Уфа: УГАТУ, 2004 Вестник УГАТУ Т. 5, № 2 (10). С. 52–57

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • МАТЕМАТИКА

УДК 517.958:532.5

Г. Т. БУЛГАКОВА, А. В. ЖИБЕР, Т. А. ФАЙЗУЛЛИН

К ТЕОРИИ НЕРАВНОВЕСНЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ НЕОДНОРОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Изучение неравновесных эффектов при движении неоднородных жидкостей в пористой среде способствует пониманию физики течения в пористых средах, а также имеет важное значение для приложений — в первую очередь для задач разработки нефтяных и газовых месторождений. Приводятся асимптотические исследования некоторых аспектов неравновесности, связанной с длительностью процессов установления капиллярного равновесия, и их возможные следствия. *Двухфазная фильтрация; неравновесная фазовая проницаемость; асимптотики*

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В основе классической теории равновесной фильтрации неоднородных жидкостей Маскета–Леверетта лежат экспериментальные, определенные из опытов по стационарному вытеснению, функции относительных фазовых проницаемостей $f_i(s)$ и функция Леверетта $J(s)$, характеризующая капиллярный скачок давления. Нестационарный процесс вытеснения характеризуется тем, что равновесное распределение фаз в макроэлементе пористой среды с присущей ему неоднородностью может устанавливаться настолько долго, что истинные гидродинамические проводимости элемента будут весьма далеки от равновесных. Простейшая схема неравновесности [1] сводится к тому, что функции $f_i(s)$ и $J(s)$ в неравновесном потоке считаются теми же, что и в равновесном, но зависят не от истинной водонасыщенности s, а от некоторой эффективной водонасыщенности $\tilde{s}$, для которой в [2] предложено кинетическое уравнение, связывающее эффективную водонасыщенность с истинной:

$$\tilde{s} = s + \tau \frac{\partial s}{\partial \theta}, \qquad (1)$$

где τ — время релаксации, θ — текущее время.

По этой модели при $\tau = \text{const}$ методами сращиваний асимптотических разложений получена зависимость ширины фронта вытеснения от скорости вытеснения при умеренных $\tau/t_1 < 1$, где t_1 — время вытеснения. Задача вытеснения при больших значениях параметра неравновесности в настоящее время не исследована. Вместе с тем при заводнении нефтяных пластов влияние неравновесности на характеристики вытеснения может быть велико [2].

В данной работе в одномерной постановке анализируется задача вытеснения при постоянном суммарном расходе жидкостей на входе в образец в рамках неравновесной модели фильтрации [2].

Система уравнений Маскета–Леверетта [3] совместно с (1) при постоянной скорости фильтрации смеси V_0 приводит к безразмерному уравнению

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \xi} F(\tilde{s}) = 0, \qquad (2)$$

где $F(\tilde{s}) = \frac{f_1(s)}{f_1(s) + \mu_0 f_2(s)}$ — функция Баклея–Леверетта, ξ — безразмерная координата, $\mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, μ_1 и μ_2 — коэффициенты вязкости вытесняющей и вытесняемой жидкостей.

Уравнения (1), (2) замыкаются начальными и граничными условиями

$$s(\xi, 0) = s_0; \quad s(0, \theta) + \tau \frac{\partial s(0, \theta)}{\partial \theta} = s_k, \qquad (3)$$

где s_0 и s_k — начальная и конечная насыщенности пористой среды вытесняющим агентом.

В настоящей работе для решения краевой задачи типа Гурса (1)–(3) получены оценки сверху. В случае линейной функции Баклея–Леверетта приведено точное решение краевой задачи и исследовано его асимптотическое поведение как при больших значениях времени релаксации τ, так и для $\tau \to 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы «Ведущие научные школы» (1716.2003.1)

2. ОЦЕНКИ СВЕРХУ ДЛЯ ИСТИННОЙ И ЭФФЕКТИВНОЙ НАСЫЩЕННОСТИ

Исходную краевую задачу (1)–(3) перепишем следующим образом:

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} = \frac{1}{\tau}\left(\tilde{s} - s\right), \quad \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \xi} = \frac{1}{\tau F'\left(\tilde{s}\right)}\left(s - \tilde{s}\right), \tag{4}$$

$$s\left(\xi, 0\right) = s_0, \quad \tilde{s}\left(0, \theta\right) = s_k. \tag{5}$$

Получим оценки функций $s^2\left(\xi,\theta\right)$ и $\tilde{s}^2\left(\xi,\theta\right)$ для всех значений аргументов ξ и θ при условии разрешимости задачи (4), (5). Умножая первое уравнение системы (4) на $s\left(\xi,\theta\right)$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(s^2\right) = \frac{1}{\tau}\left(\tilde{s}s - s^2\right), \tag{6}$$

используя неравенство

$$\tilde{s}s \leq \frac{1}{2}\left(\tilde{s}^2 + s^2\right)$$

из (6) получаем оценку вида

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(s^2) + \frac{1}{\tau}s^2 \leqslant \frac{1}{\tau}\tilde{s}^2$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(e^{\theta/\tau} \cdot s^2\right) \leqslant \frac{1}{\tau}e^{\theta/\tau} \cdot \tilde{s}^2.$$

Интегрированием по промежутку $[0,\theta]$ приходим к неравенству

$$s^2\left(\xi,\theta\right) \leqslant s_0^2 e^{-\theta/\tau} + \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\theta \tilde{s}^2\left(\xi,x\right) e^{-\frac{\theta - x}{\tau}}\,dx. \tag{7}$$

Учитывая, что производная функции Баклея–Лаверетта $F'\left(s\right)$ положительна, аналогично получаем следующую оценку:

$$\tilde{s}^2\left(\xi,\theta\right) \leqslant s_k^2 e^{-\int\limits_0^\xi \frac{dy}{\tau F'\left(\tilde{s}(y,\theta)\right)}} + \int\limits_0^\xi \frac{s^2\left(y,\theta\right)}{\tau F'\left(\tilde{s}\left(y,\theta\right)\right)} e^{-\int\limits_y^\xi \frac{dx}{\tau F'\left(\tilde{s}(\tau,\theta)\right)}}\,dy. \tag{8}$$

Если на производную $F'\left(\tilde{s}\right)$ наложить дополнительные условия

$$a \leqslant F'\left(s\right) \leqslant b, \quad a, b - \text{постоянные},$$

то из (8) будем иметь, что

$$\tilde{s}^2\left(\xi,\theta\right) \leqslant s_k^2 e^{-\frac{\xi}{\tau B}} + \frac{1}{\tau a}\int\limits_0^\xi s^2\left(y,\theta\right) e^{-\frac{(\xi - y)}{\tau b}}\,dy. \tag{9}$$

Далее из (7) с учетом (9) получаем оценку вида

$$s^2\left(\xi,\theta\right) \leqslant s_0^2 e^{-\frac{\theta}{\tau}} + s_k^2 e^{-\frac{\theta}{\tau} - \frac{\xi}{\tau B}}\left(e^{\frac{\theta}{\tau}} - 1\right) + \frac{1}{\tau^2 a} e^{-\frac{\theta}{\tau} - \frac{\xi}{\tau B}} \int\limits_0^\theta \int\limits_0^\xi s^2\left(y,x\right) e^{\frac{x}{\tau} + \frac{y}{\tau b}}\,dxdy.$$

Полагая теперь

$$V\left(\xi,\theta\right) = s^2\left(\xi,\theta\right) e^{\frac{\theta}{\tau} + \frac{\xi}{\tau}}, \tag{10}$$

последнее неравенство можно записать так:

$$V\left(\xi,\theta\right) \leq s_0^2 e^{\frac{\xi}{\tau B}} + s_k^2\left(e^{\frac{\theta}{\tau}} - 1\right) + \frac{1}{\tau^2 a}\int\limits_0^\theta \int\limits_0^\xi V(y,x)\,dxdy. \tag{11}$$

Согласно неравенству Вендроффа [4], из (11) будем иметь

$$V\left(\xi,\theta\right) \leqslant \left[s_0^2 + s_k^2\left(e^{\frac{\theta}{\tau}} - 1\right)\right] e^{\frac{\xi}{\tau B} + \frac{\theta\xi}{\tau^2 a}},$$

или в силу (10)

$$s^2\left(\xi,\theta\right) \leqslant \left[s_0^2 + s_k^2\left(e^{\frac{\theta}{\tau}} - 1\right)\right] e^{-\frac{\theta}{\tau} + \frac{\theta\xi}{\tau^2 a}}. \tag{12}$$

И, наконец, из (9) с использованием оценки (12) получаем, что

$$\tilde{s}^2\left(\xi,\theta\right) \leqslant \leqslant \left\{s_k^2 + \frac{\tau b}{\left(\tau a + b\theta\right)}\left[s_0^2 + s_k^2\left(e^{\frac{\theta}{\tau}} - 1\right)\right] \times \times \left[e^{\xi\left(\frac{1}{\tau b} + \frac{\theta}{\tau^2 a}\right)} - 1\right] e^{-\frac{\theta}{\tau}}\right\} e^{-\frac{\xi}{\tau b}}. \tag{13}$$

Неравенства (12) и (13) позволяют установить корректность постановки краевой задачи (4), (5), в частности, доказать её разрешимость в целом, т. е. при всех θ и ξ.

Кроме этого, эти оценки могут быть применены, например, при исследовании поведения решения для больших значений времени релаксации τ.

3. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ

В этом разделе рассматривается частный случай задачи (1)–(3), когда функция $F(s)$ является линейной, а именно $F(s) = as + b$, $a > 0$. Таким образом, приходим к следующей краевой задаче:

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} = \frac{1}{\tau}(\tilde{s} - s), \quad \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \xi} = \frac{1}{\tau a}(s - \tilde{s}), \tag{14}$$

$$s(\xi, 0) = s_0, \quad \tilde{s}(0, \theta) = s_k. \tag{15}$$

Решение задачи (14), (15) может быть получено в явной форме, например, с использованием классического метода Римана [5], [6]. Это решение вычисляется по формулам:

$$s(\xi,\theta) = s_k + (s_0 - s_k)\, e^{-\theta/\tau} \times \times \left[e^{-\frac{\xi}{a\tau}} J\left(2\sqrt{\frac{\theta\xi}{a\tau^2}}\right) + + \frac{\tau}{\theta} \int\limits_0^{\xi\theta/a\tau^2} e^{-\eta\frac{\tau}{\theta}} J(2\sqrt{\eta})\, d\eta \right], \tag{16}$$

$$\tilde{s}(\xi,\theta) = s(\xi,\theta) - (s_0 - s_k) \times \times e^{-\left(\frac{\theta}{\tau} + \frac{\xi}{a\tau}\right)} J\left(2\sqrt{\frac{\theta\xi}{a\tau^2}}\right).$$

Здесь $J(x) = J_0(ix)$ — функция Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента.

Так как функция $J(x)$ есть сумма степенного ряда

$$J(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(k!)^2\, 2^{2k}},$$

то решение (22) можно представить в виде

$$s(\xi,\theta) = s_k + + (s_0 - s_k)\, e^{-\frac{\theta}{\tau}} \left[e^{-\frac{\xi}{a\tau}} + e^{\frac{\theta}{\tau}} - e^{-\frac{\xi}{a\tau} + \frac{\theta}{\tau}} + + e^{-\frac{\xi}{a\tau}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(k!)^2} + \frac{\tau\alpha_k}{\theta k!} \right) \left(\frac{\xi\theta}{a\tau^2} \right)^k \right], \tag{17}$$

$$\tilde{s}(\xi,\theta) = s_k + + (s_0 - s_k)\, e^{-\frac{\theta}{\tau}} \left[e^{\frac{\theta}{\tau}} - e^{-\frac{\xi}{a\tau} + \frac{\theta}{\tau}} + + \frac{\tau}{\theta} e^{-\frac{\xi}{a\tau}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!} \left(\frac{\xi\theta}{a\tau^2} \right)^k \right], \tag{18}$$

где величина α_k есть сумма ряда

$$\alpha_k = -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(k+i)!} \left(\frac{\theta}{\tau} \right)^{i+1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{19}$$

Из представления (17)–(19) нетрудно получить асимптотические формулы для решения краевой задачи (14), (15) как при $\tau \to \infty$, так и в случае, когда одновременно текущее время θ и время релаксации τ определенным образом стремятся к бесконечности.

Например, при $\tau \to \infty$ и $\theta \to \infty$ так, что $\alpha \leqslant \theta/\tau \leqslant \beta$, α, β — постоянные, получаем следующие асимптотические формулы:

$$s(\xi,\theta) = s_k + (s_0 - s_k)\, e^{-\frac{\theta}{\tau}} \left[1 + \frac{\theta\xi}{a\tau^2} + o\left(\frac{1}{\tau^2} \right) \right],$$

$$\tilde{s}(\xi,\theta) = s_k + (s_0 - s_k)\, e^{-\frac{\theta}{\tau}} \left[\frac{\xi}{a\tau} + o\left(\frac{1}{\tau^2} \right) \right].$$

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ МАЛЫХ ВРЕМЕНАХ РЕЛАКСАЦИИ

Для исследования поведения решения краевой задачи (14), (15) при $\tau \to 0$ формулу (16), определяющую функцию $s(\xi,\theta)$, перепишем следующим образом:

$$s(\xi,\theta) = s_k + (s_0 - s_k) \times \times e^{-\frac{\theta}{\tau}} \left\{ e^{-\frac{\xi}{a\tau}} J\left(2\sqrt{\frac{\theta\xi}{a\tau^2}}\right) + + \frac{\tau}{\theta} \left[\int\limits_0^{\infty} e^{-\eta\frac{\tau}{\theta}} J(2\sqrt{\eta})\, d\eta - - \int\limits_{\frac{\xi\theta}{a\tau^2}}^{\infty} e^{-\eta\frac{\tau}{\theta}} J(2\sqrt{\eta})\, d\eta \right] \right\}. \tag{20}$$

Далее для больших значений аргумента x справедлива следующая асимптотическая формула [7]:

$$J(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \varphi(x), \qquad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdots (2k-1)^2}{k! 2^{3k} x^k}. \tag{21}$$

Выполняя интегральное преобразование Лапласа функции Бесселя нулевого порядка [8]

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-pt} J_0\left(2i\sqrt{t}\right) dt = \frac{1}{p} e^{\frac{1}{p}}, \quad \mathrm{Re}\, p > 0,$$

с учетом (21) для функции (20) получаем представление вида

$$s(\xi,\theta)=s_k+\frac{(s_0-s_k)}{2\sqrt{\pi}}\times$$
$$\times\left[\left(\frac{a\tau^2}{\theta\xi}\right)^{\frac14}e^{-\left(\sqrt{\frac{\theta}{\tau}}-\sqrt{\frac{\xi}{a\tau}}\right)^2}\varphi\left(2\sqrt{\frac{\theta\xi}{a\tau^2}}\right)+\right.$$
$$\left.+2\sqrt{\pi}-\frac{\tau}{\theta}e^{-\frac{\theta}{\tau}}F(\xi,\theta)\right],\quad(22)$$

где

$$F(\xi,\theta)=\int\limits_{\frac{\theta\xi}{a\tau^2}}^{\infty}e^{-\eta\frac{\tau}{\theta}+2\sqrt{\eta}}\cdot\eta^{-\frac14}\varphi(2\sqrt{\eta})\,d\eta.\quad(23)$$

Для построения асимптотического разложения функции $s(\xi,\theta)$ требуется получить представление интеграла (23) при $\tau\to0$. С этой целью интеграл (23) преобразуем, используя замену переменной интегрирования $\eta=\frac{\xi\theta}{a\tau^2}(1+y)^2$, к виду

$$F(\xi,\theta)=2\left(\frac{\xi\theta}{a\tau^2}\right)^{\frac34}e^{\frac{\theta}{\tau}}\phi(\xi,\theta),\quad(24)$$

где

$$\phi(\xi,\theta)=\int\limits_0^{\infty}e^{-\lambda(y+\alpha)}\sqrt{1+y}\varphi\times$$
$$\times(2\lambda(1+y)(1-\alpha))\,dy,\quad(25)$$
$$\lambda={}^{\xi}/_{a\tau},\quad\alpha=1-\sqrt{\frac{a\theta}{\xi}}.$$

Ясно, что $\lambda\to\infty$ при $\tau\to0$ и наоборот.

Асимптотическое поведение интеграла (25) при $\lambda\to\infty$ зависит от знака величины α, поэтому рассмотрим каждый случай в отдельности.

Вдоль прямой $\xi=a\theta$, $\alpha=0$ и на основе формулы (21) для функции $\varphi(x)$ интеграл (25) представляется следующим образом:

$$\phi(\xi,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\lambda^k}\int\limits_0^{\infty}e^{-\lambda y^2}\cdot(1+y)^{\frac12-k}dy,$$
$$a_k=\frac{1^2\cdot3^2\cdots(2k-1)^2}{k!\,2^{4k}},\quad k=0,1,2,\ldots.\quad(26)$$

Теперь, согласно формуле Ватсона [9]

$$\int\limits_0^{a}e^{-\lambda t^{\alpha}}\cdot t^{\beta-1}f(t)\,dt=$$
$$=\frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-\frac{(n+\beta)}{\alpha}}\cdot\Gamma\left(\frac{n+\beta}{2}\right)\frac{f^{(n)}_{(0)}}{n!}$$

имеем

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-\lambda y^2}(1+y)^{\frac12-k}dy=$$
$$=\frac12\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{\frac{n+1}{2}}}\cdot\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{f_k^{(n)}(0)}{n!},$$
$$f_k^{(n)}(0)=\left(\frac12-k\right)\left(\frac12-k-1\right)\cdots$$
$$\cdots\left(\frac12-k-n+1\right),\quad k=0,1,2,\ldots.\quad(27)$$

Таким образом, принимая во внимание формулы (27), представление функции $\phi(\xi,\theta)$ (26) можно записать так:

$$\phi(\xi,\theta)=\frac12\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\lambda^k}\times$$
$$\times\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{\frac{n+1}{2}}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{f_k^{(n)}(0)}{n!}\right].\quad(28)$$

Теперь из формул (21), (22), (24), (28) и (16) получаем асимптотическое представление решения краевой задачи (14), (15) при малых временах релаксации τ вдоль прямой $\xi=a\theta$:

$$s(\xi,\theta)=s_k+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(s_0-s_k)\times$$
$$\times\left\{2\sqrt{\pi}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\lambda^{k+1/2}}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\lambda_k}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_k^{(n)}(0)}{n!\lambda^{n/2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]\right\},\quad(29)$$

$$\tilde{s}(\xi,\theta)=s_k+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(s_0-s_k)\times$$
$$\times\left\{2\sqrt{\pi}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\lambda^k}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_k^{(n)}(0)}{n!\lambda^{n/2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]\right\}.\quad(30)$$

В частности из (29), (30) будем иметь:

$$s(\xi,\theta) = s_k + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(s_0 - s_k)\left[\sqrt{\pi} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right],$$

$$\tilde{s}(\xi,\theta) = s_k + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(s_0 - s_k)\left[\sqrt{\pi} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right].$$

В области $a\theta < \xi$ величина $\alpha > 0$, и тогда, учитывая формулы (21) и (25), для функции $\phi(\xi,\theta)$ будем иметь представление вида

$$\phi(\xi,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k (1-\alpha)^k} \times \\ \times \int_0^{\infty} e^{-\lambda(y+\alpha)^2} (1+y)^{\frac{1}{2}-k}\, dy. \quad (31)$$

Далее интегрированием по частям в (31) получаем асимптотическое выражение последней функции

$$\phi(\xi,\theta) = \\ = e^{-\lambda\alpha^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda^k (1-\alpha)^k} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{nk}}{2^n \lambda^n}\right], \quad (32)$$

где коэффициенты a_{nk} определяются по формулам:

$$a_{nk} = f_{nk}(0), \quad f_{n+1\,k}^{(y)} = \frac{1}{(y+\alpha)} \frac{d}{dy} f_{nk}^{(y)}, \\ n = 1, 2, \ldots,$$

$$f_{1k}(y) = \frac{(1+y)^{\frac{1}{2}-k}}{y+\alpha}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Теперь формулу (22), учитывая (24), перепишем в виде

$$s(\xi,\theta) = s_k + \frac{(s_0 - s_k)}{2\sqrt{\pi}} \times \\ \times \left[\frac{e^{-\lambda\alpha^2}}{\sqrt{\lambda(1-\alpha)}} \varphi(2(1-\alpha)\lambda) + 2\sqrt{\pi} - \right. \\ \left. -2\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}} \phi(\xi,\theta)\right]. \quad (33)$$

Применяя разложения (21) и (32), из (33) получаем асимптотическую формулу для функции $s(\xi,\theta)$:

$$s(\xi,\theta) = s_k + \frac{(s_0 - s_k)}{2\sqrt{\pi}} \times \\ \times \left\{\frac{e^{-\lambda\alpha^2}}{\sqrt{\lambda(1-\alpha)}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(1-\alpha)^k \lambda^k} + 2\sqrt{\pi} - \right. \\ \left. - \frac{e^{-\lambda\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda^{k-1/2}(1-\alpha)^k} \left[\sum_{n-1}^{\infty} \frac{a_{nk}}{2^{n-1}\lambda^n}\right]\right\}. \quad (34)$$

Асимптотическое представление функции $\tilde{s}(\xi,\theta)$ нетрудно получить, используя формулы (16), (21) и (34).

В частности, из (34) следует, что главный член асимптотического разложения определяется формулой

$$s(\xi,\theta) = s_0 + \\ + \frac{(s_k - s_0)}{2\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{1-\alpha}}{\alpha\sqrt{\lambda}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right)\right] e^{-\lambda\alpha^2}.$$

В области $a\theta > \xi$ имеем $\alpha < 0$. В этом случае с использованием асимптотических разложений для интегралов, входящих в правую часть формулы (31) [9], получаем следующее представление для функции $\phi(\xi,\theta)$:

$$\phi(\xi,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(1-\alpha)^k \lambda^k} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_{nk}}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}\right], \quad (35)$$

где коэффициенты β_{nk} вычисляются так:

$$\beta_{nk} = \frac{1}{(2n)!}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{d^{2n}}{dy^{2n}} h_k(0), \\ h_k(y) = (1 + y - \alpha)^{\frac{1}{2}-k}, \\ n, k = 0, 1, 2, \ldots.$$

И, как и выше, получаем асимптотическое представление функции $s(\xi,\theta)$:

$$s(\xi,\theta) = s_k + \frac{(s_0 - s_k)}{2\sqrt{\pi}} \times \\ \times \left\{\frac{e^{-\lambda\alpha^2}}{\sqrt{\lambda(1-\alpha)}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(1-\alpha)^k \lambda^k} + 2\sqrt{\pi} - \right. \\ \left. - \frac{2}{\sqrt{1-\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(1-\alpha)^k \lambda^k} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_{nk}}{\lambda^n}\right]\right\}.$$

Отметим, что формулы (22), (23) имеют место также и при больших значениях одной из переменных ξ и θ. Таким образом, можно построить асимптотики решения краевой задачи (14), (15) как при $\xi \to \infty$, так и при $\theta \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Баренблатт Г. И.** Фильтрация двух несмешивающихся жидкостей в однородной пористой среде // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 5. С. 144–151.
2. **Баренблатт Г. И., Винниченко А. П.** Неравновесная фильтрация несмешивающихся жидкостей // Успехи механики. 1980. Т. 3, № 3. С. 35–50.
3. **Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.** Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
4. **Беккенбах Э., Беллман Р.** Неравенства. М.: Мир, 1965. 76 с.
5. **Соболев С. Л.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 443 с.
6. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
7. **Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.** Курс современного анализа. М.: Наука, 1963. Т. 2. 515 с.
8. **Бейтман Г., Эрдейн А.** Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, 1969. Т. 1. 340 с.
9. **Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. Н.** Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1976. 407 с.

ОБ АВТОРАХ

Булгакова Гузель Талгатовна, проф. каф. математики. Дипл. физик-теоретик (БГУ, 1974). Д-р физ.-мат. наук по механике жидкости, газа и плазмы (БГУ, 2000). Иссл. в обл. гидромеханики нефтяного пласта, фильтрации газожидкостных потоков, численно-аналитических методов.

Жибер Анатолий Васильевич, проф., вед. науч. сотр. ИМ УНЦ РАН. Дипл. математик (Новосиб. гос. ун-т, 1969). Д-р физ.-мат. наук по диф. уравнениям (защ. в ИМиМ УрОРАН, Екб., 1994). Иссл. в обл. группового анализа дифференциальных уравнений.

Файзуллин Тимур Айратович, асп. каф. математики. Дипл. спец. в обл. прикладной математики и информатики (УГАТУ, 2003). Готовит дис. о нелинейных и неравновесных процессах двухфазной фильтрации под рук. проф. Г. Т. Булгаковой