\gamma(x,u))\mathbf{1}(\alpha(t,u) \geqslant x)$, $\gamma(x,u) = \inf\{s : \alpha(s,u) > x\}$. Функция $f^+{}_t(x,u)$, так же как и функция $f^+{}_t(\xi(s),X(s))$, называется *представлением функции* $f(s)$ на отрезке $[0,t]$. Другое представление функции $f(s)$ может быть получено с помощью непрерывного слева варианта функции $\gamma^*(z,u) = \inf\{s : \alpha(s,u) \geqslant z\}$, оно имеет вид $f_t^*(x,u) = f(\gamma^*(x,u))\mathbf{1}(\alpha(t,u) \geqslant x)$. Комбинируя эти два представления, можно получить другие различные представления функции $f(s)$.

Пусть $X(s)$, $s \in [0,+\infty)$ — непрерывная функция с совместно непрерывным локальным временем $\alpha(t,u)$. *Расширенным симметричным интегралом* называется (см. [6,9]) интеграл по специальным образом построенному заряду по одному из представлений функции $f(s)$, например:

$$(E)\int_0^t f^+{}_t(\xi(s),X(s))*dX(s) \equiv \equiv \int_{R^+\times R} f_t^+(x,u)G_t(dx\,du),$$

где $G_t(dx\,du)$ — заряд, однозначно определяющийся своими значениями на «прямоугольниках» $A \times B$:

$$G_t(A\times B) \equiv \equiv \int_{X(0)}^{X(t)} \mathbf{1}\left((\alpha(t,u),u) \in A\times B\right)du - \frac{1}{2}\int_R \mathbf{1}\left((\alpha(t,u),u) \in (A\setminus\{0\})\times B\right) \times \operatorname{sgn}(u-X(0))du + \frac{1}{2}\int_R \mathbf{1}(u\in B, \alpha(t,u)>0) \times \operatorname{sgn}(u-X(0))du\,\mathbf{1}(0\in A).$$

Расширенный симметричный интеграл может быть вычислен по формуле

$$\int_{R^+\times R} f(x,u)G_t(dx\,du) = \int_{X(0)}^{X(t)} f(\alpha(t,u),u)\,du - \frac{1}{2}\int_{m(t)}^{M(t)} [f(\alpha(t,u),u) - f(0,u)] \times \operatorname{sgn}(u-X(0))\,du. \quad (B.4)$$

Таким образом, расширенный симметричный интеграл строится для определенного класса интеграндов вида $f(\xi(s),X(s))$ и приведенные выше представления показывают, что класс интеграндов достаточно широк в том смысле, что для каждой суммируемой на $[0,t]$ функции $f(s)$ существуют различные представления, для которых расширенный симметричный интеграл может быть определен. Вообще говоря, расширенный симметричный интеграл зависит от представления функции, но, с другой стороны, можно показать, что расширенный симметричный интеграл для определенного класса интеграндов есть несобственный симметричный интеграл, т.е. представляется в виде предела симметричных интегралов и это обстоятельство существенно используется в данной работе.

В работе ([6]) автором рассматривались только представления вида (B.3), построенные с помощью функции $\gamma(x,u)$, и автор не подозревал, что существуют другие представления, построенные с помощью комбинаций функций $\gamma(x,u)$ и $\gamma^*(x,u)$. С точки зрения стохастического анализа основным недостатком представления (В.3) является тот факт, что в случае предсказуемой функции $f(s) = f(s,\omega)$ представление $f^+{}_t(\xi(s),X(s))$ уже таковым не будет.

1. СТОХАСТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ ИТО И ЕГО ОБОБЩЕНИЯ

Пусть на полном вероятностном пространстве (Ω,F,P) фиксирован, если не оговорено противное, стандартный винеровский процесс $X(s)$, $s\in[0,1]$. Предполагается, что процесс $X(s)$, $s\in[0,1]$, обладает локальным временем $\alpha(t,u)$, $t\in[0,1]$, $u\in R$, совместно непрерывным с вероятностью 1 по переменным (t,u). Обозначим через F_t σ-алгебру, порожденную случайными величинами $X(s)$, $s\in[0,t]$.

В дальнейшем в этом параграфе, как правило, мы будем опускать слова «с вероятностью 1», «почти наверное», считая, что имеем дело с типичной траекторией винеровского процесса.

Нам будут необходимы следующие вспомогательные утверждения:

Лемма 1. *Пусть $g(t)$, $t\in[0,1]$ — предсказуемая абсолютно непрерывная функция, тогда при любом v функция $g(t,v) = g(\gamma^*(\alpha(t,v),v))$, где $\gamma^*(x,v) = \inf\{s : \alpha(s,v)=x\}$, предсказуема.*

Доказательство. Поскольку $g(t,v) = \int_0^{\gamma^*(\alpha(t,v),v)} g'(\tau)\,d\tau + g(0)$, то достаточно проверить, что интеграл в правой части представляет собой предсказуемую функцию. Заметим, что поскольку $\gamma^*(\alpha(t,v),v)\leqslant t$, то $\gamma^*(\alpha(t,v),v)=\int_0^t \mathbf{1}\,(\alpha(s,v)<\alpha(t,v))\,ds$. Положим

$$b(\tau,t,v)=\int_0^\tau \mathbf{1}\,(\alpha(s,v)<\alpha(t,v))\,ds,\ \tau\in[0,t],$$

тогда в силу формулы замены переменных имеем

$$\int_0^{\gamma^*(\alpha(t,v),v))} g'(s)\,ds=\int_0^{b(t,t,v)} g'(s)\,ds= =\int_0^t g'(b(\tau,t,v))\,\mathbf{1}(\alpha(\tau,v)<\alpha(t,v))\,d\tau.$$

Покажем, что подынтегральное выражение в правой части представляет собой F_t-измеримую функцию. Заметим, что неравенство $\alpha(\tau,v)<\alpha(t,v)$ равносильно неравенству $\alpha([\tau,t],v)>0$, а это событие F_t-измеримо. Далее, так как $b(\tau,t,v) = \int_0^\tau \mathbf{1}(\alpha(s,v)<\alpha(t,v))\,ds$, то последняя функция F_t-измерима. Поскольку сужение функции $(s,\omega)\to g'(s,\omega)$, где $s\in[0,t]$, есть $B([0,t])\times F_t$-измеримая функция, то при $\tau\in[0,t]$ функция $g'(b(\tau,t,v))$ F_t-измерима. Итак, функция $g(t,v)$ непрерывна слева и F_t-измерима, $g(0,v)=g(0)$ при каждом v, значит, она предсказуема.

Лемма 2. *Пусть $X(s)$, $s\in[0,1]$ — непрерывная вполне регулярная функция с непрерывным по s при п. в. u локальным временем $\alpha(s,u)$. Тогда при каждом t функции $m(p,t)$ и $M(p,t)$ сингулярны и справедливо равенство*

$$\int_{R^+\times R} g(\gamma^*(x,u))G_t(dx\,du) = =\int_0^t\Big\{f(\tau)\kappa\big(X(\tau),X(0),X(t)\big)- -\frac{1}{2}[f(\tau)-f(0)]\mathrm{sgn}\,(X(\tau)-X(0))\Big\}D_t(d\tau),$$

где $D_t(\tau)\equiv\int_{m(t)}^{M(t)}\mathbf{1}\,(\gamma^*(\alpha(t,u),u)\leq\tau)\,du = M(t)-M(\tau,t)-(m(t)-m(\tau,t))$.

Доказательство. Покажем, что функции $M(p,t)$ и $m(p,t)$ сингулярны. В силу непрерывности функции $X(s)$ они непрерывны, предположим, например, что при некотором t разложение Лебега (см. [3]) функции $m(p,t)$, $p\in[0,t]$ содержит нетривиальную абсолютно непрерывную компоненту. Поскольку функция $m(p,t)$ растет только в тех точках p, в которых $X(p)=m(p,t)$, то функция $X(p)$ должна совпадать на множестве положительной меры с монотонной функцией $m(p,t)$, что невозможно, поскольку (см. [13]) для функций с непрерывным по s при п. в. u локальным временем $\alpha(s,u)$ аппроксимативные производные $X'_{ap}(s)$ при п. в. s бесконечны.

Далее, ввиду формулы (В.4) и того факта (см. [5]), что при п. в. u справедливо равенство $u=X(\gamma^*(\alpha(t,u)))$, согласно теореме о замене переменных в интеграле Лебега и вполне регулярности функции $X(s)$, получим

$$\int_{R^+\times R} f_t^+(x,u)G_t(dx\,du) = =\int_0^t\Big\{f(\tau)\kappa\big(X(\tau),X(0),X(t)\big)- -\frac{1}{2}[f(\tau)-f(0)]\,\mathrm{sgn}\,(X(\tau)-X(0))\Big\}D_t(d\tau).$$

С другой стороны, в силу определения функции $\gamma^*(x,u)$ и монотонности локального времени $\alpha(t,u)$ по временному параметру неравенство $\gamma^*(\alpha(t,u),u) \leqslant \tau$ равносильно соотношению $\alpha([\tau,t],u) = 0$. Тогда ввиду вполне регулярности функции $X(s)$ имеем $D_t(\tau) = M(t) - M(\tau,t) - (m(t) - m(\tau,t))$.

Теорема 1. *Пусть $X(s)$, $s \in [0,1]$, — стандартный винеровский процесс, $g(p)$, $p \in [0,1]$ — произвольная непрерывная слева предсказуемая функция, для которой конечен стохастический интеграл Ито $\int_0^t g(p)\,dX(p)$. Тогда справедлива формула*

$$\int_0^t g(p)\,dX(p) = \int_0^t \Big\{ g(p)\kappa\big(X(p),X(0),X(t)\big) - \frac{1}{2}[g(p)) - g(0)]\,\mathrm{sgn}\,\big(X(p)-X(0)\big)\Big\} D_t(dp) - \lim_{m\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{2\varepsilon}[g_m(p,X(p)+\varepsilon) - g_m(p,X(p)-\varepsilon)]\,dp, \quad (1.1)$$

где $g_m(s,u) = g(s,u)\,\mathbf{1}\,(g(s,u) \leqslant m)$, $g(s,v) = g(\gamma^*(\alpha(s,v),v))$, а оба предела в правой части формулы (1.1) есть пределы по вероятности и они заведомо существуют.

Доказательство. Разобьем на шаги.

Шаг 1. Рассмотрим формулу Танаки (см. [1, 10]), левую часть которой можно записать в виде симметричного интеграла

$$\int_0^t \mathbf{1}\,(X(s) > v) * dX(s) = \int_0^t \mathbf{1}(X(s) > v)\,dX(s) + \frac{1}{2}\alpha(t,v). \quad (1.2)$$

Отметим, что формула (1.2) справедлива для почти всех реализаций процесса $X(s)$ и любых $t \in [0,0]$, $v \in R$. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ из формулы (1.2) получим

$$\int_0^t \mathbf{1}\,(|X(s)-v| < \varepsilon) * dX(s) = \int_0^t \mathbf{1}(|X(s)-v| < \varepsilon)\,dX(s) + \frac{1}{2}[\alpha(t,v-\varepsilon) - \alpha(t,v+\varepsilon)]. \quad (1.3)$$

Шаг 2. Пусть $g(s)$, $s \in [0,1]$, $g(s) = 0$ — ограниченная неубывающая абсолютно непрерывная предсказуемая функция, тогда в силу монотонности функции $g(s)$ и определения симметричного интеграла для любого $x \geqslant 0$ справедливы тождества

$$\mathbf{1}\,(g(t) \leqslant x)\left(\int_0^t \mathbf{1}(|X(s)-v| < \varepsilon) * dX(s) - \int_0^t \mathbf{1}(|X(s)-v| < \varepsilon, g(s) \leqslant x) * dX(s)\right) = 0,$$

$$\mathbf{1}(g(t) \leqslant x) \times \left(\alpha(t,v) - \int_0^t \mathbf{1}\,(g(s) \leq x)\alpha(ds,v)\right) = 0.$$

Отметим (см. [2]), что стохастический интеграл Ито можно рассматривать как предел с вероятностью 1 соответствующих ему частичных сумм, если шаг разбиения стремится к нулю с достаточно большой скоростью. Поэтому

$$\mathbf{1}\,(g(t) \leq x)\left(\int_0^t \mathbf{1}(|X(s)-v| < \varepsilon)\,dX(s) - \int_0^t \mathbf{1}(|X(s)-v| < \varepsilon, g(s) \leq x)\,dX(s)\right) = 0.$$

Следовательно, в силу формулы (1.3) имеем

$$\mathbf{1}\,(g(t) \leqslant x) \times \left(\int_0^t \mathbf{1}\,(|X(s)-v| < \varepsilon, g(s) \leqslant x) * dX(s) - \int_0^t \mathbf{1}\,(|X(s)-v| < \varepsilon, g(s) \leqslant x)\,dX(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{1}\,(g(s) \leqslant x) \times [\alpha(ds,v-\varepsilon) - \alpha(ds,v+\varepsilon)]\right) = 0. \quad (1.4)$$

Пусть $t^* = t^*(x) = \min\{s : g(s) = x\}$ — марковский момент, умножим обе части формулы (1.3) на $\mathbf{1}\,(g(t) > x)$ и положим $t = t^*$ в этой формуле, тогда ввиду свойств марковских моментов, стохастических интегралов Ито и определения симметричного интеграла получим

$$\mathbf{1}\,(g(t) > x) \times \left(\int_0^t \mathbf{1}\,(|X(s)-v| < \varepsilon, g(s) \leqslant x) * dX(s) - \int_0^t \mathbf{1}\,(|X(s)-v| < \varepsilon, g(s) \leqslant x)\,dX(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{1}\,(g(s) \leqslant x) \times \Big[\alpha(ds,v-\varepsilon) - \alpha(ds,v+\varepsilon)\Big]\right) = 0. \quad (1.5)$$

Сложив формулы (1.4) и (1.5), имеем:

$$\int_0^t \mathbf{1}\,(|X(s)-v|<\varepsilon, g(s)\leqslant x) * dX(s) -$$
$$-\int_0^t \mathbf{1}(|X(s)-v|<\varepsilon, g(s)\leqslant x)\, dX(s) -$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{1}\,(g(s)\leqslant x)[\alpha(ds,v-\varepsilon)-\alpha(ds,v+\varepsilon)] = 0.$$

Вычитая из формулы (1.3) последнюю формулу, приходим к соотношению

$$\int_0^t \mathbf{1}\,(|X(s)-v|<\varepsilon, g(s)> x) * dX(s) -$$
$$-\int_0^t \mathbf{1}\,(|X(s)-v|<\varepsilon, g(s)> x)\, dX(s) -$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{1}\,(g(s)> x)[\alpha(ds,v-\varepsilon)-\alpha(ds,v+\varepsilon)] = 0.$$

Вычислив симметричный интеграл в правой части согласно формуле (В.2) и интегрируя последнее равенство по переменной $x \in [0,+\infty)$, в силу теоремы «типа Фубини» для итовских интегралов (см. [1, лемма 4.1]), получим следующий вариант формулы типа Танаки:

$$g(t)\int_{X(0)}^{X(t)} \mathbf{1}\,(|u-v|<\varepsilon)\, du -$$
$$-\int_0^t \int_{X(0)}^{X(\tau)} \mathbf{1}(|u-v|<\varepsilon)\, du\, dg(\tau) =$$
$$=\int_0^t \mathbf{1}(|X(s)-v|<\varepsilon) g(s)\, dX(s) +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t g(s)[\alpha(ds,v-\varepsilon)-\alpha(ds,v+\varepsilon)] = 0. \tag{1.6}$$

Поскольку любая ограниченная неубывающая непрерывная слева предсказуемая функция $g(s)$ может быть представлена как поточечный предел предсказуемых функций вида $g(s) = \int_{s-h}^{s} g(\tau)\,\mathbf{1}\,(\tau>0)\, d\tau$, то в силу теорем о предельных переходах под знаком интегралов Стильтьеса и Ито можно в формуле (1.6) считать функцию $g(s)$ предсказуемой непрерывной слева неубывающей функцией, $g(0)=0$.

Далее, произвольная случайная функция ограниченной вариации представляется в виде разности двух монотонных функций, причем если она предсказуема и непрерывна слева, то таковыми являются и монотонные функции, входящие в разность. Поэтому в силу аддитивности последней формулы можно считать предсказуемую функцию $g(s)$ непрерывной слева функцией с конечным изменением, а условие $g(0)=0$ может быть опущено.

Шаг 3. Пусть $g(s)$, $s\in[0,1]$ — ограниченная непрерывная слева предсказуемая функция, для любых $h>0$, $s\in[0,1]$ положим

$$g_h(s,v) = \int_{\gamma^*(\alpha(s,v),v)-h}^{\gamma^*(\alpha(s,v),v)} g(\tau)\,\mathbf{1}\,(\tau>0)\, d\tau,$$
$$s\in(0,1], \quad g_h(0,v)=g(0),$$

в силу леммы 1 функция $g_h(s,v)$ предсказуема.

Положив $g(s) = g_h(s,v)$ в формуле (1.6), имеем

$$g(t,v)\int_{X(0)}^{X(t)} \mathbf{1}\,(|u-v|<\varepsilon)\, du -$$
$$-\int_0^t \int_{X(0)}^{X(\tau)} \mathbf{1}(|u-v|<\varepsilon)\, du\, dg(\tau,v) =$$
$$=\int_0^t \mathbf{1}(|X(s)-v|<\varepsilon) g_h(s,v)\, dX(s) +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t g_h(s,v)[\alpha(ds,v-\varepsilon)-\alpha(ds,v+\varepsilon)] = 0. \tag{1.7}$$

Так как при п.в. v носитель заряда, порожденный функцией $g_h(s,v)$, лежит в множестве уровня $\{s : X(s)=v\}$, то симметричный интеграл в левой части формулы (1.7) в силу формулы (В.2) равен

$$g_h(t,v)\int_{X(0)}^{X(t)} \mathbf{1}\,(|u-v|<\varepsilon)\, du -$$
$$-[g_h(t,v)-g(0)]\times$$
$$\times\int_{m(t)}^{M(t)} \kappa(u,X(0),v)\mathbf{1}(|u-v|<\varepsilon)\, du. \tag{1.8}$$

Шаг 4. Пусть функция $g(s)$, как в шаге 3. Перейдем к пределу при $h\to 0$ в равенстве (1.7), тогда в силу теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега (см. [3]) и формулы (1.8) предел во втором слагаемом в правой части равенства (1.7) можно внести под знак интеграла Стильтьеса, поэтому существует предел стохастических интегралов Ито

$$\lim_{h\to 0}\int_0^t \mathbf{1}\,(|X(s)-v|<\varepsilon) g_h(s,v)\, dX(s) =$$
$$=\int_0^t \mathbf{1}\,(|X(s)-v|<\varepsilon) g(s,v)\, dX(s).$$

Следовательно, мы приходим к равенству

$$g(t,v)\int_{X(0)}^{X(t)}\mathbf{1}\left(|u-v|<\varepsilon\right)du - \\ -[g(t,v)-g(0)]\times \\ \times\int_{m(t)}^{M(t)}\kappa(u,X(0),v)\mathbf{1}(|u-v|<\varepsilon)\,du = \\ =\int_0^t\mathbf{1}(|X(s)-v|<\varepsilon)g(s,v)\,dX(s)+ \\ +\frac{1}{2}\int_0^t g(s,v)[\alpha(ds,v-\varepsilon)-\alpha(ds,v+\varepsilon)]. \tag{1.9}$$

Шаг 5. Пусть в формуле (1.9) функция $g(s)$ есть непрерывная слева ограниченная предсказуемая функция. Умножим обе части формулы (1.9) на $\frac{1}{2\varepsilon}$, проинтегрируем по переменной $v\in R$, тогда для стохастического интеграла Ито в силу теоремы типа Фубини имеем

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_R\int_0^t\mathbf{1}\left(|X(s)-v|<\varepsilon\right)g(s,v)\,dX(s)\,dv = \\ =\int_0^t\frac{1}{2\varepsilon}\int_{X(s)-\varepsilon}^{X(s)+\varepsilon}g(s,v)\,dv\,dX(s),$$

а второе слагаемого в правой части в силу формулы (0.1) после преобразований приводится к виду

$$\frac{1}{2}\int_0^t\frac{1}{2\varepsilon}[g(s,X(s)+\varepsilon)-g(s,X(s)-\varepsilon)]\,ds.$$

Следовательно, получаем соотношение

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_R\Bigg[g(t,v)\int_{X(0)}^{X(t)}\mathbf{1}\left(|u-v|<\varepsilon\right)du- \\ -[g(t,v)-g(0,v)]\times \\ \times\int_{m(t)}^{M(t)}\kappa(u,X(0),v)\mathbf{1}(|u-v|<\varepsilon)\,du\Bigg]\,dv = \\ =\int_0^t\frac{1}{2\varepsilon}\int_{X(s)-\varepsilon}^{X(s)+\varepsilon}g(s,v)\,dv\,dX(s)+ \\ +\frac{1}{2}\int_0^t\frac{1}{2\varepsilon}\Big[g(s,X(s)+\varepsilon)-g(s,X(s)-\varepsilon)\Big]\,ds. \tag{1.10}$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$ по вероятности в равенстве (1.10); так как существует потраекторный предел при $\varepsilon\to 0$ в левой части последнего равенства и предел по вероятности стохастических интегралов Ито, то существует предел по вероятности второго слагаемого в правой части соотношения (1.10), поэтому мы получим формулу

$$\int_{R^+\times R}g(\gamma^*(x,u))G_t(dx\,du) = \\ =\int_0^t g(p)\,dX(p)+ \\ +\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_0^t\frac{1}{2\varepsilon}[g(s,X(s)+\varepsilon)-g(s,X(s)-\varepsilon)]\,ds. \tag{1.11}$$

Преобразуя левую часть формулы (1.11) с помощью леммы 2, приходим к формуле

$$\int_0^t g(p)\,dX(p) = \\ =\int_0^t\Big\{g(p)\kappa(X(p),X(0),X(t)) - \\ -\frac{1}{2}[g(p)-g(0)]\,\mathrm{sgn}\,(X(p)-X(0))\Big\}D_t(dp) - \\ -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\frac{1}{2\varepsilon}\times \\ \times\Big[g(p,X(p)+\varepsilon)-g(p,X(p)-\varepsilon)\Big]\,dp, \tag{1.12}$$

где предел в правой части формулы (1.12) есть предел по вероятности.

Шаг 6. Пусть $g(s)$ есть непрерывная слева неограниченная неотрицательная предсказуемая функция, для которой с вероятностью 1 конечны стохастический интеграл Ито $\int_0^t g(p)\,dX(p)$ и расширенный симметричный интеграл $\int_0^t\Big\{g(p)\kappa(X(p),X(0),X(t)) - \frac{1}{2}\big[g(p)-g(0)\big]\,\mathrm{sgn}\,(X(p)-X(0))\Big\}D_t(dp)$.

Для любого $m>0$ рассмотрим функцию $g_m(s)=g(s)\mathbf{1}(g(s)\leqslant m)$. Взяв в формуле (1.12) функцию $g_m(s)$ вместо функции $g(s)$, перейдем к пределу при $m\to\infty$. Предел под знаком расширенного симметричного интеграла существует, для этого необходимо записать его согласно формуле (B.4) как интеграл по заряду, разложить заряд в виде разности двух мер и перейти к пределу при $m\to\infty$ под знаками соответствующих интегралов. Далее, так как существует предел по вероятности при $m\to\infty$ стохастических интегралов Ито и потраекторный предел при

$m \to \infty$ расширенных симметричных интегралов, то в силу теорем о предельных переходах в итовском и лебеговском интегралах заведомо существует предел $m \to \infty$ по вероятности для второго слагаемого в правой части соотношения (1.12), поэтому мы приходим к формуле (1.1) сначала с непрерывной слева неограниченной неотрицательной предсказуемой функцией $g(p)$, а затем и с произвольной функцией $g(p)$, удовлетворяющей предположениям теоремы 1.

Замечание. Правая часть равенства (1.1), во-первых, определяет не стохастические, а детерминированные (потраекторные) интегралы, во-вторых, эти интегралы определены для случайных функций, которые не являются предсказуемыми и, кроме того, имеют смысл для детерминированных непрерывных вполне регулярных функций $X(s)$. Равенство (1.1) фактически означает, что стохастические интегралы Ито по винеровскому процессу $X(s)$ могут быть определены как потраекторные интегралы от, вообще говоря, непредсказуемых функций. Более того, из соотношения (1.1) вытекает, что интегралы «итовского типа» могут быть построены для определенного класса детерминированных непрерывных вполне регулярных функций $X(s)$ (реализаций случайных процессов), если пределы в правой части формулы (1.1) понимать в обычном смысле. Сформулируем это в виде следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть непрерывная вполне регулярная функция $X(s)$, $s \in [0,1]$, обладает непрерывным по временному параметру локальным временем $\alpha(t,v)$, тогда интеграл итовского типа $\int_0^t g(p)\,dX(p)$ может быть определен согласно формуле (1.1) для тех непрерывных слева функций $g(p)$, для которых конечен расширенный симметричный интеграл и существуют конечные пределы в правой части в формуле (1.1) с той лишь разницей, что вместо пределов по вероятности необходимо взять «обычные» пределы. В случае стохастического процесса $X(s)$, реализации которого с вероятностью 1 удовлетворяют предположениям теоремы, пределы в правой части в формуле (1.1) можно рассматривать как пределы по вероятности.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ватанабе С., Икеда Н.** Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986. 448 с.
2. **Маккин Г.** Стохастические интегралы. М.: Мир, 1972. 184 с.
3. **Натансон И. П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
4. **Насыров Ф. С.** Об отражении непрерывных функций и случайных процессов, обладающих локальными временами. // Теория вероятн. и ее примен. 1995. Т. 40, вып. 3. С. 665–669.
5. **Насыров Ф. С.** О локальных временах для функций и случайных процессов 1 // Теория вероятн. и ее примен. 1995. Т. 40, вып. 4. С. 798–812.
6. **Насыров Ф. С.** Симметричные интегралы и их применение в финансовой математике // Тр. МИРАН. 2002. Т. 237. С. 265–278.
7. **Насыров Ф. С.** Расширенный симметричный интеграл и обобщенная формула Ито // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2003. Т. 10, вып. 2. 10-я Всерос. шк.-коллокв. по стохастическим методам: Тез. докл. С. 357.
8. **Насыров Ф. С.** О связанных со свойством (N) Лузина разложениях функций // Сибирск. математич. журн. 2004. Т. 45, № 1. С. 178–188.
9. **Насыров Ф. С.** Симметричные интегралы и потраекторные аналоги стохастических дифференциальных уравнений // Вестник УГАТУ. 2003. Т. 4, № 2. С. 56–66.
10. **Чжун К., Уильямс Р.** Введение в стохастическое интегрирование. М.: Мир, 1987. 152 с.
11. **Follmer H.** Calcul d'Ito sans probabilities // Lecture Notes in Math. 1981. V. 850. P. 144–150.
12. **Follmer H., Protter P., Shiryayev A.** Quadratic covariation and an extension of Ito's formula // Bernoulli. 1995. V. 1. P. 149–169.
13. **Geman D., Horowitz J.** Occupation densities // Ann. Probab. 1980. V. 8. P. 1–67.

ОБ АВТОРЕ

Насыров Фарит Сагитович, проф. каф. математики. Дипл. математик (ЛГУ, 1976). Д-р физ.-мат. наук по теории вероятностей и мат. статистике и по мат. анализу (защ. в ИМ им. Соболева, Новосибирск, 2002). Иссл. в обл. теории случайных процессов, теории функций, финансовой математики.