Уфа: УГАТУ, 2004 Вестник УГАТУ Т. 5, № 1 (9). С. 109–117

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.938

А. З. АСАНОВ, Б. Г. ИЛЬЯСОВ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ ПРИ НЕМИНИМАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ РЕГУЛЯТОРА И ПРЕДКОМПЕНСАТОРА

На основе технологии вложения систем синтезированы законы управления линейной динамической системой в виде линейных матричных уравнений относительно искомых матриц регулятора и предкомпенсатора. *Динамическая система; аналитическое конструирование; технология вложения систем*

ВВЕДЕНИЕ

Синтез управлений современными техническими системами представляет собой весьма сложную задачу в силу их многосвязности, нестационарности, нелинейности и т. д. Эти свойства управляемых объектов (систем) требуют применения сложных алгоритмов управления. При этом требования к проектируемой системе чаще всего задаются в частотной области, а реализации управлений ищутся в виде передаточных функций, т. е. в виде минимальных реализаций управлений (управляющих устройств) [1].

Анализ задач линейного управления [2], для которых имеются те или иные методы решения, показывает, что многие из них обусловлены ограничениями и допущениями, приводящими к сужению получаемых классов решений задач. Так, например, методы синтеза модального управления формируют односвязные регуляторы; полюсы системы рассматриваются в совокупности, оторванной от передаточных функций между конкретными входами и выходами системы; большинство методов синтеза модального управления не учитывают нули передаточных функций и их взаимное расположение и т. д. В то же время известно, что типы нулей динамической системы различны [3], что системы с неотрицательными нулями ограничены в возможностях. Так, например, максимальная достижимая точность оптимальных регуляторов фильтров зависит от отсутствия в системе нулей с положительной действительной частью (неминимально-фазовых нулей) [4], наличие у системы нуля в начале координат не позволяет решать задачу статического развязывания, введения интегральной обратной связи [5, 6] и т. д.

Известно, что передаточные нули инвариантны относительно действия обратной связи [5], но их значения можно изменить путем соответствующего выбора элементов матрицы входа (выхода). Тогда представляется рациональным использование комбинации классических компенсационных методов коррекции с методами модального управления, названной методом компенсационно-модального управления [7]. Суть метода заключается в совместном использовании в системе последовательного корректирующего устройства и модальной обратной связи при разумном сочетании эффекта компенсации передаточных нулей и полюсов системы и свойства инвариантности передаточных нулей системы по отношению к замыканию ее обратной связью по состоянию. Обобщенная структурная схема (одна из возможных) квазиадаптивной системы с компенсационно-модальным управлением представлена на рис.1. Здесь предкомпенсатор с матрицами $A_{\text{пр}}$, $B_{\text{пр}}$, $C_{\text{пр}}$, $D_{\text{пр}}$ играет роль последовательного корректирующего устройства, регулятор с матрицами $A_{\text{р}}$, $B_{\text{р}}$, $C_{\text{р}}$, $D_{\text{р}}$ формирует модальную обратную связь.

Трудностей, возникающих при синтезе управлений из-за введения обратной связи в систему с нежелательными нулями, можно избежать, если на начальной стадии проектирования, когда существует некоторая свобода при выборе структуры, задать структуру компенсационно-модального управления, учитывающую в том числе и нули системы, и провести совместный (одновременный) синтез предкомпенсатора и регулятора. По существу это будет означать синтез управлений по

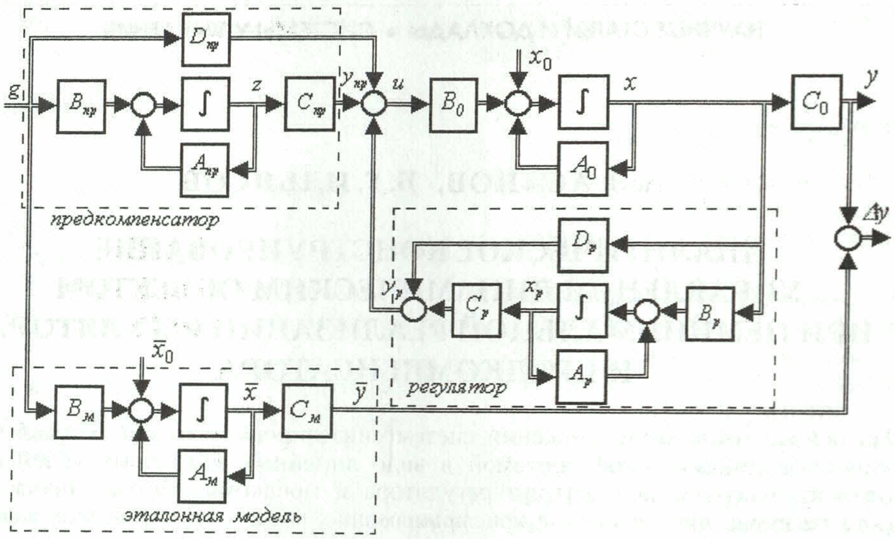


Рис. 1. Структурная схема обобщенной системы управления

желаемым матричным передаточным функциям [2]. Выбор желаемых матричных передаточных функций должен осуществляться предварительно на основе каких-либо инженерных соображений и характеризовать влияние различных факторов (управляющих воздействий, начальных условий и т. д.) на формирование выходных реакций системы.

Техническая реализация передаточных функций управляющих устройств, получаемых при синтезе управлений динамическим объектом, сложна и без использования современных микропроцессорных систем практически невозможна. Тогда очевидно, что и сами алгоритмы преобразований в управляющих устройствах желательно получить не в виде передаточных функций, а в виде, например, разностных уравнений, легко реализуемых на дискретных вычислительных устройствах. Наиболее близкими аналогами разностных уравнений являются дифференциальные уравнения в нормальной форме Коши, с которыми к тому же легко оперировать при решении задачи синтеза управлений. Поэтому искомые описания управляющих устройств целесообразно искать в виде матричных дифференциальных уравнений относительно переменных состояния.

Для решения задачи синтеза линейного управления, свободной от многих вышеописанных традиционных ограничений, представляется целесообразным и эффективным использование технологии вложения в произвольные образы [6, 8 и др.]. В данной работе желаемое поведение замкнутой системы аппроксимировалось поведением эталонной модели в пространстве состояний (матрицы $A_{\text{м}}$, $B_{\text{м}}$, $C_{\text{м}}$), управляющие устройства (предкомпенсатор и регулятор (модальный)) — матричными уравнениями в пространстве состояний (матрицы $A_{\text{пр}}$, $B_{\text{пр}}$, $C_{\text{пр}}$, $D_{\text{пр}}$, $A_{\text{р}}$, $B_{\text{р}}$, $C_{\text{р}}$, $D_{\text{р}}$), а цель управления традиционно выражалась в терминах минимальной реализации — в виде матричных передаточных функций.

1. ОБЪЕКТ, ЗАКОН И ЦЕЛЬ СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЯ

Пусть поведение объекта управления описывается следующими уравнениями:

$$\begin{gathered}\dot{x} = A_0 x + B_0 u; \quad x(t_0) = x_0;\\ y = C_0 x;\\ x \in R^n, \quad y \in R^m, \quad u \in R^s,\end{gathered} \tag{1}$$

где x — вектор состояния, u — вектор управляющих воздействий, подаваемых на вход объекта, y — вектор выходных реакций системы, x_0 — вектор начальных состояний.

Динамические свойства объекта определяются заданием тройки матриц (A_0, B_0, C_0) соответствующих размеров.

Рассмотрим закон управления по состоянию в виде неминимальной реализации, когда он задан уравнением $y_{\text{пр}} = y_{\text{р}} + u$, где регулятор и предкомпенсатор описываются соответственно уравнениями:

$$\begin{gathered}\dot{x}_{\text{р}} = A_{\text{р}} x_{\text{р}} + B_{\text{р}} x; \quad x_{\text{р}}(t_0) = x_{\text{р}0};\\ y_{\text{р}} = C_{\text{р}} x_{\text{р}} + D_{\text{р}} x;\\ x_{\text{р}} \in R^r; \quad x \in R^n; \quad y_{\text{р}} \in R^s;\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &\dot{z} = A_{\text{пр}}z + B_{\text{пр}}g; \quad z(t_0) = z_0; \\ &y_{\text{пр}} = C_{\text{пр}}z + D_{\text{пр}}g; \\ &z \in R^p; \quad g \in R^k; \quad y_{\text{пр}} \in R^s. \end{aligned} \tag{3}$$

Матрицы $A_{\text{р}}$, $B_{\text{р}}$, $C_{\text{р}}$, $D_{\text{р}}$, $A_{\text{пр}}$, $B_{\text{пр}}$, $C_{\text{пр}}$, $D_{\text{пр}}$ имеют соответствующие размеры.

Чаще всего в линейных динамических системах ставится задача обеспечения некоторого заранее заданного размещения всех или части полюсов и/или нулей замкнутой системы «объект–закон управления» на комплексной плоскости. При более жестких условиях требуется обеспечить не только заданное множество полюсов и нулей, но и структуру их распределения между конкретными воздействиями на систему и конкретными выходными реакциями. Наиболее простой и удобной формой задания распределения корней и полюсов синтезируемой системы является, видимо, задание желаемых матричных передаточных функций. Это возможно при условии, что цель синтеза управления может быть выражена в терминах минимальной реализации, т.е. в виде матричных передаточных функций. При синтезе управлений сложными объектами для описания желаемого поведения синтезируемой системы часто применяется эталонная модель [1].

В данной работе рассматривается случай, когда цель управления выражается в терминах неминимальной реализации – желаемая модель поведения синтезируемой замкнутой системы описывается в пространстве состояний уравнениями

$$\begin{aligned} &\dot{\bar{x}} = A_{\text{м}}\bar{x} + B_{\text{м}}g; \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0; \\ &\bar{y} = C_{\text{м}}\bar{x}; \\ &\bar{x} \in R^n; \quad g \in R^k; \quad y \in R^m. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь полагаем, что тройка матриц $A_{\text{м}}$, $B_{\text{м}}$, $C_{\text{м}}$ имеет соответствующие размеры.

В общем случае движение любой замкнутой линейной динамической системы представляет собой сумму свободной и вынужденной составляющих: свободная составляющая – реакция на начальные условия; вынужденная составляющая – реакция на внешние воздействия.

$$y = E_y^0(p)x_0 + E_y^g(p)g,$$

где $E_y^0(p)$ – матричная передаточная функция от начального условия x_0 к выходу, $E_y^g(p)$ – матричная передаточная функция от управляющих воздействий к выходу.

Полюсы и нули системы являются характеристиками матричных передаточных функций $E_y^0(p)$ и $E_y^g(p)$. Поэтому задание этих матричных передаточных функций означает фиксацию всей совокупности полюсов и нулей замкнутой линейной системы.

В случае использования эталонной модели для задания желаемого поведения системы (обобщенная структурная схема представлена на рис. 1) при синтезе законов управления следует исходить из того, что заданы требования (условия) на сигнал (вектор) рассогласования Δy:

$$\Delta y = E^0_{\Delta y}(p)x_0 + E^g_{\Delta y}(p)g = \Delta y_{\text{с}} + \Delta y_{\text{в}},$$

$$\Delta y_{\text{с}} = y_{\text{с}} - \bar{y}_{\text{с}} = E_y^0(p)x_0 - E_{\bar{y}}^{\bar{0}}(p)\bar{x}_0, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \Delta y_{\text{в}} &= y_{\text{в}} - \bar{y}_{\text{в}} = E_y^g(p)g - E_{\bar{y}}^g(p)g = \\ &= \left(E_y^g(p) - E_{\bar{y}}^g(p)\right)g = E^g_{\Delta y}(p)g, \end{aligned} \tag{6}$$

где $E_y^0(p)$ – матричная передаточная функция от начального условия x_0 объекта к выходу, $E_{\bar{y}}^{\bar{0}}(p)$ – матричная передаточная функция от начального условия $\bar{x}_0$ эталонной модели к выходу, $E^g_{\Delta y}(p)$ – матричная передаточная функция от вектора внешних управляющих воздействий к рассогласованию выходных координат объекта и модели.

Аналогично, свободная и вынужденная составляющие сигнала рассогласования состояний могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta x_{\text{с}} &= E_x^0(p)x_0 - E_{\bar{x}}^0(p)x_0 = \\ &= \left(E_x^0(p) - E_{\bar{x}}^0(p)\right)x_0 = E^0_{\Delta x}(p)x_0, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \Delta x_{\text{в}} &= E_x^g(p)g - E_{\bar{x}}^g(p)g = \\ &= \left(E_x^g(p) - E_{\bar{x}}^g(p)\right)g = E^g_{\Delta x}(p)g. \end{aligned} \tag{8}$$

Требования обеспечения заданного поведения различных составляющих рассогласований (5)–(8) и будут рассматриваться в качестве функций качества. Фактически это означает требование обеспечения желаемого вида матричных передаточных функций $E^g_{\Delta y}(p)$, $E^0_{\Delta y}(p)$, $E^g_{\Delta x}(p)$, $E^0_{\Delta x}(p)$.

Задача синтеза управления линейным динамическим объектом будет заключаться в том, чтобы найти четверки матриц ($A_{\text{р}}$, $B_{\text{р}}$, $C_{\text{р}}$, $D_{\text{р}}$) и ($A_{\text{пр}}$, $B_{\text{пр}}$, $C_{\text{пр}}$, $D_{\text{пр}}$), при которых матричные передаточные функции для свободной и вынужденной составляющих рассогласования имели бы заданный вид.

Использование матриц $A_{\text{пр}}$, $B_{\text{пр}}$, $C_{\text{пр}}$, $D_{\text{пр}}$, $A_{\text{р}}$, $B_{\text{р}}$, $C_{\text{р}}$, $D_{\text{р}}$ для формирования закона управления позволяет говорить о неминимальной реализации закона управления.

2. ПРОМАТРИЦА, МАТРИЦЫ ВЛОЖЕНИЯ И ТЕХНОЛОГИЯ ВЛОЖЕНИЯ

В соответствии со структурой системы (рис.1) запишем в матричном операторном виде уравнения системы:

$$
\begin{gathered}
(pI_n - A)_0\, x - B_0 u = x_0;\\
-C_0 x + y = 0;\\
(pI_n - A_{\text{м}})\, \bar{x} - B_{\text{м}} g = \bar{x}_0;\\
-C_{\text{м}} \bar{x} + \bar{y} = 0;\\
(pI_{\text{р}} - A_{\text{пр}})\, z - B_{\text{пр}} g = z_0;\\
-C_{\text{пр}} z + y_{\text{пр}} - D_{\text{пр}} g = 0;\\
y_{\text{пр}} = y_{\text{р}} + u;\\
-B_p x + (pI_r - A_p)\, x_p = x_{p0};\\
-D_p x - C_p x_p + y_p = 0.
\end{gathered}
$$

Дополнив эту систему уравнений регуляризирующим тождеством $g = g$, можно получить следующее матричное уравнение:

$$
\Omega \begin{bmatrix} x^T & \bar{x}^T & y^T & \bar{y}^T & x_p^T & y_p^T & x_{np}^T & y_{\text{пр}}^T & g^T \end{bmatrix}^T =
$$

$$
= \begin{bmatrix} x_0^T & \bar{x}_0^T & 0 & 0 & x_{p0}^T & 0 & x_{np0}^T & 0 & g^T \end{bmatrix}^T,
$$

где

$$
\Omega = \left[\begin{matrix}
(pI_n - A_0) & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & (pI_n - A_{\text{м}}) & 0 & 0 & 0\\
-C_0 & 0 & I_m & 0 & 0\\
0 & -C_{\text{м}} & 0 & I_m & 0\\
-B_p & 0 & 0 & 0 & (pI_r - A_p)\\
-D_p & 0 & 0 & 0 & -C_p\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{matrix}\right.
\left.\begin{matrix}
B_0 & 0 & -B_0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -B_{\text{м}}\\
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\
I_s & 0 & 0 & 0\\
0 & (pI_{\text{р}} - A_{\text{пр}}) & 0 & -B_{\text{пр}}\\
0 & -C_{\text{пр}} & I_s & -D_{\text{пр}}\\
0 & 0 & 0 & I_s
\end{matrix}\right].
$$

Матрица Ω называется проматрицей решаемой задачи и представляет собой блочную смешанную конструкцию, элементами которой являются $(pI_n - A_0)$, $(pI_n - A_{\text{м}})$, $(pI_r - A_p)$, $(pI_p - A_{np})$ — полиномиальные матрицы, остальные элементы матрицы — постоянные матрицы (в том числе и единичные и нулевые) соответствующих размеров. Проматрица описывает задачу управления при произвольной реализации объекта управления (1), при произвольной реализации эталонной модели (4) и при неминимальной реализации закона управления (2)–(3).

Обращение проматрицы приводит к матрице, называемой репроматрицей (реверсивной проматрицей)

$$
\Omega^{-1} = \begin{bmatrix}
E_x^0 & E_x^{\bar{0}} & \dots & E_x^{y_{np}} & E_x^g\\
E_{\bar{x}}^0 & E_{\bar{x}}^{\bar{0}} & \dots & E_{\bar{x}}^{y_{np}} & E_{\bar{x}}^g\\
E_y^0 & E_y^{\bar{0}} & \dots & E_y^{y_{np}} & E_y^g\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & \dots & 0 & I_l
\end{bmatrix}.
$$

Здесь представлены условные обозначения некоторых частных передаточных функций, интересующие нас в данном исследовании ($E_\xi^\mu(p)$ — матричная передаточная функция от параметра μ к параметру ξ).

Вложение системы в некоторый образ сводится к формальному сопоставлению произвольной сложной (многосвязной) системы, описываемой проматрицей Ω, и некоторой скалярной (произвольной) системы с передаточной функцией ω [6]: $\beta\Omega^{-1}\alpha = \omega$, где α, β — матрицы вложения, определяющие место исследуемой матричной передаточной функции в Ω^{-1}, ω — образ системы.

Образом системы названа передаточная функция более простой системы, с которой отождествляется определенный фрагмент синтезируемой системы. В рассматриваемой задаче матрицы вложения, определяющие место рассматриваемого фрагмента синтезируемой системы в репроматрице, имеют вид:

$$
\begin{gathered}
\beta = \begin{bmatrix} I_n & -I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\\
\alpha = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,\\
\text{при}\quad \omega = E_{\Delta x}^0(p),
\end{gathered}
\tag{9}
$$

$$
\begin{gathered}
\beta = \begin{bmatrix} I_n & -I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\\
\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_s \end{bmatrix}^T,\\
\text{при}\quad \omega = E_{\Delta x}^g(p),
\end{gathered}
\tag{10}
$$

$$\beta = \left[\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & I_m & -I_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$
$$\alpha = \left[\begin{array}{cccccccccc} I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]^T,$$
$$\text{при} \quad \omega = E^0_{\Delta y}(p), \tag{11}$$

$$\beta = \left[\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & I_m & -I_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$
$$\alpha = \left[\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_s \end{array}\right]^T,$$
$$\text{при} \quad \omega = E^g_{\Delta y}(p). \tag{12}$$

Для решения задачи синтеза в соответствии с положениями технологии вложения систем необходимо осуществить конструктивное целостное вложение систем. Для этого необходимо последовательно выполнить факторизации [6]:

$$\Omega = \Sigma\Xi, \quad \alpha = \Sigma\delta, \quad \beta = \pi\Xi, \quad \omega = \pi\delta. \tag{13}$$

Полная (обратимая) проматрица Ω допускает неограниченное множество вариантов факторизации. При этом, помимо неограниченного числа вариантов целостных вложений, возможны и нецелостные вложения, когда преобразования матриц осуществляются не в блочном, а в построчном или постолбцовом виде. В опубликованных работах по технологии вложения применительно к разным задачам было показано, что структура факторизации проматрицы (первое соотношение в (13)) не влияет на результат синтеза [6, 8]. Для рассматриваемой задачи это положение также справедливо.

В частности, возможна следующая целостная факторизация:

$$\Sigma = I_{2n+2m+r+p+3s}, \quad \text{тогда} \quad \Xi = \Omega.$$

3. СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЙ ПО СОСТАВЛЯЮЩИМ СОСТОЯНИЯ

Технологически решение строится на выполнении факторизации проматрицы Ω и матриц вложения α, β (9) и образа по формулам (13). При синтезе по *свободной* составляющей рассогласования Δx факторизация матриц вложения α и β по второй и третьей формулам (13) и последующее использование четвертой формулы (13) дает систему соотношений для решения поставленной задачи, которая после преобразований принимает вид:

$$\begin{gathered} \pi_{xp}B_{\text{р}} - E^0_{\Delta x}B_0D_{\text{р}} = E^0_{\Delta x}(pI_n - A_0) - I_n, \\ \pi_{xp}(pI_r - A_{\text{р}}) + E^0_{\Delta x}B_0C_{\text{р}} = 0, \\ \pi_z(pI_{\text{р}} - A_{\text{пр}}) - E^0_{\Delta x}B_0C_{\text{пр}} = 0 \end{gathered} \tag{14}$$

относительно искомых матриц $A_{\text{р}}$, $B_{\text{р}}$, $C_{\text{р}}$, $D_{\text{р}}$, $A_{\text{пр}}$, $C_{\text{пр}}$ и вспомогательных матриц π_{xp}, π_z. Третье уравнение (14) не связано с другими уравнениями системы и может решаться независимо от них. Это обусловлено тем, что предкомпенсатор не участвует в отработке начальных отклонений переменных состояния объекта. Первое и второе уравнения (14) образуют систему

$$\begin{gathered} \pi_{xp}B_{\text{р}} - E^0_{\Delta x}B_0D_{\text{р}} = E^0_{\Delta x}(pI_n - A_0) - I_n, \\ \pi_{xp}(pI_r - A_{\text{р}}) + E^0_{\Delta x}B_0C_{\text{р}} = 0 \end{gathered} \tag{15}$$

относительно искомых матриц $A_{\text{р}}$, $B_{\text{р}}$, $C_{\text{р}}$, $D_{\text{р}}$ и вспомогательной матрицы π_{xp}.

Для решения системы матричных уравнений (15) можно задать некоторые из матриц $A_{\text{р}}$, $B_{\text{р}}$, $C_{\text{р}}$, $D_{\text{р}}$ заранее, в любой комбинации, определяемой целью решаемой задачи, с последующим определением остальных искомых матриц.

Синтез по *вынужденной* составляющей рассогласования Δx осуществляется аналогично описанному выше — факторизация проматрицы, матриц вложения α и β (10) по формулам (13) дает систему соотношений для решения задачи синтеза. Здесь и далее не осуществляется достраивание образа ω до квадратной матрицы, что означает введение дополнительных фиктивных входов/выходов, эта процедура в конечном итоге не влияет на получаемые результаты. Для данного варианта синтеза управлений получается следующая система уравнений:

$$\begin{gathered} \pi_xB_0D_{\text{пр}} + \pi_zB_{\text{пр}} = E^g_{\Delta x}(p) + (pI_n - A_{\text{м}})^{-1}B_{\text{м}}, \\ \pi_x(pI_n - A_0) - \pi_{xp}B_{\text{р}} + \pi_xB_0D_{\text{р}} = I_n, \\ \pi_{xp}(pI_r - A_{\text{р}}) + \pi_xB_0C_{\text{р}} = 0, \\ \pi_z(pI_{\text{р}} - A_{\text{пр}}) - \pi_xB_0C_{\text{пр}} = 0 \end{gathered} \tag{16}$$

относительно искомых матриц $A_{\text{р}}$, $A_{\text{пр}}$, $B_{\text{р}}$, $B_{\text{пр}}$, $C_{\text{р}}$, $C_{\text{пр}}$, $D_{\text{р}}$, $D_{\text{пр}}$ и вспомогательных матриц π_x, π_{xp}, π_z.

Очевидно, что система уравнений (16) имеет избыточное число переменных, поэтому при решении некоторые из искомых переменных могут быть заранее заданы. Предпочтительно задавать матрицы $B_{\text{р}}$, $B_{\text{пр}}$, $C_{\text{р}}$, $C_{\text{пр}}$,

$D_р$, $D_{пр}$, так как они могут быть определены из условий конкретной решаемой задачи. Кроме того, эти матрицы влияют на расположение нулей в системе; выбирая их, можно управлять распределением нулей.

При синтезе по *свободной* и *вынужденной* составляющим рассогласования Δx образ примет вид

$$\omega(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ E^0_{\Delta x}(p) & \begin{bmatrix} E^g_{\Delta x}(p) & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Факторизация матриц вложения α и β по формулам (13) и очевидные преобразования полученной при этом системы в итоге дают следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} \pi_{xp}B_p - E^0_{\Delta x}B_0D_p = E^0_{\Delta x}\left(pI_n - A_0\right) - I_n, \\ \pi_{xp}\left(pI_r - A_p\right) = -E^0_{\Delta x}B_0C_p, \\ \pi_z B_{пр} + E^0_{\Delta x}B_0D_{пр} = E^g_{\Delta x} + \left(pI_n - A_м\right)^{-1}B_м, \\ \pi_z\left(pI_р - A_{пр}\right) = E^0_{\Delta x}B_0C_{пр} \end{gathered} \quad (17)$$

относительно искомых матриц $A_р$, $A_{пр}$, $B_р$, $B_{пр}$, $C_р$, $C_{пр}$, $D_р$, $D_{пр}$ и матриц π_{xp}, π_z.

Из анализа полученных соотношений (16) и (17) видно, что вспомогательная матрица π_x в (16) уступила место матричной передаточной функции свободной составляющей $E^0_{\Delta x}(p)$. Это можно трактовать так, что при синтезе управления только по вынужденной составляющей появление вспомогательной матрицы π_x обусловлено тем, что свободная составляющая процесса в замкнутой системе оказывается ничем не связанной.

4. СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЙ ПО СОСТАВЛЯЮЩИМ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА

Применение технологии вложения систем в случае синтеза управлений по составляющим выходного вектора дает следующие результаты.

При синтезе по *свободной* составляющей рассогласования Δy факторизация матриц вложения α и β (11) по формулам (13) дает в конечном итоге систему соотношений для решения поставленной задачи, которая после преобразований принимает вид:

$$\begin{gathered} \pi_{xp}B_p - E^0_{\Delta y}B_0D_p = E^0_{\Delta y}\left(pI_n - A_0\right) - C_0, \\ \pi_{xp}\left(pI_r - A_p\right) + E^0_{\Delta y}B_0C_p = 0 \end{gathered} \quad (18)$$

относительно искомых матриц A_p, B_p, C_p, D_p и вспомогательной матрицы π_{xp}.

Синтез по *вынужденной* составляющей рассогласования Δy осуществляется аналогично описанному выше — факторизация проматрицы, матриц вложения α и β (12) по формулам (13) дает систему соотношений для решения задачи синтеза:

$$\begin{gathered} \pi_x B_0 D_{пр} + \pi_z B_{пр} = E^g_{\Delta y}(p) + C_м\left(pI_n - A_м\right)^{-1}B_м, \\ \pi_x\left(pI_n - A_0\right) - \pi_{xp}B_p + \pi_x B_0 D_p = C_0, \\ \pi_{xp}\left(pI_r - A_p\right) + \pi_x B_0 C_p = 0, \\ \pi_z\left(pI_р - A_{пр}\right) - \pi_x B_0 C_{пр} = 0 \end{gathered} \quad (19)$$

относительно искомых матриц $A_р$, $A_{пр}$, $B_р$, $B_{пр}$, $C_р$, $C_{пр}$, $D_р$, $D_{пр}$ и вспомогательных матриц π_x, π_{xp}, π_z.

При синтезе управления по *свободной* и *вынужденной* составляющим рассогласования Δy факторизация матриц вложения α и β по формулам (13) и очевидные преобразования полученной при этом системы в итоге дают следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} \pi_{xp}B_p - E^0_{\Delta y}B_0D_p = E^0_{\Delta y}\left(pI_n - A_0\right) - C_0, \\ \pi_{xp}\left(pI_r - A_p\right) = -E^0_{\Delta y}B_0C_p, \\ \pi_z B_{пр} + E^0_{\Delta y}B_0D_{пр} = E^g_{\Delta y} + C_м\left(pI_n - A_м\right)^{-1}B_м, \\ \pi_z\left(pI_р - A_{пр}\right) = E^0_{\Delta y}B_0C_{пр} \end{gathered} \quad (20)$$

относительно искомых матриц $A_р$, $A_{пр}$, $B_р$, $B_{пр}$, $C_р$, $C_{пр}$, $D_р$, $D_{пр}$ и вспомогательных матриц π_{xp}, π_z. Для системы уравнений (18)–(20) и их элементов справедливы все замечания, сделанные ранее для уравнений (14)–(17).

5. КЛАССЫ РЕШЕНИЙ И ОГРАНИЧЕНИЯ

Полученные соотношения (14)–(20) фактически представляют собой разрешающие уравнения относительно искомых матриц $A_{пр}$, $B_{пр}$, $C_{пр}$, $D_{пр}$, $A_р$, $B_р$, $C_р$, $D_р$. Решения этих уравнений могут быть найдены методами линейной алгебры [9].

Здесь же для системы уравнений (17) при условии $D_{np} = 0$ и $D_p = 0$ следует:

$$\begin{gathered} \pi_{xp}B_p = E^0_{\Delta x}\left(pI_n - A_0\right) - I_n, \\ \pi_{xp}\left(pI_r - A_p\right) = -E^0_{\Delta x}B_0C_p, \\ \pi_z B_{пр} = E^g_{\Delta x} + \left(pI_n - A_м\right)^{-1}B_м, \\ \pi_z\left(pI_р - A_{пр}\right) = E^0_{\Delta x}B_0C_{пр}. \end{gathered} \quad (21)$$

Пусть заданы матрицы B_p и B_{np}. Тогда

$$\begin{gathered} \pi_{xp} = \left[E^0_{\Delta x}\left(pI_n - A_0\right) - I_n\right]\widetilde{B}_p, \\ \pi_z = \left[E^g_{\Delta x} + \left(pI_n - A_м\right)^{-1}B_м\right]\widetilde{B}_{пр} \end{gathered} \quad (22)$$

при выполнении условий разрешимости

$$\begin{gathered}\left[E^0_{\Delta x}\left(pI_n - A_0\right) - I_n\right]\bar{B}^R_p = 0,\\ \left[E^g_{\Delta x} + \left(pI_n - A_{\text{м}}\right)^{-1} B_{\text{м}}\right]\bar{B}^R_{\text{пр}} = 0.\end{gathered} \qquad (23)$$

В соотношениях (22), (23) и далее использованы обозначения: пусть $P_{m,n}$ — произвольная матрица, тогда $\widetilde{P}$ — сводный канонизатор матрицы P: $\widetilde{P} = \widetilde{P}^R\widetilde{P}^L$, $\widetilde{P}^L_{r,m}P_{m,n}\widetilde{P}^R_{n,r} = I_r$, $r = \operatorname{rank} P$, $\widetilde{P}^L$ и $\widetilde{P}^R$ — левый и правый канонизаторы матрицы P соответственно, $\bar{P}^L$ — левый матричный делитель нуля: $\bar{P}^L_{(m-r),m}P_{m,n} = 0$, $\bar{P}^L \neq 0$, $P \neq 0$; $\bar{P}^R$ — правый матричный делитель нуля: $P_{m,n}\bar{P}^R_{n,(n-r)} = 0$, $\bar{P}^R \neq 0$, $P \neq 0$.

Из второго и четвертого соотношений (21) следуют расчетные формулы:

$$\begin{gathered}(pI_r - A_p) = -\left\{[E^0_{\Delta x}\left(pI_n - A_0\right) - I_n]\widetilde{B}_p\right\}^{\widetilde{}} \times\\ \times\left(E^0_{\Delta x}B_0C_p\right),\\ (pI_{\text{р}} - A_{\text{пр}}) = \left\{[E^g_{\Delta x} + \left(pI_n - A_{\text{м}}\right)^{-1} B_{\text{м}}]\widetilde{B}_{\text{пр}}\right\}^{\widetilde{}} \times\\ \times\left(E^0_{\Delta x}B_0C_{\text{пр}}\right)\end{gathered} \qquad (24)$$

при выполнении условий разрешимости

$$\begin{gathered}\overline{\left\{\left[E^0_{\Delta x}\left(pI_n - A_0\right) - I_n\right]\widetilde{B}_p\right\}}^L \times\\ \times\left(E^0_{\Delta x}B_0C_p\right) = 0,\\ \overline{\left\{\left[E^g_{\Delta x} + \left(pI_n - A_{\text{м}}\right)^{-1} B_{\text{м}}\right]\widetilde{B}_{\text{пр}}\right\}}^L \times\\ \times\left(E^0_{\Delta x}B_0C_{\text{пр}}\right) = 0.\end{gathered} \qquad (25)$$

Классы решений могут быть введены в рассмотрение, если вместо соотношений (22) использовать эквивалентные соотношения

$$\begin{gathered}\pi_{xp} = \left[E^0_{\Delta x}\left(pI_n - A_0\right) - I_n\right]\widetilde{B}_p + \mu\bar{B}^L_p,\\ \pi_z = [E^g_{\Delta x} + \left(pI_n - A_{\text{м}}\right)^{-1} B_{\text{м}}]\widetilde{B}_{\text{пр}} + \eta\bar{B}^L_{\text{пр}},\end{gathered} \qquad (26)$$

где η, μ — произвольные матрицы подходящего размера.

Классы решений для искомых матриц $A_{\text{р}}$, $A_{\text{пр}}$ опишутся соотношениями (вместо (24)):

$$\begin{gathered}(pI_r - A_{\text{р}}) =\\ = -\left\{\left[E^0_{\Delta x}\left(pI_n - A_0\right) - I_n\right]\widetilde{B}_{\text{р}} + \mu\bar{B}^L_{\text{р}}\right\} \times\\ \times\left(E^0_{\Delta x}B_0C_{\text{р}}\right) +\\ + \overline{\left\{[E^0_{\Delta x}\left(pI_n - A_0\right) - I_n]\widetilde{B}_{\text{р}} + \mu\bar{B}^L_p\right\}}^R \nu;\\ (pI_{\text{р}} - A_{\text{пр}}) =\\ = \left\{[E^g_{\Delta x} + \left(pI_n - A_{\text{м}}\right)^{-1} B_{\text{м}}]\widetilde{B}_{\text{пр}} + \eta\bar{B}^L_{\text{пр}}\right\}^{\widetilde{}} \times\\ \times\left(E^0_{\Delta x}B_0C_{\text{пр}}\right) +\\ + \overline{\left\{\left[E^g_{\Delta x} + \left(pI_n - A_{\text{м}}\right)^{-1} B_{\text{м}}\right]\widetilde{B}_{\text{пр}} + \eta\bar{B}^L_{\text{пр}}\right\}}^R \vartheta,\end{gathered} \qquad (27)$$

где ν, ϑ — произвольные матрицы подходящего размера.

Таким образом, решения задачи синтеза управления по свободной и вынужденной составляющим рассогласования Δx (7), (8) задаются соотношениями (27) (при заданных $D_{\text{пр}}$, $D_{\text{р}}$, $B_{\text{пр}}$, $B_{\text{р}}$) при выполнении условий (23) и (25). Аналогичным образом из соотношений (14)–(20) могут быть сформированы аналитические решения задач синтеза управлений и при других функциях качества или известных (заданных) матрицах предкомпенсатора и регулятора.

Анализ соотношений (17) показывает, что процедура решения системы уравнений может быть выполнена в два этапа:

1) совместно решаются два первых уравнения из (17) — синтез по $E^0_{\Delta x}(p)$:

$$\begin{gathered}\pi_{xp}B_p - E^0_{\Delta x}B_0D_p = E^0_{\Delta x}\left(pI_n - A_0\right) - I_n,\\ \pi_{xp}\left(pI_r - A_p\right) = -E^0_{\Delta x}B_0C_p;\end{gathered} \qquad (28)$$

2) совместно решаются два последних уравнения из (17) — синтез по $E^g_{\Delta x}(p)$:

$$\begin{gathered}\pi_zB_{\text{пр}} + E^0_{\Delta x}B_0D_{\text{пр}} = E^g_{\Delta x} + \left(pI_n - A_{\text{м}}\right)^{-1} B_{\text{м}},\\ \pi_z\left(pI_{\text{р}} - A_{\text{пр}}\right) = E^0_{\Delta x}B_0C_{\text{пр}}.\end{gathered} \qquad (29)$$

Применительно к приведенным выше уравнениям это означает, что на первом этапе исследуются первые соотношения в (21)–(27), а на втором этапе — вторые уравнения из (21)–(27).

6. ПРИМЕР

Рассмотрим методический пример для варианта задачи, отличного от вышерассмотренных соотношений (21)–(27), в целях более широкого обзора возможностей метода.

Пусть заданы следующие матрицы:

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -10 \end{bmatrix}, \qquad B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E^0_{\Delta x} = \begin{bmatrix} \frac{10}{10p+11} & 0 \\ \frac{-10(19p^2+570p+3810)}{(p+10)(p+20)(10p+11)(10p+101)} & \frac{10}{10p+101} \end{bmatrix}.$$

Допустим

$$D_{\text{р}} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, B_{\text{р}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_{\text{р}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\widetilde{B}_{\text{р}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}^L_{\text{р}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}^R_{\text{р}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Проверка условия разрешимости первого уравнения (17) относительно π_{xp} дает

$$\left[E^0_{\Delta x}B_0D_p + E^0_{\Delta x}(pI - A_0) - I\right]\overline{B}^R_p =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{10}{(10p+101)(p+10)(p+20)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0_{2,1},$$

т. е. первое уравнение (17) разрешимо относительно π_{xp}. Тогда класс решений данного уравнения примет вид (аналогично первому соотношению (26))

$$\langle\pi_{xp}\rangle_\mu =$$
$$= \left[E^0_{\Delta x}B_0D_p + E^0_{\Delta x}(pI - A_0) - I\right]\widetilde{B}_{\text{р}} + \mu\bar{B}^L_{\text{р}} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{10}{(10p+101)(p+10)(p+20)} & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для определенности допустим, что произвольная матрица μ имеет вид

$$\mu = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-10}{(10p+101)(p+10)} \end{bmatrix}^T.$$

Тогда, решая систему (28), получим, что

$$A_p = \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ -1 & -10 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, параметры регулятора найдены.

Для выполнения второго этапа зададим требуемую матричную передаточную функцию

$$E^g_{\Delta x} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{(10p+11)(p+1)} & 0 \\ \frac{-100(p^3+33p^2+290p+599)}{(p+10)(p+20)(10p+11)(10p+101)} & \frac{-(p^2+40p+500)}{(p+10)(p+20)(p+30)(10p+101)} \end{bmatrix}.$$

Выбор такой достаточно сложной передаточной функции вызван эмпирическим правилом: чем проще задаваемая (требуемая) матричная передаточная функция, тем сложнее структура (выше порядок) синтезируемого устройства и наоборот.

Пусть

$$D_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\widetilde{B}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}^R_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}^L_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Условие разрешимости первого матричного уравнения (29) относительно π_z:

$$\left[E^g_{\Delta x} + (pI - A_{\text{м}})^{-1}B_{\text{м}} - E^0_{\Delta x}B_0D_n\right]\bar{B}^R_n = 0_{2,1}.$$

Из первого уравнения (29), аналогично второму соотношению из (26), следует

$$\langle\pi_z\rangle =$$
$$= \left[E^g_{\Delta x} + (pI - A_{\text{м}})^{-1}B_{\text{м}} - E^0_{\Delta x}B_0D_n\right]\widetilde{B}_n + \eta\bar{B}^L_n =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{(p+20)(p+30)(10p+101)} \end{bmatrix} + \eta\bar{B}^L_n.$$

Для определенности допустим, что произвольная матрица η имеет вид

$$\eta = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-10(p+50)}{(p+10)(p+30)(10p+101)} \end{bmatrix}^T.$$

Тогда, решая систему (29), получим, что

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -600 & -50 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, параметры предкомпенсатора найдены. Задача синтеза системы управления решена.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решения задачи синтеза управления линейным объектом, когда цель управления представлена тройкой матриц в пространстве состояний, а управляющие устройства представлены неминимальными реализациями, сведены к линейным матричным дробно-рациональным полиномиальным уравнениям.

Решение полученных матричных уравнений во многом зависит от согласованности свойств исходной динамической системы и желаемых матричных передаточных функций $E^g_{\Delta y}(p)$, $E^0_{\Delta y}(p)$, $E^g_{\Delta x}(p)$, $E^0_{\Delta x}(p)$.

При решении реальных задач синтеза, когда известны (заданы) некоторые априорные сведения о синтезируемой системе, эти матричные уравнения могут быть существенно упрощены или даже могут быть получены их решения в аналитической форме и соотношения для классов решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

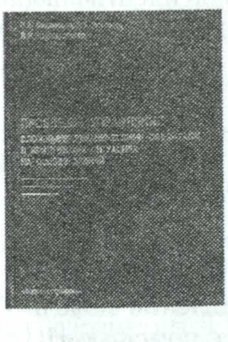
1. **Рутковский Ю. В., Ильясов Б. Г., Кабальнов Ю. С. и др.** Адаптивные системы управления газотурбинными двигателями летательных аппаратов. М.: МАИ, 1994. 220 с.
2. **Буков В. Н., Рябченко В. Н., Горюнов С. В.** Анализ и синтез матричных систем. Сравнение подходов // Автоматика и телемеханика. 2000. № 11. С. 3–43.
3. **Смагина Е. М.** Нули линейных многомерных систем. Определения, классификация, применение // Автоматика и телемеханика. 1985. № 12. С. 5–33.
4. **Квакернак Х., Сиван Р.** Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
5. **Смагина Е. М.** Взаимосвязь проблемы задания передаточных нулей и метода модального управления // Известия РАН. Теория и системы управления. 1996. № 2. С. 39–43.
6. **Буков В. Н., Горюнов С. В., Косьянчук В. В. и др.** Основы интеграции систем авиационного оборудования. М.: ВАТУ, 2002. 123 с.
7. **Солодовников В. В., Филимонов Н. Б.** Динамическое качество систем автоматического управления. М.: МГТУ, 1987. 84 с.
8. **Асанов А. З.** Аналитический синтез закона управления линейной динамической системы методом вложения // Мехатроника, автоматизация, управление. 2003. № 2. С. 15–21.
9. **Стренг Г.** Линейная алгебра и ее применения. М.: Мир, 1980. 454 с.

ОБ АВТОРАХ

Асанов Асхат Замилович, доц., докторант каф. техн. кибернетики. Дипл. радиофизик (Казанск. гос. ун-т, 1972). Канд. техн. наук по автоматич. управлению (М., НИЭМИ, 1980). Иссл. в обл. системного анализа, теории управления многосвязными и адаптивными системами.

Ильясов Барый Галеевич, проф., зав. каф. технической кибернетики. Дипл. инж.-электромех. (МАИ, 1962). Д-р техн. наук в обл. системного анализа и теории управления (ЦИАМ, 1983). Иссл. многосвязных, нелинейн., адаптивн. и интеллектуальных систем управления.

Сигнальная информация



Р. А. Бадамшин, Б. Г. Ильясов, Л. Р. Черняховская

Проблемы управления сложными динамическими объектами в критических ситуациях на основе знаний

Москва: Машиностроение, 2003

240 с. Табл. 17. Ил. 74. Библиогр.: 117 назв. ISBN 5-217-03217-0

Излагается подход к разработке информационных систем поддержки принятия решений (ИСППР) на основе управления знаниями. Проводится анализ известных методов интеллектуального управления. Предлагаются принципы построения ИСППР для управления сложными динамическими объектами в критических ситуациях (КС), а также методология проектирования подобных систем с использованием объектно-ориентированного моделирования предметной области и интеллектуального анализа данных. Приводятся результаты анализа процессов управления в КС на основе классификации с использованием искусственных нейронных сетей.

Рассматриваются принципы реализации ИСППР на основе Web-технологии.