

УДК 533.697.3

Э. Г. ГИМРАНОВ, В. Г. МИХАЙЛОВ, Л. Р. АХМЕТШИНА

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРУЙНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПСЕВДОСКАЧКА В КАНАЛАХ С ПОПЕРЕЧНОЙ И ПРОДОЛЬНОЙ КРИВИЗНОЙ

Приводится математическое описание течения типа струйно-турбулентного псевдоскачка в каналах двигателей летательных аппаратов и газодинамических устройств с поперечной и продольной кривизной стенок. При этом влияние эффектов кривизны на параметры торможения вязкого сверхзвукового потока и интегральные характеристики в области псевдоскачка учитываются путем преобразования основных расчетных уравнений законов сохранения в криволинейную систему координат, учитывающую кривизну стенок канала, и дополнения их модифицированными гипотезами турбулентности Л. Прандтля. Торможение вязкого сверхзвукового потока; псевдоскачок; модифицированные гипотезы турбулентности; параметризация касательных напряжений

ВВЕДЕНИЕ

Решение многих важнейших теоретических, экспериментальных и прикладных задач газовой динамики торможения вязкого сверхзвукового потока в псевдоскачке [1] в настоящее время приобретает особую актуальность в связи с необходимостью разработки и создания ряда устройств и аппаратов нового поколения авиационной и ракетно-космической техники. К примеру, повышение эффективности воздухозаборников как составной части прямооточных воздушно-реактивных двигателей со сверхзвуковым горением топлива (ПВРДсг) в основной камере сгорания для сверх- и гиперзвуковых летательных аппаратов или в камере дожигания в ракетно-прямоточных двигателях (РПД) достигается осуществлением наиболее эффективного способа торможения сверхзвукового потока в проточной части входного канала. Требования к уменьшению потерь полного давления, минимальной длине зоны торможения, неравномерности поля скоростей и уровня пульсаций параметров газового потока на входе в камеру сгорания ПВРДсг или газогенератор РПД ставят необходимость подробного изучения газодинамической структуры псевдоскачка.

Схематизация течения в струйно-турбулентном псевдоскачке [2] заключается в том, что рассматривается непрерывная, под действием продольного градиента давления, деформация эпюры скоростей ограниченной

стенками канала турбулентной струи от первоначально невозмущенного развитого вязкого слоя через большие неравномерности к практически равномерному дозвуковому профилю. Излагаемые ниже математические выкладки основываются на следующих допущениях: статическое давление поперек струи в канале постоянно (кроме каналов с продольной кривизной); волновое ядро отсутствует, а центральная область течения принимается изоэнтропической и равномерной; давление в изоэнтропическом ядре течения определяется изменением толщины вытеснения пограничного слоя $\delta^*(x)$.

Граничные условия на поверхности стенок и внешней границе пограничного слоя для проекций скоростей записываются в виде

$$\begin{aligned} u &= u_\omega; & V &= V_\omega \text{ при } y = 0, \\ u &\rightarrow U_\delta; & V &\rightarrow V_\delta = U_\delta \operatorname{tg} \theta_k = \\ & & &= U_\delta d\delta^*/dx \text{ при } y = \delta, \end{aligned} \quad (1)$$

где u — продольная составляющая скорости; V — поперечная составляющая скорости; y — поперечная координата; δ — толщина вязкого слоя; δ^* — толщина вытеснения вязкого слоя; θ_k — угол отклонения невязкого течения; $()_\omega$ — условия на стенке; $()_\delta$ — условия на границе вязкого слоя.

На стенке канала $V = V_\omega$ есть условие ее проницаемости. Если стенка непроницаема, то $V_\omega = 0$; при $V_\omega > 0$ имеет место подача газа в пограничный слой (вдув); случай

$V_\omega < 0$ соответствует отсосу газа из пограничного слоя.

Предложенная математическая модель струйно-турбулентного псевдоскачка позволяет рассчитать с учетом поперечной и продольной кривизны стенок канала интегральные характеристики струйного слоя, толщину вытеснения $\delta^*(x)$ и толщину потери импульса $\delta^{**}(x)$ в функции продольной координаты по заданному распределению статического давления $P(x)$ вдоль течения, а также, применяя параметризацию касательных напряжений в области псевдоскачка с развитым струйным автомодельным профилем скорости, получить зависимость формпараметра профиля скорости $\bar{U}_{1m}(x)$ вдоль области торможения [3, 4].

1. УРАВНЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ, НЕРАЗРЫВНОСТИ И КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Основными, описывающими в общем случае течения газа в псевдоскачке, будут уравнения законов сохранения расхода, энергии, импульса и уравнение состояния. В качестве замыкающих в зависимости от решения прямой, обратной или смешанной задач могут быть выбраны уравнения изменения площади поперечного сечения канала, изменения давления вдоль продольной оси или определенная зависимость между p и F . Интегральные соотношения импульсов для вязкого слоя в криволинейной ортогональной системе координат будут иметь вид:

- для кольцевого цилиндрического канала

$$\frac{\partial \delta^{**}}{\partial x} + \delta^{**} \frac{\partial}{\partial x} \ln[(r_0 + H)\rho_\delta U_\delta^2] + \delta^* \frac{\partial}{\partial x} \ln U_\delta = C_f/2 + C_m; \quad (2)$$

- для кольцевого конического канала

$$\frac{\partial \delta^{**}}{\partial x} + \delta^{**} \frac{\partial}{\partial x} \ln[x \operatorname{tg} \theta_k \rho_\delta U_\delta^2] + \delta^* \frac{\partial}{\partial x} \ln U_\delta = C_f/2 + C_m; \quad (3)$$

- для кольцевого сферического канала

$$\frac{\partial \delta^{**}}{\partial x} + \delta^{**} \left[\frac{\partial}{\partial x} \ln(\rho_\delta U_\delta^2) + \frac{1}{R+H} \operatorname{ctg} \frac{x}{R+H} + \frac{2}{R+H} \frac{\partial \delta^*}{\partial x} \right] + \delta^* \frac{\partial}{\partial x} \ln U_\delta =$$

$$= C_f/2 + C_m + C_f \ln(R+H) \pm \left[\frac{\partial \delta^*}{\partial x} + C_m \left(1 - \frac{1}{\bar{U}_{1m}} \right) \right] \ln(R+H); \quad (4)$$

- для плоского прямолинейного канала

$$\frac{\partial \delta^{**}}{\partial x} + \delta^{**} \frac{\partial}{\partial x} \ln(\rho_\delta U_\delta^2) + \delta^* \frac{\partial}{\partial x} \ln U_\delta = C_f/2 + C_m; \quad (5)$$

- для плоского канала с продольной кривизной

$$\frac{\partial \delta^{**}}{\partial x} + \delta^{**} \left[\frac{\partial}{\partial x} \ln(\rho_\delta U_\delta^2) + \frac{2}{R+H} \frac{\partial \delta^*}{\partial x} \right] + \delta^* \frac{\partial}{\partial x} \ln U_\delta = C_f/2 + C_m + C_f \ln(R+H) \pm \left[\frac{\partial \delta^*}{\partial x} + C_m \left(1 - \frac{1}{\bar{U}_{1m}} \right) \right] \ln(R+H). \quad (6)$$

Здесь $C_f = 2\tau_\omega/\rho_\delta U_\delta^2$ — местный коэффициент трения; $C_m = \rho_\omega V_\omega U_{1m}/\rho_\delta U_\delta$ — относительная массовая скорость газа через поверхность.

Как уже отмечалось ранее [2], в области псевдоскачка имеются две зоны. Первая зона — это слой смешения, поглощающий изоэнтропическое ядро на участке $\delta_1 < \delta < h$, и вторая зона — с постоянной толщиной вязкого слоя $\delta = h$. Интегральные соотношения неразрывности записываются отдельно для указанных областей модели. В зоне $\delta_1 < \delta < h$ будем иметь:

- для кольцевого цилиндрического канала

$$\frac{q(M_\delta)}{q(M_{\delta_1})} = \frac{\delta_1 - \delta_1^*}{\delta - \delta^*} \exp \int_{\delta_1}^{\delta} \frac{\ln(r_0 + H \pm \delta)}{\delta - \delta^*} d\delta \times \exp \int_{\delta_1^*}^{\delta^*} \frac{\ln(r_0 + H \pm \delta^*)}{\delta^* - \delta} d\delta^*, \quad (7)$$

где M_δ — число Маха на границе вязкого слоя;

- для кольцевого конического канала

$$\frac{q(M_\delta)}{q(M_{\delta_1})} = \frac{\delta_1 - \delta_1^*}{\delta - \delta^*} \exp \int_{\delta_1}^{\delta} \frac{\ln\left(\frac{r_0+H}{\cos \theta_k} \pm \delta\right)}{\delta - \delta^*} d\delta \times \exp \int_{\delta_1^*}^{\delta^*} \frac{\ln((r_0+H)/\cos \theta_k \pm \delta^*)}{\delta^* - \delta} d\delta^*; \quad (8)$$

- для кольцевого сферического канала

$$\frac{q(M_\delta)}{q(M_{\delta_1})} = \frac{(\delta_1 - \delta_1^*)^{1 \pm (\delta_1 + \delta_1^*) / (R+H)}}{(\delta - \delta^*)^{1 \pm (\delta + \delta^*) / (R+H)}} \times \left[\frac{\sin(x_0 / (R+H))}{\sin(x / (R+H))} \right]^{1 / (R+H)} \times \exp \left[\pm \frac{(\delta + \delta^*) - (\delta_1 - \delta_1^*)}{R+H} \right]; \quad (9)$$

- для плоского прямолинейного канала

$$\frac{q(M_\delta)}{q(M_{\delta_1})} = \frac{\delta_1 - \delta_1^*}{\delta - \delta^*}; \quad (10)$$

- для плоского канала с продольной кривизной

$$\frac{q(M_\delta)}{q(M_{\delta_1})} = \frac{(\delta_1 - \delta_1^*)^{1 \pm (\delta_1 + \delta_1^*) / (R+H)}}{(\delta - \delta^*)^{1 \pm (\delta + \delta^*) / (R+H)}} \times \exp \left[\pm \frac{(\delta + \delta^*) - (\delta_1 - \delta_1^*)}{R+H} \right]; \quad (11)$$

или

$$\frac{q(M_\delta)}{q(M_{\delta_1})} = \frac{M_\delta}{M_{\delta_1}} \left[\frac{1 + (\gamma - 1) / 2 M_{\delta_1}^2}{1 + (\gamma - 1) / 2 M_\delta^2} \right]^{(\gamma+1) / 2(\gamma-1)}$$

На участке, где $\delta = h$, уравнения неразрывности примут вид:

- для кольцевого цилиндрического канала

$$\frac{q(M_\delta)}{q(M_{\delta_1})} = \left(\frac{\delta_1 - \delta_1^*}{h - \delta^*} \right)^{1 + \ln[(r_0 + H) - h]} \times \exp \left(\pm \frac{\delta_1^* - \delta^*}{r_0 + H - h} \right); \quad (12)$$

- для кольцевого конического канала

$$\frac{q(M_\delta)}{q(M_{\delta_1})} = \left(\frac{\delta_1 - \delta_1^*}{h - \delta^*} \right)^{1 + \ln[(r_0 + H) / \cos \theta_k - h]} \times \exp \left[\pm \frac{\delta_1^* - \delta^*}{(r_0 + H) / \cos \theta_k - h} \right]; \quad (13)$$

- для кольцевого сферического канала

$$\frac{q(M_\delta)}{q(M_{\delta_1})} = \frac{(\delta_1 - \delta_1^*) \sin(x_0 / (R+H))}{(h - \delta^*) \sin(x / (R+H))} \times \exp \left[\pm \frac{1}{R+H} \left(\delta^* - \delta_1^* - \ln \left(\frac{\delta_1^* - h}{\delta^* - h} \right)^h \right) \right]; \quad (14)$$

- для плоского прямолинейного канала

$$\frac{q(M_\delta)}{q(M_{\delta_1})} = \frac{\delta_1 - \delta_1^*}{h - \delta^*}; \quad (15)$$

- для плоского канала с продольной кривизной

$$\frac{q(M_\delta)}{q(M_{\delta_1})} = \frac{\delta_1 - \delta_1^*}{h - \delta^*} \times \exp \left[\pm \frac{1}{R+H} \left(\delta^* - \delta_1^* - \ln \left(\frac{\delta_1^* - h}{\delta^* - h} \right)^h \right) \right]. \quad (16)$$

Исходя из аналогии с методом К. К. Федяевского и др. [5], задававших профили касательных напряжений τ в сечениях турбулентного плоского пограничного слоя в виде степенного полинома, в первом приближении допустим, что и в криволинейных каналах касательные напряжения τ могут быть описаны аналогичным образом, т. е. в виде полинома

$$\frac{\tau}{\tau_\omega} = \sum_{n=0}^3 D_n \eta^n,$$

или

$$\frac{\tau}{\tau_\omega} = D_0 + D_1 \eta + D_2 \eta^2 + D_3 \eta^3, \quad (17)$$

удовлетворяющего следующим условиям на границах:

$$\begin{aligned} \eta = \frac{y}{\delta} = 0, \quad \frac{\tau}{\tau_\omega} = D_0, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\tau}{\tau_\omega} \right) = D_1; \\ \eta = 1, \quad \frac{\tau}{\tau_\omega} = D_0 + D_1 + D_2 + D_3, \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\tau}{\tau_\omega} \right) = D_1 + 2D_2 + 3D_3. \end{aligned} \quad (18)$$

Тогда уравнения касательных напряжений пограничного слоя для участка псевдоскачка, где присутствует сверхзвуковое невязкое ядро, имеют вид:

- для кольцевого цилиндрического канала

$$\frac{\tau}{\tau_\omega} = \left[1 - 3\eta^2 + 2\eta^3 + \frac{\delta}{\tau_\omega} \left(\frac{dP}{dx} + \rho_\omega u_\omega \frac{du_\omega}{dx} \right) \eta(1 - \eta)^2 \right] / \left[1 \pm \frac{\eta(1 - \eta)^2}{\bar{r}_0 + \bar{H}} \right]; \quad (19)$$

- для кольцевого конического канала

$$\frac{\tau}{\tau_w} = \left[1 - 3\eta^2 + 2\eta^3 + \frac{\delta}{\tau_w} \left(\frac{dP}{dx} + \rho_w u_w \frac{du_w}{dx} \right) \eta(1-\eta)^2 \right] / \left[1 \pm \frac{\eta(1-\eta)^2}{(\bar{r}_0 + \bar{H}) / \cos \theta_k} \right]; \quad (20)$$

- для кольцевого сферического и плоского канала с продольной кривизной

$$\frac{\tau}{\tau_w} = \left[1 - 3\eta^2 + 2\eta^3 + \frac{\delta}{\tau_w} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \rho_w u_w \frac{du_w}{dx} \right) \eta(1-\eta)^2 - \frac{\tau_w \rho \nu_{t-гм}}{\delta} \frac{\partial U_\delta}{\partial \eta} \times \right. \\ \left. \times \eta^2(3-2\eta) - \frac{\rho \nu_{t-гм}}{\tau_w \delta} \frac{\partial^2 U_\delta}{\partial \eta^2} \eta^2(1-\eta) \right] / \left[1 + \frac{2\eta(1-\eta)}{\bar{R} + \bar{H}} \right]. \quad (21)$$

2. РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ПСЕВДОСКАЧКА

При расчете параметров псевдоскачка с использованием интегральных методов течение в вязкой области описывается зависимостями, аналогичными для свободной (не ограниченной стенками канала) турбулентной, неизобарической, автомодельной струи. Профили скорости практически вдоль всего течения могут описываться некоторой универсальной функцией распределения дефекта скорости, не зависящей от трения о стенки канала и от продольного градиента давления:

$$\frac{u}{U_\delta} = 1 - \bar{U}_{1m} f_1(\eta), \quad (22)$$

где $f_1(\eta) = (U_\delta - u)/(U_\delta - u_w)$ — функция распределения дефекта скорости для плоских и осесимметричных течений обычно принимается равной

$$f_1(\eta) = 1 - 6\eta^2 + 8\eta^3 - 3\eta^4. \quad (23)$$

Изменения приведенной скорости вдоль оси канала $Cr_\delta = f(x)$ и относительного статического давления на стенке канала $\bar{P} = f(\bar{x})$ считаются известными. При расчете используются предположения о постоянстве статического давления поперек пограничного слоя и эмпирические константы (χ и k), входящие в формулы Прандтля, не зависят от продольного градиента давления.

Вязкий слой в области псевдоскачка считается турбулентным и рассчитывается по

«двухслойной» схеме. Внутренняя область, объединяющая в себя вязкий подслой, переходную область и область логарифмического профиля скорости, имеющая толщину примерно $(0,15...0,2) \bar{\delta}$ толщины всего слоя (при отсутствии градиента давления), описывается полуэмпирической гипотезой турбулентности Прандтля [6]

$$\tau = \rho \chi^2 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (24)$$

Для внешней области, занимающей по толщине примерно $(0,8...0,85) \bar{\delta}$ толщины слоя, с профилем скорости по форме напоминающим струйный, гипотеза турбулентности Прандтля имеет вид

$$\tau = \rho k \delta (U_\delta - u_m) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (25)$$

Решение поставленной задачи основывается на методе интегральных соотношений. В результате расчета определяются формпараметр \bar{U}_{1m} , относительная толщина вязкого слоя $\bar{\delta}$, относительные интегральные толщины $\bar{\delta}^*$ и $\bar{\delta}^{**}$ в функции продольной координаты, а также строятся профили продольной скорости.

Для описания профиля скорости воспользуемся методом параметризации касательных напряжений и запишем окончательный вид уравнений:

- для пристенного (внутреннего) слоя

$$\frac{u}{U_\delta} = \frac{1}{\chi M_\delta \sqrt{\gamma P \bar{\rho}}_{\eta_w}} \int_{\eta_w}^{\eta_m} \left[C_f (1/(\eta^2 + 2\eta - 3)) + \bar{\delta} \frac{d\bar{P}}{d\bar{x}} \frac{(1-\eta)^2}{\eta} \right]^{1/2} d\eta; \quad (26)$$

- для внешней области плоского прямолинейного канала

$$\frac{u}{U_\delta} = 1 - \bar{U}_{1m} \left[1 - \frac{1}{4k\bar{\rho}(\bar{U}_{1m})^2} (C_f(2\eta - 2\eta^3 + \eta^4) + \psi(6\eta^2 - 8\eta^3 + 3\eta^4)) \right], \quad (27)$$

где

$$\psi = \frac{\delta}{3\gamma \bar{P} M_\delta^2} \left[\frac{d\bar{P}}{d\bar{x}} + \bar{\rho} \gamma \bar{P} M_\delta^2 (1 - \bar{U}_{1m}) \times \left((1 - \bar{U}_{1m}) \frac{d \ln Cr_\delta}{d\bar{x}} - \frac{d\bar{U}_{1m}}{d\bar{x}} \right) \right].$$

Из (27) легко получить выражение для функции распределения дефекта скорости

$$f_2(\eta) = 1 - \frac{C_f}{C_f + \psi} \left[C_f(2\eta - 2\eta^3 + \eta^4) + \frac{\psi}{C_f + \psi} (6\eta^2 - 8\eta^3 + 3\eta^4) \right]. \quad (28)$$

В точке отрыва, где $C_f = 0$, $\bar{U}_{1m} = 1$, $\delta/(12k\rho PM_\delta^2) d\bar{P}/d\bar{x} = 1$, функция $f_2(\eta)$ имеет вид

$$f_2(\eta) = 1 - 6\eta^2 + 8\eta^3 - 3\eta^4, \quad (29)$$

т. е. адекватна функции распределения дефекта скорости для струйного, турбулентного, неограниченного стенками канала течения (23). В начальном и конечном сечениях псевдоскачка, где $dP/dx = 0$, $\bar{U}_{1m} = \bar{U}_{1m}(x) = \text{const}$, функция $f_2(\eta)$ запишется как

$$f_2(\eta) = 1 - 2\eta + 2\eta^3 - \eta^4. \quad (30)$$

Для внутренней области вязкого слоя в кольцевом канале профиль скорости имеет вид

$$\frac{u}{U_\delta} = \frac{1}{\chi M_\delta \sqrt{\gamma \bar{P} \bar{\rho}}} \int_{\eta_w}^{\eta_m} \left[\frac{C_f}{2} (2\eta + 1/\eta^2 - 3) \times \left(1 + \frac{\eta(1-\eta)^2}{\bar{r}_0 + \bar{H}} \right) + \delta \frac{d\bar{P}}{d\bar{x}} \frac{(1-\eta)^2}{\eta(1+\eta(1-\eta)^2/(\bar{r}_0 + \bar{H}))} \right]^{1/2} d\eta. \quad (31)$$

Для внешней области вязкого слоя кольцевого канала профиль скорости записывается как

$$\frac{u}{U_\delta} = 1 - \bar{U}_{1m} + \frac{\bar{r}_0 + \bar{H}}{2k\bar{U}_{1m}\bar{\rho}} \int_{\eta_m}^1 \left[C_f \frac{(1-3\eta^2+2\eta^3)}{\bar{r}_0 + \bar{H} + (1-\eta)^2\eta} + 6\psi \frac{(1-\eta)^2}{\bar{r}_0 + \bar{H} + \eta(1-\eta)^2} \right] d\eta. \quad (32)$$

Таким образом, из рассматриваемой приближенной методики расчета профилей скорости в области псевдоскачка следует, что продольный градиент давления $d\bar{P}/d\bar{x}$ и местный коэффициент трения C_f не оказывают

влияния на форму профиля скорости только в поперечных сечениях, соответствующих точке отрыва, началу и концу псевдоскачка. Во всех остальных сечениях при расчете профиля скорости внешней области вязкого слоя необходимо учитывать продольный градиент давления и влияние трения о стенки канала.

Из уравнений (27) и (11) при условии $\eta = 1$ и $u = U_\delta$ получим дифференциальные уравнения изменения формпараметра профиля скорости вдоль псевдоскачка:

- для течения в плоском канале в виде

$$\frac{d\bar{U}_{1m}}{d\bar{x}} = \left(3 \frac{C_f}{\delta} + \frac{1}{\gamma \bar{P} M_\delta^2} \frac{d\bar{P}}{d\bar{x}} \right) \frac{1}{\bar{\rho}(1-\bar{U}_{1m})} - \frac{12k\bar{U}_{1m}^2}{\delta(1-\bar{U}_{1m})} + (1-\bar{U}_{1m}) \frac{d \ln Cr_\delta}{d\bar{x}}; \quad (33)$$

- для течения в цилиндрическом канале как

$$\frac{d\bar{U}_{1m}}{d\bar{x}} = C_f \frac{q_1}{2\bar{\rho}\delta(1-\bar{U}_{1m})q_2} - \frac{\bar{U}_{1m}^2 k}{\delta(1-\bar{U}_{1m})q_2} + \frac{1}{\bar{\rho}(1-\bar{U}_{1m})\gamma \bar{P} M_\delta^2} \frac{d\bar{P}}{d\bar{x}} + (1-\bar{U}_{1m}) \frac{d \ln Cr_\delta}{d\bar{x}}, \quad (34)$$

где

$$q_1 = \int_0^1 (1-3\eta^2+2\eta^3) / \left(1 \pm \frac{\eta(1-\eta)^2}{\bar{r}_0 + \bar{H}} \right) d\eta;$$

$$q_2 = \int_0^1 \eta(1-\eta)^2 / \left(1 \pm \frac{(1-\eta)^2\eta}{\bar{r}_0 + \bar{H}} \right) d\eta.$$

Для численного решения уравнений (26), (27), (31)–(34) необходимо определить закономерности изменения толщины вязкого слоя δ и местного коэффициента трения C_f вдоль псевдоскачка. В первом приближении из соображений безотрывности течения в классическом псевдоскачке примем местный коэффициент трения C_f постоянным вдоль всего псевдоскачка ($C_f = 0,003$), а изменение относительной толщины вязкого слоя $\bar{\delta}$ выразим в виде кусочной функции. На участке $\delta_1 < \bar{\delta} < 0,5$

- для плоского канала в виде

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}^* + (\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_1^*) \frac{q(M_{\delta_1})}{q(M_\delta)}; \quad (35)$$

- для кольцевого канала

$$\frac{d\bar{\delta}}{d\bar{x}} = (M_{\delta}^2 - 1) \frac{\bar{\delta} - \bar{\delta}^*}{1 + \ln(\bar{r}_0 + \bar{H} + \bar{\delta})} Cr_{\delta} \frac{dCr_{\delta}}{d\bar{x}} + \frac{1 + \ln(\bar{r}_0 + \bar{H} + \bar{\delta}^*)}{1 + \ln(\bar{r}_0 + \bar{H} + \bar{\delta})} \frac{d\bar{\delta}^*}{d\bar{x}}. \quad (36)$$

Согласно экспериментальным данным [7], в области псевдоскачка относительная скорость на оси течения описывается выражением

$$Cr_{\delta} = Cr_{\delta_1} \exp \left(-2 \ln \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} Cr_{\delta_1} \right) \frac{\bar{x}}{\bar{l}_{neck}} \right),$$

критический режим течения наступит на расстоянии $\bar{x}_{кр}$ от начала псевдоскачка

$$\bar{x}_{кр} = -\bar{l}_{neck} \frac{Cr_{\delta_{кр}}}{Cr_{\delta_1}} / 2 \ln \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} Cr_{\delta_1} \right). \quad (37)$$

Относительная толщина вытеснения в критическом сечении $\bar{\delta}_{кр}^*$ будет определяться по выражениям:

- для плоского течения как

$$\bar{\delta}_{кр}^* = 0,5 - (\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_1^*) q(M_{\delta_1}); \quad (38)$$

- для течения в кольцевом канале

$$\frac{d\bar{\delta}_{кр}^*}{d\bar{x}} = (0,5 - \bar{\delta}_{кр}^*) \times \frac{1 - M_{\delta}^2}{1 + \ln(\bar{r}_0 + \bar{H} + \bar{\delta}_{кр}^*)} \frac{d \ln Cr_{\delta}}{d\bar{x}}. \quad (39)$$

Одно из основных допущений предлагаемой методики расчета состоит в том, что на участке равномерного сверхзвукового ядра предполагается изменение относительной толщины вытеснения $\bar{\delta}^*$ по линейному закону от $\bar{\delta}_1^*$ до $\bar{\delta}_{кр}^*$ в виде

$$\bar{\delta}^* = \bar{\delta}_1^* + \frac{\bar{\delta}_{кр}^* - \bar{\delta}_1^*}{\bar{x}_{кр}} \bar{x}. \quad (40)$$

На участке $\bar{\delta} > 0,5$ толщину вязкого слоя будем считать постоянной $\bar{\delta} = 0,5$, а толщина вытеснения будет определяться:

- для плоского течения из выражения

$$\bar{\delta}^* = 0,5 - (\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_1^*) \frac{q(M_{\delta_1})}{q(M_{\delta})}; \quad (41)$$

- для течения в кольцевом канале

$$\frac{d\bar{\delta}^*}{d\bar{x}} = (0,5 - \bar{\delta}^*) \frac{1 - M_{\delta}^2}{1 + \ln(\bar{r}_0 + \bar{H} + \bar{\delta}^*)} \frac{d \ln Cr_{\delta}}{d\bar{x}}. \quad (42)$$

Соотношение (40) является упрощенным и может уточняться в дальнейшем. Относительная толщина потери импульса определяется в виде

$$\frac{d\bar{\delta}^{**}}{d\bar{x}} + \bar{\delta}^{**} \frac{d}{d\bar{x}} \ln(\gamma \bar{P} M_{\delta}^2) + \bar{\delta}^* \frac{d \ln Cr_{\delta}}{d\bar{x}} = \frac{C_f}{2}. \quad (43)$$

Для решения дифференциальных уравнений (33), (34), (36), (39), (42) и (43) начальные условия выбирались согласно предположению, что начальный профиль скорости псевдоскачка можно описать степенной зависимостью вида

$$\frac{u}{U_{\delta}} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7}. \quad (44)$$

Тогда начальные (при $\bar{x}_1 = 10^{-6}$) интегральные характеристики можно определить из выражений

$$\frac{\delta^*}{\delta} = 1 - 7(D-1) \frac{D^3}{2 \ln(D/(D-1))} - \frac{D^2}{2} - \frac{D}{4} - \frac{1}{6}; \quad (45)$$

$$\frac{\delta^{**}}{\delta} = 1 - \frac{\delta^*}{\delta} - 7(D-1) \frac{D^{7/2}}{2 \ln((\sqrt{D}+1)/(\sqrt{D}-1))} - D^3 - \frac{D^2}{3} - \frac{D}{5} - \frac{1}{7}, \quad (46)$$

$$\text{где } D = 1 + \frac{1}{(\gamma-1)/2M_1^2}.$$

Численный расчет приведенных выше дифференциальных уравнений осуществлялся по методу Рунге-Кутты с начальными условиями $\bar{x}_1 = 10^{-6}$ и $(\bar{U}_{1m})_1 = 0,236$, с шагом $d\bar{x} = 0,17$. Определенные интегралы рассчитывались численным способом по методу Симпсона, причем нижний предел интеграла принимался на некотором расстоянии от стенки канала, где средняя скорость течения $u = 0$, $\eta_{\omega} = (30 \div 70) \delta \frac{\nu_t}{U_{\delta} \sqrt{C_f/2}}$, верхний предел соответствовал наружной границе внутренней турбулентной зоны и определялся как $\eta_m = 0,15$.

Склеяка внутренней и внешней турбулентных зон в первом приближении производилась только по равенству скоростей ($U_{m+} = U_{m-}$) и показана на рис. 1. Расчеты производились при начальных условиях

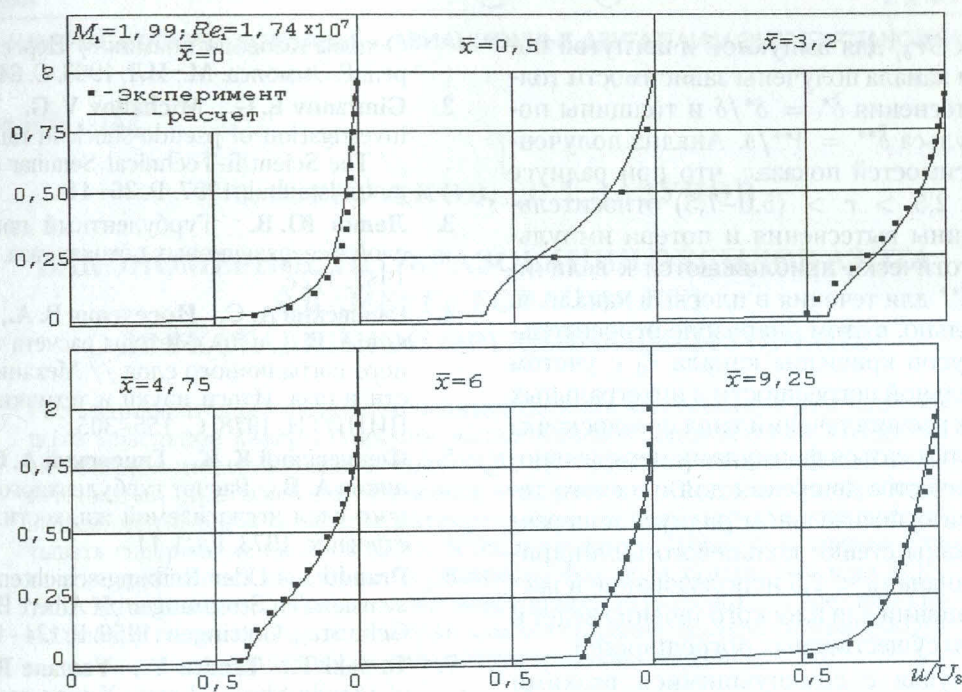


Рис. 1. Склейка профилей скорости внутренней и внешней областей вязкого слоя в некоторых сечениях псевдоскачка

$M_1 = 1,99$; $Re_1 = 1,74 \times 10^7$; $\bar{\delta}_1 = 0,3$ для течения в плоском канале (рис. 2). Анализ результатов показывает, что полученные при расчете зависимости $\bar{U}_{1m} = f(\bar{x})$ и $u/U_\delta = f(\eta)$ достаточно хорошо соответствуют экспериментальным данным [7].

Наряду с расчетами параметров торможения в псевдоскачке с определенными начальными условиями были выполнены расчеты изменения формпараметра \bar{U}_{1m} и интегральных характеристик вдоль псевдоскачка в диапазоне чисел Маха $M_1 = 2,0-3,593$ при различных толщинах вязкого слоя $\bar{\delta}_1 = 0,30-0,5$.

Расчеты показали, что в заданном диапазоне чисел Маха и начальных относительных толщин пограничного слоя отрывные течения отсутствуют, что согласуется с экспериментальными исследованиями классического псевдоскачка.

Исследовалось влияние поперечной кривизны стенок канала на значения относительных толщин вытеснения и потери импульса в струйной области псевдоскачка. Для этого на примере струйного профиля скорости для предотрывной области, где $\bar{U}_{1m} = 1$, в функции поперечной кривизны \bar{r}_0 при различных

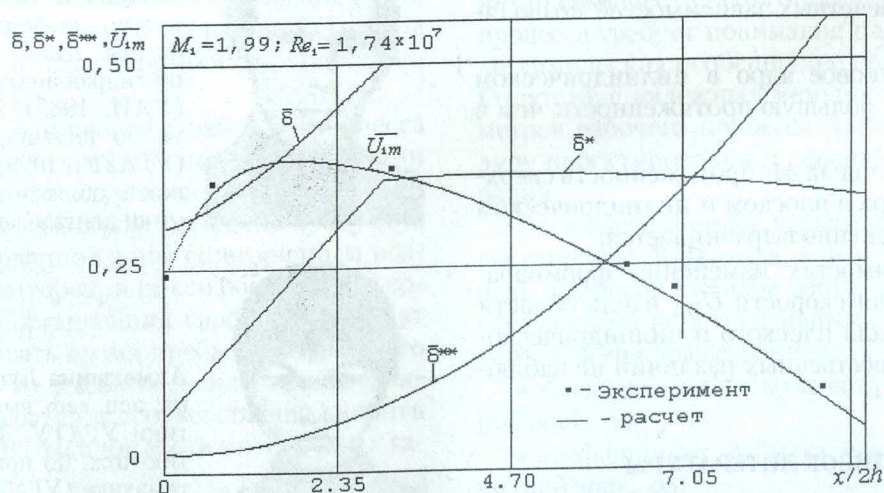


Рис. 2. Сравнение расчетных и экспериментальных значений формпараметра вязкого сверхзвукового потока газа в псевдоскачке при начальных условиях: $M_1 = 1,99$, $Re_1 = 1,74 \times 10^7$, $\bar{\delta}_1 = 0,3$

значениях Cr_{δ_1} для выпуклой и вогнутой поверхности канала получены зависимости толщины вытеснения $\bar{\delta}^* = \delta^*/\delta$ и толщины потери импульса $\bar{\delta}^{**} = \delta^{**}/\delta$. Анализ полученных зависимостей показал, что при радиусе кривизны $2,5 > r > (5,0-7,5)$ относительные толщины вытеснения и потери импульса асимптотически приближаются к величинам $\bar{\delta}^*$ и $\bar{\delta}^{**}$ для течения в плоском канале, и, следовательно, в этом диапазоне относительных радиусов кривизны канала \bar{r}_0 с учетом незначительной погрешности в интегральных методиках расчета течений типа псевдоскачка можно пользоваться формулами неразрывности и количества движения для плоского течения. При относительном радиусе поперечной кривизны стенки кольцевого цилиндрического канала $r_0 < 2,5$ использование в расчетах уравнений для плоского течения ведет к появлению существенных погрешностей.

Для случая с сомкнувшимися вязкими слоями в начальном сечении области торможения получены зависимости формпараметра профиля скорости вдоль псевдоскачка при числе Маха $M_1 = 2$ и относительной кривизне стенок \bar{r}_0 . Показано, что на вогнутой поверхности влияние кривизны стенки на величину формпараметра профиля скорости незначительно и в определенных случаях, например, при предварительных расчетах, поперечную кривизну канала можно не учитывать, чего нельзя сказать об изменении формпараметра профиля скорости на выпуклой поверхности. Здесь при уменьшении относительной кривизны стенки использование уравнений плоского течения недопустимо.

ВЫВОДЫ

Анализ расчетных зависимостей позволяет заключить:

- сверхзвуковое ядро в цилиндрическом канале имеет большую протяженность, чем в плоском;
- с ростом числа M_1 протяженность сверхзвукового ядра в плоском и цилиндрическом каналах постепенно выравнивается;
- в зависимостях изменения формпараметра профиля скорости \bar{U}_{1m} вдоль области торможения для плоского и цилиндрического канала существенных различий не наблюдается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крокко Л. Одномерное рассмотрение газовой динамики установившихся течений //

Основы газовой динамики / Пер. с англ.; Под ред. Г. Эммонса. М.: ИЛ, 1963. С. 64–324.

2. Gimranov E. G., Michailov V. G. Theoretical investigation of pseudo-shock in ramjet engine // The Scientific-Technical Seminar on GT Engines. Istanbul, 1997. P. 26–41.
3. Лапин Ю. В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М.: Наука, 1982. 312 с.
4. Гиневский А. С., Иоселевич В. А., Колесников А. В. и др. Методы расчета турбулентного пограничного слоя // Механика жидкости и газа. Итоги науки и техники. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978. С. 155–305.
5. Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1973. Гл. 1, 11.
6. Prandtl L. Uder Reibungsschichten bei dreidimensionalen Stromungen // Albert Betz zum 60 Geburtstag. Göttingen, 1956. P. 134–141.
7. Tamaki T., Tamita Y., Yamane R. Study of Pseudo-Shock. 2-rept. X-tupe pseudo-shock. Bull. // JSME, 1971. No 74. P. 807–817.

ОБ АВТОРАХ



Гимранов Эрнст Гайсович, профессор кафедры прикладной гидромеханики УГАТУ. Дипл. инж.-механик по авиационным двигателям (УАИ, 1965). Д-р техн. наук по тепловым двигателям (УАИ, 1990). Исследования в области газовой динамики двигателей.



Михайлов Валерий Германович, профессор той же кафедры. Дипл. инж.-механик по гидравлическим машинам (УАИ, 1985). Д-р техн. наук по тепловым двигателям (УГАТУ, 1999). Исследования в области газовой динамики двигателей.



Ахметшина Луиза Рашитовна, асп. каф. высшей математики УГАТУ. Дипл. математик-инж. по прикладной математике (УГАТУ, 2001). Готовит диссертацию в области математической физики.