Уфа: УГАТУ, 2004 Вестник УГАТУ Т. 5, № 2 (10). С. 209–212

УДК 519.2

В. Х. БАГМАНОВ

МУЛЬТИМАСШТАБНЫЙ ПОДХОД К ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Излагается подход к задаче фильтрации сигналов с фрактальной структурой, базирующийся на мультимасштабной декомпозиции, с помощью дискретных вейвлет-преобразований. Фильтрация основывается на доминирующей роли межмасштабных корреляций по отношению к внутримасштабным. *Фильтрация; мультимасштабный анализ; фрактальные сигналы; вейвлеты*

Одним из интенсивно развиваемых направлений цифровой обработки сигналов является мультимасштабный анализ на основе вейвлет-преобразований [1, 2]. Вейвлет-преобразования имеют ряд преимуществ при их использовании в обработке сигналов, характеризующихся нерегулярным поведением.

Основной проблемой использования вейвлетов является выбор преобразования, наиболее адекватно соответствующего структуре анализируемого сигнала и цели решаемой задачи. Особый класс нерегулярных сигналов образуют фрактальные сигналы со статистически однородной структурой строения на различных пространственных масштабах. Типичным примером таких сигналов являются спутниковые изображения земной поверхности, фрактальное поведение которых обсуждалось в работах [3, 4].

При решении ряда практических задач, таких как интерполяция, оптимальное оценивание, обнаружение аномалий на фоне шумов, основным моментом является разработка оптимальных и квазиоптимальных методов фильтрации.

В данной работе изложен мультимасштабный подход к фильтрации сигналов с фрактально-самоподобной структурой на основе дискретных вейвлет-преобразований.

Основная идея мультимасштабного подхода основывается на том, что при представлении сигналов с помощью вейвлет-преобразований в виде мультимасштабной декомпозиции межмасштабные корреляции, вследствие фрактальной природы сигнала, оказываются сильнее внутримасштабных.

В данной ситуации наиболее эффективным оказывается механизм фильтрации, при котором значения сигнала на более детальном масштабном уровне предсказываются на основе значений, соответствующих более грубому масштабному уровню вейвлетовского разложения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МУЛЬТИМАСШТАБНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Предлагаемый подход для решения задачи фильтрации состоит в следующем. Разложим дискретный сигнал, представленный набором чисел $\{S_i\}$, на четные $\{S_{2k}\}$ и нечетные компоненты $\{S_{2k+1}\}$. Четные компоненты сигнала будут рассматриваться в качестве представления сигнала на масштабном уровне j:

$$S^j = \{S_{2k}\}, \quad k = 0, \pm 1, \ldots \tag{1}$$

Объединение четных и нечетных компонент сигнала можно рассматривать как представление сигнала на более детальном масштабном уровне $j+1$:

$$S^{j+1} = \{S_{2k}\} \bigcup \{S_{2k+1}\}, \quad k = 0, \pm 1, \ldots \tag{2}$$

Быстрое дискретное вейвлет-преобразование сигнала $\{S_k\}$ можно представить в виде системы рекуррентных соотношений [1]:

$$\lambda_{j-1,k} = \sqrt{2} \sum_m h_{m-2k} \lambda_{j,m}; \tag{3}$$

$$d_{j-1,k} = \sqrt{2} \sum_m g_{m-2k} \lambda_{j,m}. \tag{4}$$

Рекурсии инициируются с некоторого исходного масштаба J, так что при $j = J$ $\lambda_{J,k} = S_k$.

В выражениях (3) и (4) $\lambda j, k$ — аппроксимация сигнала на масштабном уровне j, $d_{j,k}$ — вейвлет-представление сигнала, $\{h_k\}$ и $\{g_k\}$ — коэффициенты низкочастотного и высокочастотного вейвлет-фильтров.

Соответствующее преобразованиям (3) и (4) обратное дискретное вейвлет-преобразование

$$\lambda_{j,k} = \sqrt{2}\sum_l h_{k-2l}\lambda_{j-1,l} + \sqrt{2}\sum g_{k-2l}d_{j-1,l} \tag{5}$$

символически можно представить в виде

$$S^{j+1} = h * S^j + d^j, \tag{6}$$

где $*$ — символ свертки. В представлении (6) первый член можно рассматривать в качестве статистической оценки сигнала на $(j+1)$-м масштабном уровне по значениям данного сигнала на j-м уровне:

$$\hat{S}^{j+1} = h * S^j. \tag{7}$$

При этом величина d^j в формуле (6) интерпретируется как ошибка оценки (7).

Коэффициенты оптимального фильтра, минимизирующего ошибку интерполяции, при межмасштабном переходе определяются из решения задачи

$$h = \arg\min_h \left(S^{j+1} - h * S^j\right)^2. \tag{8}$$

Описанный подход применим для сигналов общего вида. В случае сигналов с фрактальной структурой постановка задачи определения оптимального фильтра модифицируется.

Для фрактально самоподобных случайных функций справедливо скейлинговое соотношение

$$f(ax) \stackrel{d}{=} a^H f(x), \tag{9}$$

где a — масштабный параметр, символ d означает, что равенство (9) следует понимать в статистическом смысле как равенство статистических моментов любого порядка, H — показатель Херста, являющийся основной характеристикой фрактальных множеств.

Основываясь на (9), можно показать, что для фрактальных сигналов флуктуации второго члена d^j в представлении (6) подчиняются масштабному закону

$$\left\langle \left(d^j\right)^2 \right\rangle = \frac{\text{const}}{2^{(2H+1)\,j}}. \tag{10}$$

Таким образом, в силу фрактальной природы сигнала, ошибки интерполяции на различных масштабных уровнях не равнозначны и с увеличением масштабного уровня уменьшаются согласно степенному закону (10), определяемому показателем Херста.

Если мультимасштабное представление сигнала задать в виде последовательности чисел 2^m-кратной длины так, что

$$S^m = \{S_{2^m k}\},$$

$$S^{m+1} = \{S_{2^m k + 2^{m-1}}\} \bigcup \{S_{2^m k}\},$$

то для определения оптимального фильтра можно использовать иерархию межмасштабных переходов при $m = 1, 2, \ldots, M$ и обобщенная постановка задачи синтеза оптимального фильтра, учитывающая неравнозначность вклада различных масштабов в ошибку интерполяции, определяемую скейлинговым законом (10), представляется в виде

$$h = \arg\min_h \Big(\sum_{m=1}^{M} \left(S^{m+1} - h * S^m\right) \times \times 2^{-(2H+1)\,m}\Big), \tag{11}$$

где M определяется длиной сигнала.

2. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРОВ

Решение экстремальных задач (8) или (11) имеет ряд особенностей, обусловленных тем, что коэффициенты h должны являться коэффициентами вейвлет-фильтров, что накладывает определенные ограничения.

Рассмотрим подход к решению проблемы, основанный на использовании биортогонального мультимасштабного вейвлет-анализа и идее лифтинга, являющейся одной из современных идей в развитии теории и практики вейвлетов.

При использовании биортогональных вейвлет-преобразований в мультимасштабном анализе помимо пары фильтров (h, g) участвует дуальная пара фильтров $\left(\tilde{h}, \tilde{g}\right)$.

Биортогональный вейвлет-анализ является обобщением ортогонального анализа, для которого $h = \tilde{h}$, $g = \tilde{g}$. При биортогональном анализе разложение сигнала осуществляется с помощью фильтров $\tilde{h}$, $\tilde{g}$, а восстановление на основе обратного преобразования — с помощью фильтров h, g так, что быстрое вейвлет-преобразование, определяемое формулами (3)–(5), трансформируется к виду

$$\lambda_{j-1,m} = \sqrt{2}\sum_k \tilde{h}_{k-2m}\lambda_{j,k},$$
$$d_{j-1,m} = \sqrt{2}\sum_k \tilde{g}_{k-2m}\lambda_{j,k},$$
$$\lambda_{j,k} = \sqrt{2}\sum_m h_{k-2m} - \lambda_{j-1,m} + $$
$$+\sqrt{2}\sum_m g_{k-2m}d_{j-1,m}.$$

Метод лифтинга позволяет конструировать новые вейвлет-преобразования с требуемыми свойствами из уже имеющихся. Сущность лифтинга состоит в следующем [2]. Пусть имеется вейвлет-преобразование, определяемое парой фильтров $H(z)$, $G(z)$, заданных с помощью z-преобразований так, что детерминант полифазной матрицы $P(z)$, определяемой выражением

$$P(z) = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ z & -z \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} H(z) & G(z) \\ H(-z) & G(-z) \end{Vmatrix},$$

удовлетворяет условию

$$\operatorname{Det} P(z) = 1. \qquad (12)$$

В терминах полифазной матрицы условия биортогональности (условия точного восстановления сигнала) определяются соотношением

$$\left(\tilde{P}\left(z^{-1}\right)\right)^t \cdot P(z) = 1, \qquad (13)$$

где $\tilde{P}(z)$ — дуальная матрица, определяющая дуальные фильтры $\tilde{H}(z)$, $\tilde{G}(z)$, такие что

$$\tilde{G}(z) = z^{-1}H\left(-z^{-1}\right),$$
$$\tilde{H}(z) = z^{-1}G\left(-z^{-1}\right).$$

Оказывается, что преобразование, называемое лифтингом (2),

$$H_1(z) = H(z) + G(z)\, f\left(z^2\right), \qquad (14)$$

где $f(z)$ — произвольный многочлен, не нарушает условий (12) и (13). Таким образом, по исходному вейвлет-преобразованию, определяемому фильтрами H, G, можно найти новые преобразования, причем выражение (14) исчерпывает весь класс вейвлет-фильтров конечной длины.

Используя метод лифтинга, задачу поиска оптимального интерполирующего фильтра можно свести к следующей.

Рассмотрим для определенности решение задачи (8) и будем считать, что в качестве начального приближения выбрано некоторое вейвлет-преобразование, определяемое фильтрами $\{h_k\}$, $\{g_k\}$. Перейдем с помощью дискретного преобразования Фурье в частотную область так, что

$$s(\omega) = \sum_k s_k e^{-ik\omega},$$
$$h(\omega) = \sum_k h_k e^{-ik\omega},$$
$$g(\omega) = \sum_k g_k e^{-ik\omega}.$$
$$h_1(\omega) = h(\omega) - g(\omega)\, f(2\omega),$$

где $f(2\omega)$ — неизвестная функция.

Используя равенство Парсеваля, задачу (8) можно свести к минимизации функционала

$$f(\omega) = \arg\min_{f(\omega)}\left\{\int_{-\pi}^{+\pi}\left|\frac{s(\omega)-s(\omega+\pi)}{2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{s(\omega)+s(\omega+\pi)}{2}\cdot h_1(\omega)\right|^2 d\omega\right\}. \qquad (15)$$

Экстремальная задача (15) имеет следующее решение:

$$f(2\omega) = \frac{1}{g^2(\omega)\left[A(\omega)+C(\omega)\right]}\times$$
$$\times\Big(\left[B(\omega)+D(\omega)\right]g^*(\omega) +$$
$$+\left[A(\omega)+C(\omega)\,h(\omega)\;g^*(\omega)\right]\Big), \qquad (16)$$

где введены обозначения:

$$A(\omega) = S^2(\omega) + S^2(\omega+\pi),$$
$$B(\omega) = S^2(\omega) - S^2(\omega+\pi),$$
$$C(\omega) = S(\omega)S^*(\omega+\pi) + S(\omega+\pi)S^*(\omega),$$
$$D(\omega) = -S(\omega)S^*(\omega+\pi) + S(\omega+\pi)S^*(\omega).$$

Если аппроксимировать функцию (16) на отрезке $[-\pi, \pi]$ тригонометрическим многочленом $f_\varepsilon^*\left(e^{i\omega}\right)$ так, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(f^*\left(e^{\omega}\right) - f(\omega)\right)^2 d\omega < \varepsilon,$$

где ε — заданная точность, то в результате придем к окончательному решению задачи построения вейвлет-фильтров с требуемыми свойствами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подход к фильтрации, основанный на мультимасштабной декомпозиции, может быть расширен на класс многомерных фрактальных сигналов. Обобщение достигается либо с помощью многомерных вейвлет-преобразований, либо на основе отображения многомерных пространств в одномерное с помощью квазинепрерывных рекурсивных разверток [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Juwerth B., Suelclens V.** An overview of wavelet based multiresolution analyses // SIAM Rev. 1994. Vol. 36, No 3. P. 377–412.
2. **Левкович-Маслюк Л., Переберин А.** Вейвлет-анализ и его приложения. www.keldysh.ru/gc98/cd/tutorial/leo_lev.
3. **Марков Е. П.** Фрактальная модель космических оптико-электронных изображений // ИСЗ. 1996. № 1. С. 56–61.
4. **Пузаченко Ю. Г., Алещенко Г. М., Молчанов Г. С.** Многомерный анализ аэрофотоснимков при изучении структуры ландшафта // Изв. РАН. Сер. геогр. 1999. № 2. С. 80–90.
5. **Александров В. В., Горский И. Д.** Представление и обработка изображений: рекурсивный подход. Л.: Наука, 1985. 192 с.

ОБ АВТОРЕ

Багманов Валерий Хусаинович, доц. каф. телекоммуникац. систем. Дипл. физик (МГУ, 1974). Канд. физ.-мат. наук по применению выч. техники, мат. моделирования и мат. методов в науч. исследованиях (БГУ, 1994). Иссл. в обл. моделир. и обработки случайных сигналов.