Уфа: УГАТУ, 2005 Вестник УГАТУ Т. 6, № 2 (13). С. 20–25

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 519.2

Ф. С. НАСЫРОВ, Л. Р. СУЛТАНОВА

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С САМОПОДОБНЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ

Введен новый класс случайных процессов, траектории которых самоподобны. Для таких процессов вычислены некоторые числовые характеристики.

Самоподобная функция, функция Пеано, случайный процесс с самоподобными траекториями

До недавнего времени геометрические модели различных природных конструкций традиционно строились на основе сравнительно простых геометрических фигур: прямых, многоугольников, окружностей, многогранников, сфер. Однако со временем выяснилось, что этот классический набор, вполне достаточный для описания элементарных структур, становится плохо применимым для характеристики таких сложных объектов, как очертание береговых линий материков, поле скоростей в турбулентном потоке жидкости, разряд молнии в воздухе, пористые материалы, форма облаков, снежинки, пламя костра, контуры дерева, кровеносно-сосудистая система человека, поверхность клеточной мембраны и др. В последние 15–20 лет для описания этих и им подобных образований все чаще используются новые геометрические понятия.

Одним из таких понятий явилось понятие фрактала — геометрического объекта, имеющего сильно изрезанную форму. В основе фрактальной геометрии лежит идея самоподобия. Самоподобие как основная характеристика фрактала означает, что он более или менее единообразно устроен в широком диапазоне масштабов. В идеальном случае фрактальный объект оказывается инвариантным относительно растяжений. Заметим, что элементы кривых евклидовой геометрии всегда самоподобны, но тривиальным образом: все кривые являются локально прямыми, а прямая всегда самоподобна. Фрактальная же кривая, в идеале, не сводится к прямой и является геометрически нерегулярной, хаотичной. Для нее, в частности, не существует и понятия касательной в точке, так как функции, описывающие эти кривые, являются в общем случае недифференцируемыми.

Целью настоящей работы является построение случайного процесса с непрерывными фрактальными траекториями. Во-первых, в работе введен класс случайных процессов, траектории которых самоподобны и, в частности, недифференцируемы. Во-вторых, для данных процессов вычислены некоторые конечномерные распределения и числовые характеристики.

1. САМОПОДОБНЫЕ ФУНКЦИИ, ПРИМЕРЫ

Существуют различные определения самоподобной функции одной переменной, мы воспользуемся определением самоподобных функций, данным в работах Коно (см. [1, 2]).

Определение. Вещественнозначную функцию $f(t)$, определенную на отрезке [0,1], назовем *самоподобной* (по Коно) с параметрами $H > 0$ и $r > 1$ (r — целое), если для любого $0 \leqslant h < r^{-N}$ $(N = 1, 2, \dots)$ имеет место равенство

$$f(t_{N,k} + h) - f(t_{N,k}) = T_{N,k}\, r^{-NH} f(r^N h), \quad (1)$$

где $t_{N,k} = kr^{-N}$, $T_{N,k} \in \{-1, 1\}$, $(k = 0, 1, \dots, r^N - 1)$.

Известно (см. [1, 2]), что ограниченная самоподобная функция непрерывна тогда и только тогда, когда равенство (1) справедливо для любого $0 \leqslant h \leqslant r^{-N}$. Непрерывная функция $f(t)$, определенная на $[0, 1]$, такая, что $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, является самоподобной с параметрами H и r тогда и только тогда, когда существуют числа $x(k)$, $k = 0, \dots r - 1$, принимающие значения 1 или −1, такие, что

$$\sum_{k=0}^{r-1} x(k) = r^H \qquad (r^H \text{ должно быть целым})$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 04-01-00286-а, 05-01-97909.

и $f(t)$ представляется в виде

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} y_{n-1}(t)s(\varepsilon_n)r^{-nH},$$

где

$$t=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k r^{-k},\ s(0)=0,\ s(j)=\sum_{i=0}^{j-1}x(i),$$

$$j=1,\dots,r-1,$$

$$y_0(t)=1,\ y_n(t)=\prod_{k=1}^{n}x(\varepsilon_k).$$

Таким образом, функция $f(t)$ полностью определяется параметрами r и H и величинами $x(k), k=0,\dots r-1$, поэтому множество $\{r,H,x(k),k=0,\dots r-1\}$ называется *структурой* функции $f(t)$.

Пример. Классическим примером непрерывных самоподобных функций являются компоненты известной кривой Пеано. Для каждого $t\in[0,1]$, $t=\sum_{n=1}^{\infty}a_n 3^{-n}$ ($a_n=\{0,1,2\}$) определим:

$$P_1(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n 3^{-n}\ \text{ и }\ P_2(t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n 3^{-n},$$

где $b_1=a_1$,

$$b_n=\sigma^{a_2+\dots+a_{2n-2}}(a_{2n-1}),\ n=2,3,\dots,$$

$$c_n=\sigma^{a_1+\dots+a_{2n-1}}(a_{2n}),\ n=1,2,\dots,$$

$$\sigma(x)=2-x,\ \sigma^n=\sigma\circ\sigma^{n-1},\ \sigma^0(x)=x.$$

Функции P_1 и P_2 удовлетворяют условию самоподобия с параметрами $H=1/2$ и $r=9$, т. е.

$$P_1(t)-P_1(t_{N,k})=T^{(1)}_{N,k}3^{-N}P_1(3^{2N}h),$$

$$T^{(1)}_{N,k}=(-1)^{a_2+\dots+a_{2N}},$$

$$P_2(t)-P_2(t_{N,k})=T^{(2)}_{N,k}3^{-N}P_2(3^{2N}h),$$

$$T^{(2)}_{N,k}=(-1)^{a_1+\dots+a_{2N-1}},$$

где $t_{N,k}=k3^{-2N}=\sum_{n=1}^{2N}a_n3^{-n}$, $h\leqslant 3^{-2N}$.

В дальнейшем всюду через $1(A)$ будем обозначать индикатор множества A, т. е. функцию, равную 1 на A и 0 — вне A.

2. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С САМОПОДОБНЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ

При построении случайного процесса $f(t)$, $t\in[0,1]$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, с самоподобными реализациями будем считать детерминированными величины $H\in(0,1)$ и целое $r\geqslant 4$ (при этом r^{NH} должно быть целым), а случайными предполагать величины $T_{N,k}$, которые будем считать одинаково распределенными, причем, как будет показано ниже, они не могут быть независимыми случайными величинами.

Лемма 1. *Пусть $f(t)$, $t\in[0,1]$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, — непрерывная самоподобная функция с параметрами H и r, тогда при любом N справедливо равенство*

$$f\left(\frac{k}{r^N}\right)=\sum_{i=0}^{k-1}T_{N,i}\,r^{-NH}, \tag{2}$$

где

$$\sum_{i=0}^{r^N-1}T_{N,i}=r^{NH}. \tag{3}$$

Доказательство. В силу определения непрерывной самоподобной функции справедливо равенство

$$f(t_{N,k}+h)-f(t_{N,k})=T_{N,k}\,r^{-NH}f(r^N h),$$

$$0\leqslant h\leqslant r^N,$$

поскольку по условию $f(t)$ непрерывна, возьмем $h=r^{-N}$, $t_{N,k}=kr^{-N}$, тогда

$$f(kr^{-N}+r^{-N})-f(kr^{-N})=T_{N,k}\,r^{-NH}f(r^Nr^{-N}).$$

Так как $f(r^Nr^{-N})=f(1)=1$, то

$$f((k+1)r^{-N})=f(kr^{-N})+T_{N,k}\,r^{-NH},$$

$$k=0,1,\dots,r^N-1. \tag{4}$$

При $k=0$ с учетом того, что $f(0)=0$, получаем

$$f\left(\frac{1}{r^N}\right)=T_{N,0}r^{-NH},$$

далее

$$f\left(\frac{2}{r^N}\right)=T_{N,0}r^{-NH}+T_{N,1}r^{-NH}=$$

$$=(T_{N,0}+T_{N,1})r^{-NH},$$

следовательно,

$$f\left(\frac{k}{r^N}\right)=(T_{N,0}+,\dots,+T_{N,k-1})r^{-NH}=$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} T_{N,i} r^{-NH}$$

Приняв $k = r^N - 1$ в соотношении (4), получим

$$f(r^N r^{-N}) = \sum_{i=0}^{r^N-2} T_{N,i} r^{-NH} + T_{N,r^N-1} r^{-NH} =$$

$$= \sum_{i=0}^{r^N-1} T_{N,i} r^{-NH},$$

а поскольку $f(1) = 1$, то имеем

$$1 = \sum_{i=0}^{r^N-1} T_{N,i} r^{-NH} \quad \text{или} \quad \sum_{i=0}^{r^N-1} T_{N,i} = r^{NH},$$

следовательно, требуемое утверждение доказано.

Пусть $T_{N,k}$ — одинаково распределенные зависимые случайные величины; поскольку мы хотим построить случайный процесс $f(t)$ с самоподобными траекториями, который обладает в определенном смысле однородностью, то будем предполагать, что случайные величины $T_{N,k}$ являются одинаково взаимозависимыми в том смысле, что вероятности того, что случайные величины $T_{N,k}$, $r = 0, ..., r^N - 1$, принимают определенные значения, не зависят от перестановки этих случайных величин.

Покажем, что при фиксированных H и r вероятности p и q не могут быть выбраны произвольным образом, а принимают строго определенные значения.

Предложение 1. *Вероятности* $P(T_{N,k} = 1) = p$ *и* $P(T_{N,k} = -1) = q$ *удовлетворяют соотношениям*

$$p = \frac{r^N + r^{NH}}{2r^N}, \quad q = \frac{r^N - r^{NH}}{2r^N}.$$

Доказательство. Из равенства (3) следует, что $\sum\limits_{i=0}^{r^N-1} T_{N,i} = r^{NH}$, значит математическое ожидание данного выражения равно

$$E \sum_{i=0}^{r^N-1} T_{N,i} = r^{NH}, \tag{5}$$

поэтому левую часть соотношения (5) можно записать в виде

$$\sum_{i=0}^{r^N-1} ET_{N,i} = \sum_{i=0}^{r^N-1} (p-q) = r^N(p-q).$$

Следовательно, $r^N(p-q) = r^{NH}$, отсюда

$$p - q = \frac{r^{NH}}{r^N}. \tag{6}$$

Из равенства (6) и условия $p + q = 1$ получаем требуемые соотношения.

Теперь мы можем определить непрерывный случайный процесс с самоподобными траекториями.

Определение. Случайный процесс $f(t)$, определенный на отрезке $[0,1]$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, с масштабирующим параметром $H > 0$ и основанием $r \geqslant 4$ будем называть *непрерывным однородным случайным процессом с самоподобными траекториями*, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) При каждом N существуют случайные величины $T_{N,k}$, $r = 0, ..., r^N - 1$, такие, что:

a) $\sum\limits_{i=0}^{r^N-1} T_{N,i} = r^{NH}$ (r^{NH} должно быть целым);

b) $P(T_{N,k} = 1) = \frac{r^N + r^{NH}}{2r^N}$, $P(T_{N,k} = -1) = \frac{r^N - r^{NH}}{2r^N}$, при этом вероятности $p(T_{N,0} = y_0, \ldots, T_{N,r^N-1} = y_{r^N-1})$, где $y_m \in \{-1, 1\}$, одинаковы для всех перестановок $T_{N,0}, \ldots, T_{N,r^N-1}$ случайных величин $T_{N,k}$, $r = 0, ..., r^N - 1$.

2) С вероятностью 1 для любых $h : 0 \leq h \leq r^{-N}$, $t_{N,k} = kr^{-N}$, справедливы равенства

$$f(t_{N,k} + h) - f(t_{N,k}) = T_{N,k} r^{-NH} f(r^N h),$$

$$k = 0, 1, ..., r^N - 1, \quad N = 1, 2, ...$$

В дальнейшем всюду, если не оговорено противное, фиксируется непрерывный однородный случайный процесс $f(t)$, $\in [0,1]$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, с самоподобными траекториями, с масштабирующим параметром $H > 0$ и основанием $r \geqslant 4$.

Из теоремы Колмогорова о существовании случайного процесса следует, что для того чтобы задать случайный процесс, достаточно задать его конечномерные распределения, удовлетворяющие условиям согласованности. Поскольку (см. [2]) определенный выше случайный процесс с самоподобными траекториями зависит от конечного числа случайных величин $x(k)$, которые, в свою очередь, однозначно определяются случайными величинами $T_{1,k}$, то для доказательства существования случайного процесса $f(t)$ с самоподобными траекториями достаточно при каждом N найти совместное распределение $T_{N,k}$, тогда условие согласованности конечномерных распределений случайного процесса будет справедливо очевидным образом.

Зафиксируем параметры H и r и натуральное N и обозначим

$$Q_N^+ = \sum_{k=0}^{r^N-1} \mathbf{1}(T_{N,k}=1),$$

$$Q_N^- = \sum_{k=0}^{r^N-1} \mathbf{1}(T_{N,k}=-1),$$

таким образом, Q_N^+ и Q_N^- — это число $T_{N,k}$, равных 1 и -1 соответственно.

Предложение 2. *Совместное распределение $T_{N,k}$ имеет вид*

$$p(T_{N,0}=y_0,\dots,T_{N,r^N-1}=y_{r^N-1}) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{C_{r^N}^{\frac{r^N+r^{NH}}{2}}}, & \text{при } q_N^+ = \dfrac{r^N-r^{NH}}{2}, \\ 0, & \text{при } \quad q_N^- \neq \dfrac{r^N-r^{NH}}{2}, \end{cases}$$

где y_k равны 1 или -1, $q_N^+ = \sum\limits_{k=0}^{r^N-1} \mathbf{1}(y_{N,k}=1)$.

Доказательство. Заметим, что величины Q_N^+ и Q_N^- удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} Q_N^+ - Q_N^- = r^{NH}, \\ Q_N^+ + Q_N^- = r^N. \end{cases} \tag{7}$$

Первое уравнение системы вытекает из леммы 1, а второе — так как число случайных величин $T_{N,k}$ равно r^N. Решая систему (7), получим: $Q_N^+ = \frac{1}{2}(r^N + r^{NH})$, $Q_N^- = \frac{1}{2}(r^N - r^{NH})$. Следовательно,

$$1 = P\left(Q_N^+ = \sum_{k=0}^{r^N-1} \mathbf{1}(T_{N,k}=1) = \frac{1}{2}(r^N + r^{NH})\right).$$

Но $\sum\limits_{k=0}^{r^N-1} \mathbf{1}(T_{N,k}=1) = \frac{1}{2}(r^N + r^{NH})$ тогда и только тогда, когда ровно $\frac{1}{2}(r^N + r^{NH})$ штук $T_{N,k}=1$, а остальные равны -1. Следовательно, с вероятностью 1

$$\sum \mathbf{1}(T_{N,0}=y_0,\dots,T_{N,r^N-1}=y_{r^N-1}) =$$

$$= \frac{1}{2}(r^N + r^{NH}),$$

где суммирование в правой части ведется по всем $y_0,\dots,y_{r^N-1}$, таким, что ровно $C_{r^N}^{\frac{1}{2}(r^N+r^{NH})}$ штук y_k равны 1, а остальные равны -1.

Взяв математическое ожидание от обеих частей последнего равенства, в силу однородности случайного процесса с самоподобными траекториями получим

$$p(T_{N,0}=y_0,\dots,T_{N,r^N-1}=y_{r^N-1}) =$$

$$= \frac{1}{C_{r^N}^{\frac{r^N+r^{NH}}{2}}},$$

если $q_N^+ = \frac{r^N-r^{NH}}{2}$, все другие совместные вероятности $p(T_{N,0}=y_0,\dots,T_{N,r^N-1}=y_{r^N-1})$ равны нулю.

Следствие. *При $N=1$ совместное распределение для* $x(0),\dots,x(r-1)$ имеет вид

$$p(x(0)=y_0,\dots,x(r-1)=y_{r-1}) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{C_r^{\frac{r-r^H}{2}}} & \text{при} \qquad q^+ = \dfrac{r+r^H}{2}; \\ 0 & \text{при} \qquad q^+ \neq \dfrac{r+r^H}{2}. \end{cases}$$

Вычислим некоторые числовые характеристики случайных процессов с самоподобными траекториями. Обозначим $T_r = \{kr^N, k=0,1,\dots,N=1,\dots\}$.

Предложение 3. *Математическое ожидание непрерывного однородного случайного процесса с самоподобными траекториями $f(t)$, определенного на* $[0,1]$, *с* $f(0)=0$, $f(1)=1$, *равно*

$$Ef(t) = t.$$

Доказательство. Докажем сначала данное утверждение для узловых точек $t = t_{N,k} = kr^{-N}$, из представления (2) имеем

$$f\left(kr^{-N}\right) = r^{-NH} \sum_{i=0}^{k-1} T_{N,i}.$$

Следовательно, математическое ожидание $f\left(kr^{-N}\right)$ равно

$$Ef\left(kr^{-N}\right) = E\left[r^{-NH}\sum_{i=0}^{k-1} T_{N,i}\right] =$$

$$= r^{-NH}\sum_{i=0}^{k-1} E(T_{N,i}).$$

По условию $P(T_{N,k}=1)=p, P(T_{N,k}=-1)= = q$ и $p+q=1$, поэтому

$$Ef(kr^{-N}) = r^{-NH}\sum_{i=0}^{k-1} E(T_{N,i}) =$$

$$= r^{-NH}\sum_{i=0}^{k-1}(p-q) = r^{-NH}k(p-q).$$

В силу равенства (6) имеем $p-q=\frac{r^{NH}}{r^N}$, значит

$$Ef(kr^{-N}) = r^{-NH}k\frac{r^{NH}}{r^N} = \frac{k}{r^N},$$

или, поскольку $t_{N,k}=kr^{-N}$, получим

$$Ef(t_{N,k}) = \frac{k}{r^N} = t_{N,k}.$$

Для завершения доказательства воспользуемся непрерывностью реализаций процесса $f(t)$: если $t_{N,k}\to t$ при $N\to\infty$, то $Ef(t_{N,k})\to \to Ef(t)$, поскольку, как будет следовать из доказательства предложения 4,

$$\sup_{k,N} Ef^2(t_{N,k}) < +\infty.$$

Предложение 4. *Ковариация непрерывного случайного процесса с самоподобными траекториями $f(t)$, определенного на $[0,1]$ с $f(0)=0, f(1)=1$, равна*

$$\operatorname{cov}[f(t_1), f(t_2)] = (t_1\wedge t_2)\frac{r^{2N}-r^{2HN}}{r^{2HN}(r^N-1)} - t_1t_2\left(1-\frac{r^{2NH}-r^N}{r^{2NH-N}(r^N-1)}\right).$$

Доказательство. По определению, ковариация случайных величин ξ и η равна: $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)=E[\xi\eta]- - E\xi E\eta$, следовательно, в силу самоподобия и непрерывности реализаций процесса $f(t)$ достаточно вычислить ковариацию $E\left[f(kr^{-N})\cdot f(lr^{-N})\right]$ в узловых точках, поэтому имеем

$$E\left[f(kr^{-N})\cdot f(lr^{-N})\right] =$$

$$= E\left[r^{-NH}\sum_{i=0}^{k-1}T_{N,i}\cdot r^{-NH}\sum_{j=0}^{l-1}T_{N,j}\right] =$$

$$= r^{-2NH}E\left[\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{l-1}T_{N,i}T_{N,j}\right] =$$

$$= r^{-2NH}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{l-1}E\left[T_{N,i}T_{N,j}\right].$$

Обозначим через $m=\min(k,l)$ и разобьем сумму на две: при $i=j$ и $i\neq j$, тогда:

$$r^{-2NH}\sum_{i=0}^{m-1}E\left[T_{N,i}T_{N,i}\right] + r^{-2NH}\times$$

$$\times E\left[\sum_{\substack{i,j=0\\ i\neq j}}^{k-1,l-1}T_{N,i}T_{N,j}\right] =$$

$$= r^{-2NH}\sum_{i=0}^{m-1}E\left[T_{N,i}T_{N,i}\right] +$$

$$+ r^{-2NH}\sum_{\substack{i,j=0\\ i\neq j}}^{k-1,l-1}E\left[T_{N,i}T_{N,j}\right].$$

Поскольку $[T_{N,k}]^2 = 1$, то первое слагаемое равно $r^{-2NH}r^m$. Для того чтобы вычислить второе слагаемое, сначала найдем второй момент: $E\left[\sum\limits_{k=0}^{r^N-1}T_{N,k}\right]^2$. Так как в силу леммы 1 $\sum\limits_{k=0}^{r^N-1}T_{N,k} = r^{NH}$, то $E\left[\sum\limits_{k=0}^{r^N-1}T_{N,k}\right]^2 = r^{2NH}$, следовательно, ввиду соотношения $[T_{N,k}]^2 = = 1$ имеем

$$E\left[\sum_{k=0}^{r^N-1}T_{N,k}\right]^2 =$$

$$= E\left\{\sum_{i=0}^{r^N-1}T_{N,i}2 + \sum_{\substack{i,j=0\\ i\neq j}}^{r^N-1}T_{N,i}T_{N,j}\right\} =$$

$$= r^N + \left[\sum_{\substack{i,j=0\\ i\neq j}}^{r^N-1}ET_{N,i}T_{N,j}\right].$$

Таким образом, мы пришли к соотношению

$$r^N + \left[\sum_{\substack{i,j=0\\ i\neq j}}^{r^N-1}ET_{N,i}T_{N,j}\right] = r^{2NH}.$$

Согласно условиям, наложенным на совместное распределение случайных величин $T_{N,k}$, все математические ожидания $ET_{N,i}T_{N,j}$ при $i \neq j$ равны, следовательно, $ET_{N,i}T_{N,j} = \frac{r^{2NH}-r^N}{r^{2N}-r^N}$.

Воспользовавшись последней формулой, имеем

$$E\left[f\left(kr^{-N}\right)\cdot f\left(lr^{-N}\right)\right] =$$

$$= mr^{-2NH} + r^{-2NH}\sum_{\substack{i,j=0\\ i\neq j}}^{k-1,l-1} E\left[T_{N,i}T_{N,j}\right] =$$

$$= mr^{-2NH} + r^{-2NH}\sum_{\substack{i,j=0\\ i\neq j}}^{k-1,l-1}\frac{r^{2NH}-r^N}{r^N\left(r^N-1\right)},$$

значит:

$$E\left[f\left(kr^{-N}\right)\cdot f\left(lr^{-N}\right)\right] =$$

$$= r^{-2NH}\left(m + (kl-m)\frac{r^{2NH}-r^N}{r^N\left(r^N-1\right)}\right) =$$

$$= r^{-2NH}\left(m\frac{r^{2N}-r^{2HN}}{r^N\left(r^N-1\right)} + kl\frac{r^{2NH}-r^N}{r^N\left(r^N-1\right)}\right).$$

Следовательно, ковариация равна

$$\operatorname{cov}\left[f\left(kr^{-N}\right), f\left(lr^{-N}\right)\right] = r^{-2NH}\times$$

$$\times\left(m\frac{r^{2N}-r^{2HN}}{r^N\left(r^N-1\right)} + kl\frac{r^{2NH}-r^N}{r^N\left(r^N-1\right)}\right) - klr^{-2N}.$$

Так как $t_{N,k} = \frac{k}{r^N}$, то, обозначив через $t_1 = \frac{k}{r^N}$ и $t_2 = \frac{l}{r^N}$, получим

$$\operatorname{cov}\left[f\left(t_1\right), f\left(t_2\right)\right] = \left(t_1 \wedge t_2\right)\frac{r^{2N}-r^{2HN}}{r^{2HN}\left(r^N-1\right)} -$$

$$-t_1t_2\left(1 - \frac{r^{2NH}-r^N}{r^{2NH-N}\left(r^N-1\right)}\right).$$

Замечание. Аналогичным образом можно показать, что $\sup\limits_{k,N} Ef^4(t_{N,k}) < +\infty$, следовательно, утверждение предложения 4 будет справедливо для всех $t_1, t_2 \in [0,1]$.

Следствие. *Дисперсия непрерывной самоподобной функции $f(t)$, определенной на $[0,1]$ с $f(0)=0$, $f(1)=1$, равна*

$$D\left[f(t)\right] = t\frac{r^{2N}-r^{2HN}}{r^{2HN}\left(r^N-1\right)} -$$

$$-t^2\left(1 - \frac{r^{2NH}-r^N}{r^{2NH-N}\left(r^N-1\right)}\right).$$

Замечание. Для непрерывного случайного процесса с самоподобными траекториями $f(t)$, определенного на $[0,1]$, с $f(0)=0$, $f(1)=1$ и с параметром $H = \frac{1}{2}$, математическое ожидание, ковариация и дисперсия имеют такой же вид, что и математическое ожидание, ковариация и дисперсия случайного процесса броуновского моста $X(s)$, закрепленного в точках $X(0)=0$ и $X(1)=1$:

$$Ef(t) = t,$$

$$\operatorname{cov}\left[f\left(t_1\right), f\left(t_2\right)\right] = t_1 \wedge t_2 - t_1t_2,$$

$$D\left[f(t)\right] = t - t^2.$$

Таким образом, в работе введен класс случайных процессов с самоподобными траекториями и вычислены некоторые числовые характеристики таких процессов. Некоторые применения случайных процессов с фрактальными траекториями авторы предполагают дать в другой работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kono N.** On self-affine functions // Japan J. of Appl. Math. 1986. Vol. 3, No. 2.
2. **Kono N.** On self-affine functions 2 // Japan J. of Appl. Math. 1988. Vol. 5, No. 3.

ОБ АВТОРАХ

Насыров Фарит Сагитович, проф. каф. математики. Дипл. математик (ЛГУ, 1976). Д-р физ.-мат. наук по теории вероятностей и мат. статистике и по мат. анализу (защ. в ИМ им. Соболева, Новосибирск, 2002). Иссл. в обл. теории случайных процессов, теории функций, финансовой математики.

Султанова Лилия Рамилевна, аспирантка той же каф. Дипл. инж. по мат. моделированию (УГАТУ, 2004). Готовит дис. в обл. теории вероятностей и теории случайных процессов.