

УДК 621.43.04.002.5.001

В. М. КУЛЯПИН

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ РАЗРЯД В СИСТЕМАХ ЭЛЕКТРООБОРУДОВАНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Предлагается математическая модель для нахождения нестационарного процесса фазовых превращений плавления с уносом массы мишени испарением под действием поверхностного источника энергии высокой плотности с учетом объемного тепловыделения. Получено аналитическое решение задачи теплопроводности с фазовыми превращениями. Установлено, что исходные уравнения баланса энергии имеют непрерывные решения, но при выделении асимптотик возникает скачкообразность решения, их критичность к малому изменению параметров. *Моделирование процессов фазовых превращений; приближенные аналитические методы; задачи нестационарной теплопроводности с фазовыми превращениями плавления, испарения, горения*

Попытки создать теорию электрического зажигания сталкивались с основной трудностью — анализа теплофизических явлений, которые не доведены до практических результатов. В этих условиях возрастает роль математического моделирования взаимосвязанных процессов в области взаимодействия электрического разряда и топлива. Аналитическая система решения краевых задач теплопроводности с фазовыми превращениями плавления и уносом массы испарением при действии поверхностного источника энергии высокой плотности приведена в [1]. Многие вопросы, связанные с теорией взаимосвязанных процессов в электрических разрядах, в том или ином конкретном воплощении уже давно известны. В статье, используя подход математики катастроф, приведено аналитическое решение задачи теплопроводности с фазовыми превращениями плавления, испарения и горения при совместном воздействии поверхностного и объемного источников энергии. Уравнения баланса энергии имеют непрерывные решения, но возникает скачкообразность решений, их критичность к малому изменению параметров, и характер решений резко изменяется.

1. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД

Поведение электрических систем зажигания как элементов и систем автоматического регулирования в переходных и установившихся режимах описывают дифференциальными уравнениями. Для расчетов процес-

сов теплопроводности с фазовыми переходами необходимо получить решение нелинейной задачи, устанавливающее явные функциональные зависимости между исходными параметрами. Аналитическое решение нелинейных задач является сложным, но более надежным, так как в этом случае, в отличие от численных методов, всегда можно проверить решение на удовлетворение исходным уравнениям или граничным условиям и оценить величину отклонения [2]. При инженерных расчетах широко применяют линеаризацию, т. е. замену нелинейных дифференциальных уравнений приближенными линейными, для которых существует общий метод интегрирования. В работе развит интегральный метод на класс задач с фазовыми превращениями плавления, испарения и горения. В основе метода математическая модель нелинейной задачи теплопроводности, состоящая из уравнений в частных производных и краевых условий, сводится к модели, включающей обыкновенное дифференциальное уравнение и начальные условия. Основная идея — искомое решение удовлетворяет осредненному уравнению теплового баланса. Так как исходными являются условия на границах, то нелинейная инверсная задача остывания на основе интегрального метода не может быть решена.

2. ВЫДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ В ОБЪЕМЕ

Одномерная задача нагрева поверхностным источником с плотностью q_i и объемным источником с плотностью q_v в зоне, ограни-

ченной внешней подвижной границей горения X_δ , разрушения X_0 и границей плавления X , представлена на рис. 1. Зона паров — 0, 1 — зона расплава, 2 — твердая фаза. Температура горения T_δ , температура испарения T_0 , температура плавления T_m . Профили температур в твердой фазе $\vartheta_2(x, t)$, жидкой $\vartheta_1(x, t)$, газобразной $\vartheta_0(x, t)$. Рассматриваем для примера только процесс плавления и испарения материала мишени.

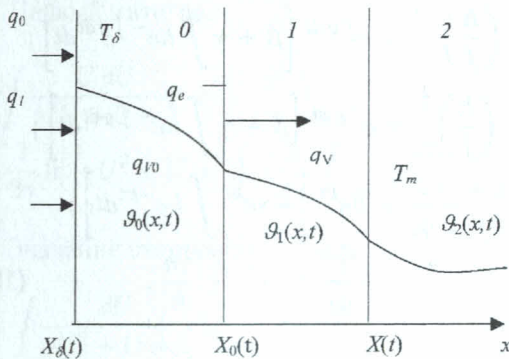


Рис. 1. Модель процесса плавления, испарения и горения

Уравнение Фурье с учетом условий на границах раздела фаз запишется в виде:

- для расплавленной зоны $X_0(t) \leq x \leq X(t)$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1} \cdot \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} = -\frac{q_v}{\lambda_1}; \quad (1)$$

- для твердой зоны $x \geq X(t)$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial x^2} - \frac{1}{a_2} \cdot \frac{\partial \vartheta_2}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Граничные условия:

$$\vartheta_1(X; t) = \vartheta_2(X; t); \quad (3)$$

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} \right)_{x=X} = \lambda_2 \left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} \right)_{x=X} - L\rho \frac{dX}{dt}; \quad (4)$$

$$q_0 + \lambda_1 \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} \right)_{x=X_0} = [L_0\rho + \rho c(T_0 - T)] \frac{dX_0}{dt}; \quad (5)$$

$$\vartheta_2(x; 0) = T; \quad \vartheta_2(\infty; 0) = T, \quad (6)$$

где a, L, L_0 — температуропроводность, теплопроводность, испарения.

Если задаться профилем температур как функцией ширины зоны между границами фазовых переходов, координаты абсцисс и подставить в интеграл теплового баланса, получим дифференциальное уравнение относительно зоны фазовых превращений с известными начальными условиями.

Профиль температур жидкой фазы при одновременном воздействии поверхностного и объемного источников энергии, используя решение [3], задаем в виде профиля пластины, охлаждаемой с двух сторон:

$$\vartheta_1(x, t) = T_0 + \frac{T - T_0}{X - X_0}(x - X_0) + \psi(t) \left[(X - X_0)(x - X_0) - (x - X_0)^2 \right]. \quad (7)$$

Для определения функции $\psi(t)$ из (7) находим $\partial^2 \vartheta_1 / \partial x^2$ и $\partial \vartheta_1 / \partial t |_{x=X_0}$, подставляем в (1)

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x^2} = -2\psi(t); \quad \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} |_{x=X_0} = \frac{dT_0}{dt};$$

$$\psi(t) = \frac{q_v}{2\lambda_1} - \frac{1}{2a_1} \cdot \frac{dT_0}{dt}.$$

Подставляя полученное значение в (7), имеем

$$\vartheta_1(x, t) = T_0 + \frac{T - T_0}{X - X_0}(x - X_0) + \left(\frac{q_v}{2\lambda_1} - \frac{1}{2a_1} \cdot \frac{dT_0}{dt} \right) \times \left[(X - X_0)(x - X_0) - (x - X_0)^2 \right]. \quad (8)$$

Градиент температуры

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} = \frac{T - T_0}{X - X_0} + \frac{q_v}{2\lambda_1}(X - X_0) - \frac{q_v}{\lambda_1}(x - X_0) - \frac{1}{2a_1} \frac{dT_0}{dt}(X - X_0) + \frac{1}{a_1} \frac{dT_0}{dt}(x - X_0). \quad (9)$$

Градиент температуры на границе плавления при $x = X$

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} \Big|_{x=X} = \frac{T - T_0}{X - X_0} + \frac{q_v}{2\lambda_1}(X - X_0) + \frac{1}{2a_1} \cdot \frac{dT_0}{dt}(X - X_0); \quad (10)$$

на границе испарения при $x = X_0$

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} \Big|_{x=X_0} = \frac{T - T_0}{X - X_0} + \frac{q_v}{2\lambda_1}(X - X_0) - \frac{1}{2a_1} \cdot \frac{dT_0}{dt}(X - X_0). \quad (11)$$

Профиль температуры твердой фазы определяется выражением [4]

$$\vartheta_2(x, t) = T_m - (T_m - T) \times \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{1}{a_2} \cdot \frac{dX}{dt} (x - X) \right] \right\}. \quad (12)$$

Градиент температуры твердой фазы на границе плавления

$$\left. \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} \right|_{x=X} = -(T_m - T) \frac{1}{a_2} \cdot \frac{dX}{dt}. \quad (13)$$

Заданные профили температуры удовлетворяют уравнениям Фурье. Из условия на подвижной границе испарения (5) и условия (4) на границе плавления определяем скорость изменения расплавленной зоны $y = (X - X_0)$

$$y' = f(t) y^n + g(t) y + h(t), \quad (14)$$

$$n = -1; \\ f(t) = \lambda_1 (T_0 - T_m) \times \left(\frac{1}{L_0 \rho + c \rho (T_0 - T)} + \frac{1}{L \rho + c \rho (T_m - T)} \right);$$

$$g(t) = \left(\frac{c \rho}{2} \cdot \frac{dT_0}{dt} - \frac{q_V}{2} \right) \times \left(\frac{1}{L_0 \rho + c \rho (T_0 - T)} - \frac{1}{L \rho + c \rho (T_m - T)} \right);$$

$$h(t) = -\frac{q_0(t)}{L_0 \rho + c \rho (T_0 - T)}.$$

Решение уравнения (14) имеет вид [5]

$$y = \left(\frac{h}{f} \right)^{\frac{1}{n}} U(t). \quad (15)$$

Функция $U(t)$ определяется из соотношения

$$\int \frac{dU}{U^n - \gamma U + 1} + C = \int \left(\frac{f}{h} \right)^{\frac{1}{n}} h dt, \quad (16)$$

а значение γ находится из соотношения

$$\left(\frac{h}{f} \right)^{\frac{1}{n}} = e^{\int g dt} \left[\beta + \gamma \int h \cdot e^{-\int g dt} dt \right]. \quad (17)$$

Вводим в формулу (15) значения коэффициентов, получаем выражение для ширины зоны фазовых превращений

$$X - X_0 = -\frac{\varepsilon}{q_0} U(t), \quad (18)$$

где

$$\varepsilon = \lambda_1 (T_0 - T) \left(1 + \frac{L_0 + c(T_0 - T)}{L + c(T_m - T)} \right).$$

3. ПОСТОЯННАЯ ПЛОТНОСТЬ ТЕПЛОТЫДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим переходные процессы в зоне, ограниченной границей плавления и границей испарения при $q_0 = \text{const}$, $q_V = \text{const}$, $T_0 = \text{const}$.

Находим в явном виде выражение для γ из соотношения (17).

$$\left(\frac{h}{f} \right)^{-1} = e^{\int g dt} \left[\beta + \gamma \int h e^{-\int g dt} dt \right]; \\ \left(\frac{h}{f} \right)^{\frac{1}{n}} = e^{\int g dt} \left[\beta + \gamma \int h e^{-\int g dt} dt \right]; \\ -\frac{\varepsilon}{q_0} = \beta e^{kt} \left[+\gamma e^{kt} \int h e^{-kt} dt \right]; \\ -\frac{\varepsilon}{q_0} = \beta e^{kt} - \frac{\gamma h}{k}, \quad (19)$$

где

$$k = -\frac{q_V}{2} \times \left(\frac{1}{L_0 \rho + c \rho (T_0 - T_m)} - \frac{1}{L \rho + c \rho (T_m - T)} \right).$$

При $t = 0$ коэффициент

$$\beta = \frac{\gamma h}{k} - \frac{\varepsilon}{q_0}. \quad (20)$$

Подставляя значение для коэффициента β в уравнение (19), получаем

$$-\frac{\varepsilon}{q_0} = \left(\frac{\gamma h}{k} - \frac{\varepsilon}{q_0} \right) e^{kt} - \frac{\gamma h}{k}; \quad (21)$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon k}{q_0 h} = -\frac{\varepsilon L_0 \rho k}{q_0^2}; \quad (22)$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon q_V}{2 q_0^2} \left[1 - \frac{L_0 + c(T_0 - T_m)}{L + c(T_m - T)} \right]. \quad (23)$$

Так как теплота испарения L_0 намного больше теплоты плавления, то коэффициент γ отрицателен. Определяем функцию $U(t)$:

$$\int \frac{U dU}{-\gamma U^2 + U + 1} = \int \left(\frac{f}{h} \right)^{-1} h dt = \frac{h^2 t}{f} = \frac{q_0^2 t}{\varepsilon \rho L_0}.$$

Коэффициент γ отрицателен, тогда исходный интеграл равен

$$\int \frac{U dU}{-\gamma U^2 + U + 1} = \int \frac{U dU}{\gamma U^2 + U + 1};$$

$$\int \frac{U dU}{\gamma U^2 + U + 1} =$$

$$= \frac{1}{2\gamma} \int \frac{d(\gamma U^2 + U + 1)}{\gamma U^2 + U + 1} - \frac{1}{2\gamma} \int \frac{dU}{\gamma U^2 + U + 1}.$$

Первый интеграл

$$\int \frac{U dU}{\gamma U^2 + U + 1} =$$

$$= \frac{1}{2\gamma} \ln(\gamma U^2 + U + 1) - \frac{1}{2\gamma} \int \frac{dU}{\gamma U^2 + U + 1}.$$

Значение второго интеграла

$$\int \frac{dU}{\gamma U^2 + U + 1} =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4\gamma-1}} \operatorname{arctg} \frac{2\gamma U+1}{\sqrt{4\gamma-1}} + C & \text{для } 1-4\gamma \leq 0; \gamma \geq 0,25; \\ \frac{1}{\sqrt{1-4\gamma}} \ln \frac{2\gamma U+1-\sqrt{1-4\gamma}}{2\gamma U+1+\sqrt{1-4\gamma}} + C & \text{для } 1-4\gamma \geq 0; \gamma \leq 0,25. \end{cases}$$

Исходя из этого, имеем для $\gamma \leq 0,25$

$$\int \frac{U dU}{\gamma U^2 + U + 1} =$$

$$= \frac{1}{2\gamma} \ln(\gamma U^2 + U + 1) -$$

$$- \frac{1}{2\gamma\sqrt{1-4\gamma}} \ln \frac{2\gamma U+1-\sqrt{1-4\gamma}}{2\gamma U+1+\sqrt{1-4\gamma}} + C;$$

для $\gamma \geq 0,25$ значение интеграла

$$\int \frac{U dU}{\gamma U^2 + U + 1} = \frac{1}{2\gamma} \ln(\gamma U^2 + U + 1) -$$

$$- \frac{1}{\gamma\sqrt{4\gamma-1}} \operatorname{arctg} \frac{2\gamma U+1}{\sqrt{4\gamma-1}} + C.$$

Постоянную интегрирования находим из условия, что в момент времени $t = 0$ функция $U(t) = 0$, тогда для $\gamma \leq 0,25$

$$C = \frac{1}{2\gamma\sqrt{1-4\gamma}} \ln \frac{1-\sqrt{1-4\gamma}}{1+\sqrt{1-4\gamma}};$$

для $\gamma \geq 0,25$ постоянная интегрирования

$$C = \frac{1}{\gamma\sqrt{4\gamma-1}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{4\gamma-1}}.$$

Безразмерный комплекс $\frac{q_0^2 t}{L_0 \rho \varepsilon} = \bar{t}$ в представляет собой безразмерное время.

Для $\gamma \leq 0,25$

$$\bar{t} = \frac{1}{2\gamma} \ln(\gamma U^2 + U + 1) - \frac{1}{2\gamma\sqrt{1-4\gamma}} \times$$

$$\times \left(\ln \frac{2\gamma U+1-\sqrt{1-4\gamma}}{2\gamma U+1+\sqrt{1-4\gamma}} - \ln \frac{1-\sqrt{1-4\gamma}}{1+\sqrt{1-4\gamma}} \right); \quad (24)$$

для $\gamma \geq 0,25$

$$\bar{t} = \frac{1}{2\gamma} \ln(\gamma U^2 + U + 1) - \frac{1}{\gamma\sqrt{4\gamma-1}} \times$$

$$\times \left(\operatorname{arctg} \frac{2\gamma U+1}{\sqrt{4\gamma-1}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{4\gamma-1}} \right); \quad (25)$$

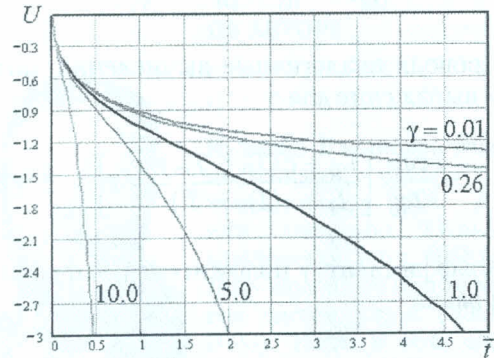


Рис. 2. Ширина зоны реакции при различных γ

Расчетные зависимости $U(\bar{t})$ представлены на рис.2. В зависимости от соотношения плотности объемного и поверхностного источников характер процессов изменяется. При малых значениях γ процессы устойчивые, ширина зоны фазовых превращений достигает установившегося значения. При $\gamma = 0,25$ процессы нейтрально устойчивые. Дальнейшее увеличение плотности объемного тепловыделения приводит к скачкообразности решения, его критичности к малому изменению энергии объемного источника. Характер процесса резко изменяется, и происходит неограниченное увеличение ширины зоны реакции.

4. ПОГЛОЩЕНИЕ ЭНЕРГИИ В ЗОНЕ РЕАКЦИИ

Дополнительное поглощение энергии в зоне фазовых превращений при действии поверхностного источника высокой плотности учитывается в дифференциальном уравнении Фурье для жидкой фазы $X_0(t) \leq x \leq X(t)$:

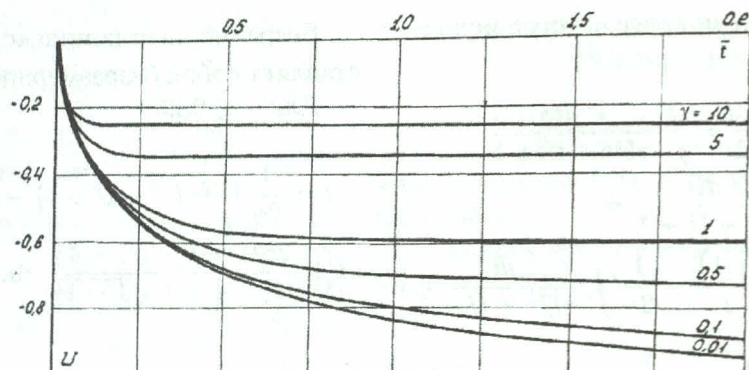


Рис. 3. Расчетные зависимости для процессов с дополнительным поглощением в зоне реакции

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1} \cdot \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} = \frac{qV}{\lambda_1}. \quad (26)$$

Проводя аналогичные вычисления, получаем выражение для γ

$$\gamma = \frac{\varepsilon qV}{2q_0^2} \left[\frac{L_0 + c(T_0 - T_m)}{L + c(T_m - T)} - 1 \right]. \quad (27)$$

Коэффициент γ положителен и функция $U(t)$ равна

$$\int \frac{U dU}{-\gamma U^2 + U + 1} = -\frac{1}{2\gamma} \ln(-\gamma U^2 + U + 1) + \frac{1}{2\gamma\sqrt{1+4\gamma}} \ln \frac{\sqrt{1+4\gamma} + 2\gamma U - 1}{\sqrt{1+4\gamma} - 2\gamma U + 1} + C.$$

Постоянная интегрирования

$$C = -\frac{1}{2\gamma\sqrt{1+4\gamma}} \ln \frac{\sqrt{1+4\gamma} - 1}{\sqrt{1+4\gamma} + 1};$$

и интеграл с учетом постоянной интегрирования

$$t = -\frac{1}{2\gamma} \ln(U + 1 - \gamma U^2) + \frac{1}{2\gamma\sqrt{1+4\gamma}} \times \left(\ln \frac{\sqrt{1+4\gamma} + 2\gamma U - 1}{\sqrt{1+4\gamma} - 2\gamma U + 1} - \ln \frac{\sqrt{1+4\gamma} - 1}{\sqrt{1+4\gamma} + 1} \right). \quad (28)$$

Расчетные зависимости представлены на рис. 3. Как видно из приведенных графиков, поглощение энергии приводит к уменьшению ширины зоны, процессы всегда стабилизируются.

5. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССОВ

На основе интегрального метода можно проводить анализ и синтез многими методами без интегрирования дифференциальных уравнений и непосредственного исследования их решений. Из исследования дифференциального уравнения распространения тепла при воздействии энергии электрического разряда и экзотермических реакций в зоне (уравнение 16) получаем:

- система неустойчива (зажигание устойчиво), если существует положительный вещественный корень $\gamma > 0,25$;
- система нейтрально устойчива при $\gamma = 0,25$;
- зажигание неустойчиво, если $\gamma < 0,25$.

Аналогично проводится исследование процессов горения, ограниченных границей горения и испарения [6].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Применение реактивной системы управления с ракетными двигателями малой тяги на несамовоспламеняющемся топливе поставило задачу создания новых электрических систем зажигания, предназначенных для работы в повторно-кратковременном режиме на всех этапах полета многоэтапного космического аппарата.

2. Наиболее сложными являются переходные процессы в области взаимодействия плазмы электрического разряда и топлива, в то же время именно они определяют устойчивость зажигания и надежность работы двигателей управления.

3. Используется интегральный метод, математическая модель нелинейной задачи нестационарной теплопроводности с фазовыми превращениями плавления, испарения,

горения при действии поверхностных и объемных источников высокой плотности, состоящая из уравнений в частных производных и краевых условий, сводится к модели, включающей дифференциальное уравнение и начальные условия, решение удовлетворяет осредненному уравнению теплового баланса.

4. Приведено аналитическое решение задачи теплопроводности с фазовыми превращениями плавления, испарения и горения при совместном воздействии поверхностного и объемного источников энергии. Показано, что исходные уравнения баланса энергии имеют непрерывные решения, но при выделении асимптотик возникает скачкообразность решений, их критичность к малому изменению параметров, и характер решений резко изменяется.

5. Исследование взаимосвязанных теплофизических и электрических процессов позволило обосновать оптимальный вариант электрической системы зажигания по массе, габаритам, энергии разряда и потреблению электроэнергии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Куляпин В. М.** Некоторые задачи теплопроводности с фазовыми превращениями // Инж.-техн. журнал. 1971. Т. 20, № 3. С. 497–504.
2. **Гладкий С. Л., Яеницкий Л. Н.** Аналитическая система решения краевых задач матема-

тической физики // Аэрокосмическая техника и высокие технологии 2002: Матер. Всерос. науч.-техн. конф. Пермь: ПГТУ, 2002. С. 81.

3. **Фаворский О. Н., Фишгойт В. В., Янговский Е. Н.** Основы теории космических электрореактивных двигательных установок: Учеб. пособие для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1978. 387 с.
4. **Шарма О., Ротенберг М., Пеннер С.** Задачи переноса тепла при наличии фазовых превращений и переменной температуре поверхности // Ракетная техника и космонавтика. 1967. Т. 5, № 4. С. 84–89.
5. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
6. **Будников М. А., Левкович Н. А.** и др. Взрывчатые вещества и пороха. М.: Гос изд-во оборонной промышленности, 1955. 363 с.

ОБ АВТОРЕ



Куляпин Владислав Максимилианович, проф., каф. электрооборуд. ЛА. Дипл. инж.-электромех. (Новосиб. электротехн. ин-т, 1958). Д-р техн. наук по эл-там и уст-вам систем упр-я (УГАТУ, 2003). Иссл. в обл. систем упр-я с электр. разрядами.