Уфа: УГАТУ, 2005 Вестник УГАТУ Т. 6, № 1 (12). С. 206–211

НАУЧНЫЙ ОБМЕН

А. В. ПОНОМАРЕВ

АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ МЕТОДОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Рассматривается модификация дискретного преобразования Фурье для интерполяции периодических временных рядов. Предложенный метод требует меньших затрат памяти и объемов вычислений. Предполагается использование результатов для анализа финансовых потоков правосубъектов РФ.

Периодические временные ряды; дискретное преобразование Фурье; дискретные экспоненциальные функции

При анализе спектральных функций периодических временных рядов наиболее приемлемым является применение параметрического дискретного преобразования Фурье (ДПФ-П), предложенное и исследованное в работах В. А. *Пономарева* [2–4], которое в матричной форме записывается как

$$S_{N,\theta}=\frac{1}{N}F_{N,\theta}\vec{X}_N,\quad 0\leqslant\theta<1,$$

где $\vec{X}_N=[x(0),x(1),...,x(N-1)]^T$ — представление временного ряда $x(n)$, $N=\overline{0,N_1}$, в виде вектора N-мерного линейного пространства; T — знак транспонирования; $\vec{S}_{N,\theta}=[s(0),s(1),...,s(N-1)]^T$ — вектор коэффициентов разложения $\vec{X}_N$ по системе дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ), задаваемый матрицей $F_{N,\theta}$:

$$F_{N,\theta}=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & & N-1 & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 0\\1\\.\\.\\.\\N-1\\k\end{array} & \begin{bmatrix} 1 & W_N^{\theta} & \dots & W_N^{\theta(N-1)}\\ 1 & W_N^{\theta+1} & \dots & W_N^{(1+\theta)(N-1)}\\ . & . & \dots & .\\ . & . & \dots & .\\ . & . & \dots & .\\ 1 & W_N^{(N-1+\theta)} & \dots & W_N^{(N-1+\theta)(N-1)}\end{bmatrix}\end{array},$$

где $k=\overline{0,N-1}$.

Матрица $F_{N,\theta}$ представляет собой систему функций вида

$$W_N^{(m+\theta)l}=\exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(m+\theta)l\right]= =\mathrm{def}_p(m,l,\theta),$$

где $m,l=\overline{0,N-1}$, θ — параметр.

Рассмотрим свойства параметрических, дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ-П) [3, 4].

1. ДЭФ-П в отличие от ДЭФ не являются функциями двух равноправных переменных m и l. Следовательно, матрица ДЭФ-П, $F_{N,\theta}$ — асимметричная.

2. ДЭФ-П являются периодическими по переменной m и параметрически периодическими по переменной l с периодом N:

$$\mathrm{def}_p(m\pm kN,l,\theta)=def_p(m,l,\theta),$$
$$\mathrm{def}_p(m,l\pm kN,\theta)=def_p(m,l,\theta)W_N^{\pm\theta Nk}.$$

3. Система ДЭФ-П не мультипликативна по переменной m:

$$\mathrm{def}_p(m,l,\theta)\,\mathrm{def}_p(p,l,\theta)\neq\mathrm{def}_p(m+p,l,\theta)$$

и мультипликативна по переменной l:

$$\mathrm{def}_p(m,l,\theta)\,\mathrm{def}_p(m,k,\theta)=\mathrm{def}_p(m,l+k,\theta).$$

4. Среднее значение ДЭФ-П по переменной m равно нулю при $l\neq0$

$$\sum_{l=0}^{N-1}\mathrm{def}_p(m,l,\theta)= =\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\theta l\right)\frac{1-\exp(-j2\pi l)}{1-\exp(-j(2\pi/N)l)},$$

а по переменной l не равно нулю:

$$\sum_{l=0}^{N-1}\mathrm{def}_p(p,l,\theta)=\exp\frac{1-\exp\left[-j2\pi(p+\theta)\right]}{1-\exp\left[-j(2\pi/N)(p+\theta)\right]}.$$

5. Система ДЭФ-П ортогональна по обеим переменным:

$$\sum_{l=0}^{N-1} W_N^{(m+\theta)l}[W_N^{(p+\theta)l}]^* = \begin{cases} N, & p=m \\ 0, & p \neq m \end{cases};$$

$$\sum_{l=0}^{N-1} W_N^{(m+\theta)l}[W_N^{(m+\theta)k}]^* = \begin{cases} N, k=l \\ 0, k \neq l \end{cases}.$$

6. Система ДЭФ-П является полной системой, так как число линейно независимых функций равно размерности множества дискретных сигналов, т. е. числу степеней свободы.

Существует обратное ДПФ-П (ОДПФ-П), которое определяется соотношениями в матричной форме: $\vec{X}_N = F^*_{N,\theta}\vec{S}_{N,\theta}$, $n = \overline{0, N-1}$, $0 \leqslant \theta < 1$; $*$ — символ комплексного сопряжения.

В работах [2–4] обобщено понятие N-периодичности. Если задан временной ряд с периодом в N отсчетов, т. е. $x(n \pm kN) = x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, $k = 0,1,2...$, то в случае ДПФ N-периодичность можно интерпретировать как результат циклической перестановки внутри интервала $[0, N-1]$. Исходя из свойства 2 ДЭФ-П в работе [1] параметрическая N-периодичность реализации временного ряда определяется следующим соотношением:

$$x_\theta(n) = x(n \bmod N) W_N^{\theta N \mathrm{ent}[n/N]},$$

где mod — символ операции взятия по модулю, ent — символ операции взятия целой части.

Рассмотрим свойства ДПФ-П. Введем символическое обозначение для ДПФ-П и ОДПФ-П

$$x_\theta(n) \leftrightarrow S_N(k,\theta).$$

В работах [3,4] доказана справедливость ряда теорем для ДПФ-П.

1. Теорема линейности. ДПФ-П линейно по определению. Если

$$x_\theta(n) \leftrightarrow S_N(k,\theta), \quad y_\theta(n) \leftrightarrow Q_N(k,\theta),$$

то

$$\lambda_1 x_\theta(n) + \lambda_2 y_\theta(n) \leftrightarrow \lambda_1 S_N(k,\theta) + \lambda_2 Q_N(k,\theta).$$

2. Теорема сдвига. Если: $x_\theta(n) \leftrightarrow S_N(k,\theta)$, то

$$x_\theta(m+n) \leftrightarrow W_N^{-(k+\theta)m} S_N(k,\theta).$$

3. Теорема корреляции. Если $x_\theta(n) \leftrightarrow S_N(k,\theta)$ и $y_\theta(n) \leftrightarrow Q_N(k,\theta)$, то ДПФ-П круговой (циклической) корреляции, определяемой соотношением

$$Z_\theta(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x_\theta(m) y_\theta(n+m),$$

равно

$$U_N(k,\theta) = S_N^*(k,\theta) Q_N(k,\theta),$$

где $Z_\theta(n) \leftrightarrow U_N(k,\theta)$.

4. Теорема Парсеваля. Если $x_\theta(n) \leftrightarrow S_N(k,\theta)$, то

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x_\theta^2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \mid S_N(k,\theta) \mid^2.$$

Для ДПФ-П, аналогично ДПФ в работе [4] введено понятие спектральной плотности мощности (спектра мощности):

$$G_N(k,\theta) = N \mid S_N(k,\theta) \mid^2.$$

Там же доказано, что для параметрических N-периодических решетчатых функций спектр мощности в базисе ДЭФ-П инвариантен к временному сдвигу исходной функции.

В заключение изложения материала по ДПФ-П отметим, что, как справедливо отмечено в работе [1,4], авторы целого ряда работ как у нас в стране, так и за рубежом в той или иной мере при получении теоретических и практических результатов использовали, по сути дела, свойства ДЭФ-П. К сожалению, использование преимуществ базиса ДЭФ-П носило неявный характер и использовались лишь некоторые свойства ДЭФ-П.

Рассмотрим модификацию ДПФ-П для интерполяции периодических временных рядов.

Заданный дискретный временной ряд $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ при данном способе интерполяции интерпретируется как период периодической, ограниченной по полосе функции

$$x(n \pm kN) = x(n), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Тогда, представив сигнал $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ в виде вектора N-мерного линейного пространства

$$\vec{X}_N = [x(0), x(1), ..., x(N-1)]^T$$

и выполнив ДПФ $\vec{X}_N$, получим вектор коэффициентов разложения $\vec{X}_N$ по системе ДЭФ

$$\vec{S}_N = [s(0), s(1), ..., s(N-1)]^T.$$

Следовательно, можно оценить сигнал $\vec{X}_N$ в r раз большем количестве точек, поместив $(r-1)N$ нулей в середину вектора $\vec{S}_N$: $\vec{S}_{N_r} = [s(0), s(1), ..., s(^N\!/_2 - 1), \underbrace{0, ..., 0}_{N(r-1)}, s(^N\!/_2), ..., s(N-1)]^T$.

Обратное ДПФ $\vec{S}_{N_r}$ будет в этом случае иметь rN точек, соответствующих интерполяции периодической функции с ограниченной полосой.

Однако при таком подходе проводятся избыточные вычисления, так как часть значений вектора $\vec{S}_{N_r}$ — нулевые, и матрица Фурье из квадратной превращается в прямоугольную.

Применив к множеству строк этой матрицы операции сравнения по модулю r, получим r классов вычетов по этому модулю. Используя полученное разбиение, прямоугольную матрицу Фурье преобразования можно представить в виде r квадратных матриц

$$F^*_{N,\theta} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & & N-1 & k \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (N-1) \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & W_N^{-\theta} & \cdots & W_N^{-\theta(N-1)} \\ 1 & W_N^{-(1+\theta)} & \cdots & W_N^{-(1+\theta)(N-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & W_N^{-(N-1+\theta)} & \cdots & W_N^{-(N-1+\theta)(N-1)} \end{bmatrix} \end{array};$$

$$W_N^{-(k+\theta)n} = \exp\left[j\frac{2\pi}{N}(k+\theta)n\right]$$

Модифицированное ДПФ-П (М ДПФ-П) можно представить в следующем виде:

$$\vec{X}_{N,\theta} = F^*_{N,\theta}\vec{S}^{\theta}_N, \quad 0 \leqslant \theta \lhd 1,$$

где $\vec{S}^{\theta}_N = [s(0), ..., s(N/2-1), s(N/2)c, ...$ $..., s(N-1)c]^T$, $c = W_N^{-N(r-1)\theta}$.

Из этого замечания непосредственно следует, что алгоритмы вычисления обратного модифицированного дискретного преобразования Фурье могут иметь лишь один класс — прореживания по времени [2–4].

Запишем обратное модифицированное ДПФ-П в следующем виде:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N^{(M)}(k,\theta) W_N^{-k(n+\theta)}, \quad n = \overline{0, n-1}.$$

Рассмотрим алгоритм быстрого МБПФ-П.

Суть быстрых процедур вычисления как МДПФ-П, так и ДПФ-П заключается в представлении матрицы преобразования в факторизованном виде, т.е. в виде произведения матриц, состоящих большей частью из нулей. Покажем, что матрица $F^*_{N,\theta}$ обратного МДПФ-П может быть факторизована. Предположим, что $N = rS$, где r — простое число.

Любую n строку матрицы $F^*_{N,\theta}$ можно представить в виде [1, 2, 4]

$$\begin{aligned}[\alpha_{n,k}] = [&\alpha_{n,0}, ..., \alpha_{n,(r-1)}, W_N^{-r(n+\theta)}\alpha_{n,0}, ... \\ &..., W_N^{r(n+\theta)}\alpha_{n,(r-1)}, W_N^{-2r(n+\theta)}\alpha_{n,0}, ... \\ &..., W_N^{-2r(n+\theta)}\alpha_{n,(r-1)}; ..., W_N^{-(s-1)r(k+\theta)}\alpha_{n,0}, ... \\ &..., W_N^{-(s-1)r(n+\theta)}\alpha_{n,(r-1)}]. \quad (1)\end{aligned}$$

Вводя обозначение $R_n^{(1)} = [\alpha_{n,0}, ..., \alpha_{n,(r-1)}]$, запишем выражение (1) в более компактной форме:

$$\begin{aligned}[\alpha_{n,k}] = [&R_n^{(1)}, W_N^{-r(n+\theta)}R_n^{(1)}, ... \\ &..., W_N^{(s-1)r(n+\theta)}R_n^{(1)}]. \quad (2)\end{aligned}$$

Из периодичности функции W_N^{ε} (период 2π) нетрудно установить, что выражение (2) имеет S различных форм:

$$\begin{aligned}[\alpha_{n,k}] &= [R_n^{(1)}, W_N^{-r(n+\theta)}R_n^{(1)}, ..., W_N^{-(s-1)r\theta}R_n^{(1)}], \\ &\quad ((n))_S = 0, \\ [\alpha_{n,k}] &= [R_n^{(1)}, W_N^{-r(1+\theta)}R_n^{(1)}, ..., W_N^{-(s-1)r(1+\theta)}R_n^{(1)}], \\ &\quad ((n))_S = 1, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ [\alpha_{n,k}] &= [R_n^{(1)}, W_N^{-r(S-1+\theta)}R_n^{(1)}, ... \\ &\qquad ..., W_N^{-(s-1)r(S-1+\theta)}R_n^{(1)}], \\ &\quad ((n))_S = (S-1),\end{aligned}$$

где $((n))_S$ — символ операции сравнения n по модулю S. Таким образом, матрица $F^*_{N,\theta}$ может быть представлена в виде

$$
F^{*}_{N,\theta} =
\begin{array}{c}
\\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ S-1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (r-1)S \\ (r-1)S+1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (n-1) \\ n
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 0 & 1 & & S-1 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc}
R_0^{(1)} & W_N^{-r\theta} R_0^{(1)} & \cdot\ \cdot\ \cdot & W_N^{(S-1)r\theta} R_0^{(1)} \\
R_1^{(1)} & W_N^{-r(1+\theta)} R_1^{(1)} & \cdot\ \cdot\ \cdot & W_N^{(S-1)r(1+\theta)} R_1^{(1)} \\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
R_{S-1}^{(1)} & W_N^{-r(s-1+\theta)} R_{(S-1)}^{(1)} & \cdot\ \cdot\ \cdot & W_N^{-(S-1)r(S-1+\theta)} R_{S-1}^{(1)} \\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
R_{(r-1)S}^{(1)} & W_N^{-r\theta} R_{(r-1)S}^{(1)} & \cdot\ \cdot\ \cdot & W_N^{-(S-1)r(S-1+\theta)} R_{(r-1)S}^{(1)} \\
R_{(r-1)S+1}^{(1)} & W_N^{-r(1+\theta)} R_{(r-1)S+1}^{(1)} & \cdot\ \cdot\ \cdot & W_N^{-(S-1)r(1+\theta)} R_{(r-1)S+1}^{(1)} \\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
R_{rS-1}^{(1)} & W_N^{-r(S-1+\theta)} R_{rS-1}^{(1)} & \cdot\ \cdot\ \cdot & W_N^{-(S-1)r(S-1+\theta)} R_{rS-1}^{(1)}
\end{array}\right]
\end{array}
=
$$

$$
= F_1 Q_1 =
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ S-1 \\ \cdot \\ \cdot \\ (r-1)S \\ (r-1)S+1 \\ (N-1)S+S+1. \\ \cdot \\ (rS-1)
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 0 & 1 & & S-1 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc}
R_0^{(1)} & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
\cdot & R_1^{(1)} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & R_{S-1}^{(1)} \\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
R_{(r-1)S}^{(1)} & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
\cdot & R_{(r-1)S+1}^{(1)} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & R_{(r-1)(S+S-1)}^{(1)} \\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & R_{rS-1}^{(1)}
\end{array}\right]
\end{array}
\times
$$

$$
\times
\begin{array}{c}
\\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ S-1
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 0 & 1 & & S-1 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc}
I_r & W_N^{-r\theta} I_r & \cdot\ \cdot\ \cdot & W_N^{-(S-1)r\theta} I_r \\
I_r & W_N^{-r(1+\theta)} I_r & \cdot\ \cdot\ \cdot & W_N^{-(S-1)r(1+\theta)} I_r \\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
I_r & W_N^{-r(S-1+\theta)} I_r & \cdot\ \cdot\ \cdot & W_N^{-(S-1)r(S-1+\theta)} I_r
\end{array}\right]
\end{array},
$$

где I_r — единичная матрица $r \times r$.

В том случае, когда S не является простым числом, процедура факторизации может быть вновь применена к матрице Q_1, так как ее структура аналогична структуре исходной матрицы. Отличие состоит лишь в том, что элементы матрицы Q_1 являются матрицами размером $r \times r$.

$$W_N^{r\theta} I_r = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \\ \\ \\ r-1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & r-1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} W_N^{-r\theta} & . & \dots & . \\ . & W_N^{-r\theta} & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & W_N^{-r\theta} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Действительно, пусть $S = lq$, где l — простое число, тогда, применяя процедуру факторизации к матрице Q_1, получим $Q_1 = F_2 Q_2$ и $F_{N,\theta} = F_1 F_2 Q_2$.

Вводя обозначение $R_k^{(2)} = [I_r, W^{-r(k+\theta)} I_r, \dots$ $\dots, W^{-(l-1)r(k+\theta)} I_r]$, матрицу Q_1 можно представить как

$$Q_1 = F_2 Q_2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 0 \\ q-1 \\ . \\ . \\ . \\ s-1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & q-1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} R_0^{(2)} & . & \dots & . \\ . & R_1^{(2)} & \dots & . \\ . & . & \dots & R_{q-1}^{(2)} \\ . & . & \dots & \\ . & . & \dots & \\ . & . & \dots & \\ . & . & \dots & R_{lq-1}^{(2)} \end{bmatrix} \end{array} \times$$

$$\times \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ \\ q-1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & q-1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} I_{rl} & W_N^{l\theta} I_{rl} & \dots & W_N^{(q-1)l\theta} I_{rl} \\ I_{rl} & W_N^{l(1+\theta)} I_{rl} & \dots & W_N^{(q-1)l(1+\theta)} I_{rl} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ & & \dots & \\ I_{rl} W_N^{l(q-1+\theta)} & I_{rl} & \dots W_N^{-(q-1)l(q-1+\theta)} & I_{rl} \end{bmatrix} \end{array},$$

где I_{rl} — единичная матрица размером $rl \times rl$.

Если и q — число составное, то процедура факторизации применяется к матрице Q_2 и т. д. Очевидно, что чем большее число простых сомножителей содержит число N, тем более эффективны быстрые процедуры вычисления МДПФ-П за счет того, что матрица $F^*_{N,\theta}$ может быть разложена на большее число сомножителей, содержащих большое число нулевых элементов.

Рассмотрим построение быстрых алгоритмов вычисления МДПФ-П. С учетом определения $\vec{X}_{N,\theta}$ факторизация матрицы $F^*_{N,\theta}$ может быть проведена следующим образом:

$$\vec{X}_{N,\theta} = F^*_{N,\theta} \vec{S}_N^{\theta} = \frac{1}{N} F_1 F_2 \dots F_p \vec{S}_N^{\theta},$$

где $F_1, F_2, \dots, F_p$ — сомножители матрицы $F_{N,\theta}$.

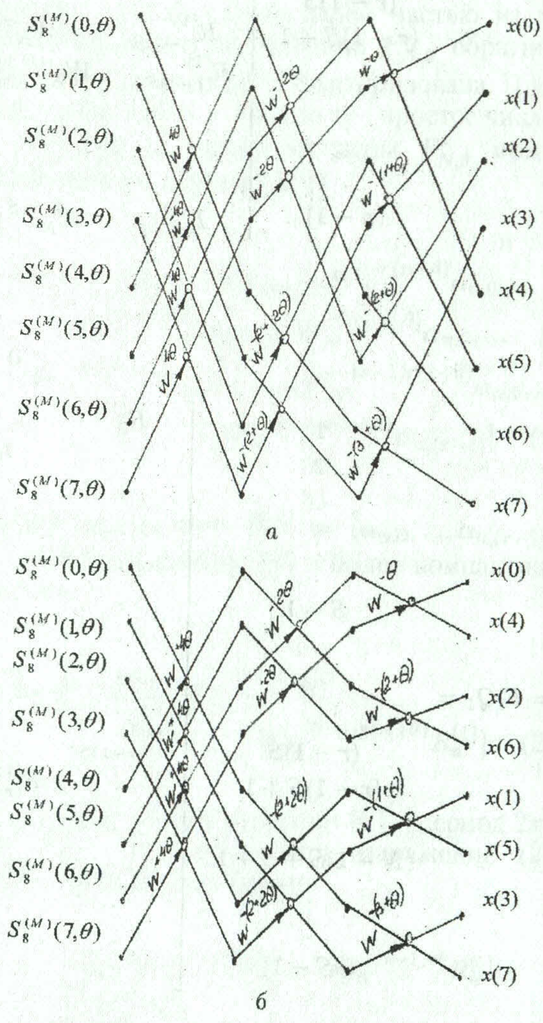


Рис. 1. Граф быстрого алгоритма для интерполяции сигнала во временной области: *а* — естественный порядок на входе и выходе; *б* — естественный порядок на входе, двоично-инверсный порядок на выходе

Определение сигнала проводится в p этапов. На первом этапе определяется вектор-столбец $\vec{X}_1 = F_p \vec{S}_N^{\theta}$; на втором — $\vec{X}_2 = F_{p-1} \vec{X}_1$; на p-м этапе определяется вектор столбец $\vec{X}_{N,\theta}$: $\vec{X}_{N,\theta}^{(\theta)} = F_1 \vec{X}_{p-1}$.

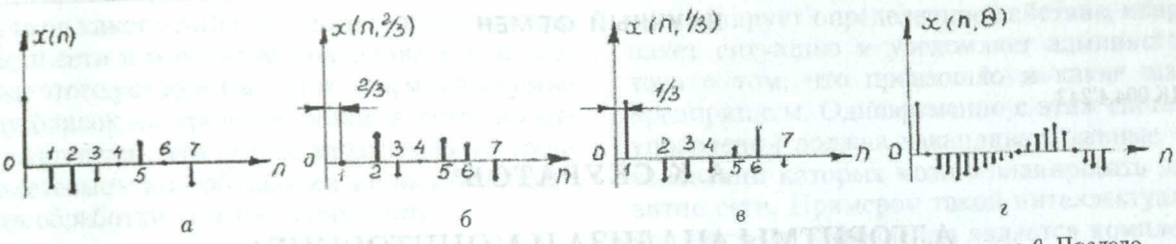


Рис. 2. Интерполяция временной последовательности при различных значениях параметра θ. Последовательности: *а* — интерполируемая; *б* — интерполирующая при $\theta = 2/3$; *в* — интерполирующая при $\theta = 1/3$; *г* — интерполированная

Однако в нашем случае матрицы F_i, $i = \overline{1,p}$ являются слабозаполненными (содержат большое число нулевых элементов), поэтому многие дуги направленного графа выпадают. Каждый из этапов матричного произведения имеет свой направленный граф; объединение графов представляет собой направленный граф вычисления МДПФ-П.

Соответствующие графы быстрых алгоритмов для интерполяции сигнала во временной области приведены на рис. 1, *а* и *б*, а на рис. 2 приведен пример, иллюстрирующий работу алгоритма интерполяции временного сигнала.

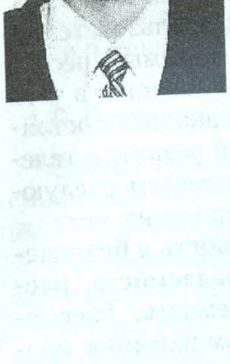
Таким образом, показано еще одно важное приложение МДПФ-П — интерполяция рядов во временной области. Естественно, интерполяцию можно проводить и обычным методом ДПФ. Однако использование ДПФ для решения этой задачи, в отличие от МДПФ-П, требует значительных затрат памяти и выполнения большого объема вычислений. Кроме того, промежуточные отсчеты, полученные методом ДПФ, как правило, кратны интервалу анализа, в то время как с помощью МДПФ-П можно получать дополнительные отсчеты с произвольным смещением относительно исходных отсчетов (параметр может принимать любое значение из интервала [0,1]).

Одним из возможных направлений использования предложенного метода является анализ финансовых потоков правосубъекта Российской Федерации. Восстановление промежуточных значений финансовых потоков позволяет эффективнее (в алгоритмическом смысле), надежнее (с большей вероятностью) и точнее (с меньшей дисперсией) выявлять пиковые значения потоков и скрытые периодичности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гоулд Б., Рабинер Л.** Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.
2. **Пономарев В. А.** Стохастические свойства параметрического дискретного преобразования Фурье // Радиотехника и электроника. АН СССР, 1983. Т. 28, № 8.
3. **Пономарев В. А.** Спектральный анализ стационарных дискретных процессов на конечных интервалах // Автометрия. АН СССР, СО, 1983. № 4.
4. **Пономарев В. А.** Структура системы дискретных экспоненциальных функций // Автометрия. АН СССР, СО, 1986. № 1.

ОБ АВТОРЕ



Пономарев Алексей Владимирович, вед. спец. Минэкономики Удм. Респ. Дипл. инж.-мат. (Ижевск. гос. техн. ун-т, 2001), экономист (там же, 2003). Канд. экон. наук по мат. методам в экономике и управл. народн. хоз-вом (там же, 2004). Иссл. по примен. мат. методов в экономике.