Уфа: УГАТУ, 2005 *Вестник УГАТУ* Т. 6, № 2 (13). С. 26–33

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 517.9

А. В. ЖИБЕР, А. М. ГУРЬЕВА

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Исследуются характеристические уравнения для нелинейных гиперболических систем уравнений лиувиллевского типа. Основным результатом является доказательство наличия у уравнений лиувиллевского типа полного базиса интегралов. *Нелинейная гиперболическая система уравнений; интеграл; характеристическое уравнение; уравнение лиувиллевского типа*

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается гиперболическая система уравнений с двумя независимыми переменными вида

$$u^i_{xy} = F^i(x, y, u, u_x, u_y),\quad i = 1, 2, \dots, p,\quad u = (u^1, u^2, \dots, u^p). \tag{1}$$

Для того чтобы ввести характеристическое уравнение и сформулировать утверждения, касающиеся его решений, в первую очередь нужно формализовать тот факт, что «буква» u обозначает произвольное решение системы (1). Для этого принято исключать из всех выражений те частные производные от u, которые можно получить из уравнения (1) . Например, u^i_{xy} заменяется на правую часть $F^i(x, y, u, u_x, u_y)$ всегда, когда речь идет о решениях, u^i_{xyy} – на

$$\frac{\partial F^i}{\partial y} + \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\partial F^i}{\partial u^k} u^k_y + \frac{\partial F^i}{\partial u^k_x} F^k + \frac{\partial F^i}{\partial u^k_y} u^k_{yy} \right)$$

и т. д. Легко видеть, что, таким образом, всякая смешанная производная от u может быть выражена через

$$x,\ y,\ u_1 = u_x,\ u_2 = u_{xx},\ u_3 = u_{xxx},\ \dots,\quad \bar{u}_1 = u_y,\ \bar{u}_2 = u_{yy},\ \bar{u}_3 = u_{yyy},\ \dots. \tag{2}$$

Функции (2) нельзя связать между собой, пользуясь уравнениями (1) и его дифференциальными следствиями. Поэтому во всех определениях и выкладках они считаются независимыми переменными.

Систему уравнений (1) мы будем записывать в виде

$$D\overline{D}u^i = F^i(x, y, u, u_1, \bar{u}_1),\quad i = 1, 2, \dots, p, \tag{3}$$

где D и $\overline{D}$– операторы полных производных системы (1). Более формально, D и $\overline{D}$ являются дифференцированиями в пространстве $\Im$ локально аналитических функций, каждая из которых зависит от конечного числа переменных (2). Эти дифференцирования задаются соотношениями

$$D(u_k) = u_{k+1},\quad \overline{D}(\bar{u}_k) = \bar{u}_{k+1},$$

$$u_0 = \bar{u}_0 = u,\quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$[D, \overline{D}] = 0,\quad D\overline{D}(u) = F(x, y, u, u_1, \bar{u}_1),$$

$$F = \left(F^1, F^2, \dots, F^p\right).$$

Записанные в виде векторных полей, они имеют вид

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{p} u^k_{i+1}\frac{\partial}{\partial u^k_i} + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{p} \overline{D}^{i-1}(F^k)\frac{\partial}{\partial \bar{u}^k_i},$$

$$\overline{D} = \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{p} \bar{u}^k_{i+1}\frac{\partial}{\partial \bar{u}^k_i} + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{p} D^{i-1}(F^k)\frac{\partial}{\partial u^k_i}.$$

Уравнения

$$\overline{D}W = 0,\quad D\overline{W} = 0,\quad W, \overline{W} \in \Im \tag{4}$$

называются характеристическими уравнениями системы (1). По-видимому, впервые эти уравнения рассматривались в работах [1–5]

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 05-01-00775-а и 04-01-00190-а).

в связи с исследованием интегрируемости частных случаев уравнений (1).

Нетрудно показать, что решения уравнений (4) имеют следующую структуру:

$$W = W(x, y, u, u_1, \dots, u_n),$$

$$\overline{W} = \overline{W}(x, y, u, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m).$$

Определение 1. *Решение*

$$W = W(x, y, u, u_1, \dots, u_n), \quad \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial W}{\partial u_n^i}\right)^2 \neq 0$$

характеристического уравнения (4) называется x-интегралом системы (1), а число n — его порядком.

Аналогично определяется y-интеграл.

Например, уравнение Лиувилля

$$u_{xy} = e^u$$

имеет два интеграла второго порядка:

$$W = u_2 - \frac{u_1^2}{2}, \quad \overline{W} = \bar{u}_2 - \frac{\bar{u}_1^2}{2}.$$

Исследование свойств этого уравнения привело (см. [2–11]) к различным, вообще говоря неэквивалентным, определениям класса точно интегрируемых гиперболических уравнений лиувиллевского типа.

В настоящей работе мы примем следующее:

Определение 2. *Система уравнений (1) называется системой лиувиллевского типа, если существуют x и y-интегралы W_k и $\overline{W}_k$, $k = 1, 2, \dots, p$ порядка r и m соответственно, такие, что*

$$\det\left(\frac{\partial W_k}{\partial u_r^i}\right) \neq 0 \quad и \quad \det\left(\frac{\partial \overline{W}_k}{\partial \bar{u}_m^i}\right) \neq 0.$$

Ряд примеров уравнений лиувиллевского типа можно найти, например, в статьях [3, 4, 8, 11–13].

В настоящей работе исследуются характеристические уравнения (4) для систем уравнений (1) лиувиллевского типа. Основным результатом является доказательство наличия у уравнений лиувиллевского типа полного базиса интегралов.

1. ПОЛНЫЙ БАЗИС ИНТЕГРАЛОВ

Пусть система уравнений (1) является системой лиувиллевского типа. Тогда ясно, что она имеет набор x-интегралов w^i, $i = 1, 2, \dots, p$ минимальных порядков $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \dots \leqslant n_p$, $(\operatorname{ord} w^i = n_i)$.

Последнее означает, что

1) $\overline{D}w(x, y, u, u_1, u_2, \dots, u_k) = 0$, $k < n_1$ тогда и только тогда, когда $w = w(x)$;

2) $\overline{D}w(x, y, u, u_1, u_2, \dots, u_k) = 0$, $k \in [n_{l-1}, n_l)$, $l \in [2, p]$ тогда и только тогда, когда w — функция переменных x, w^1, Dw^1, $D^2w^1, \dots, D^{k-n_1}w^1$, w^2, $Dw^2, \dots, D^{k-n_2}w^2$, $\dots, w^{l-1}, Dw^{l-1}, D^2w^{l-1}, \dots, D^{k-n_{l-1}}w^{l-1}$.

Справедливо утверждение:

Лемма 1. *Если система уравнений (1) имеет p x-интегралов в минимальном порядке n, независимых в главном, тогда любой другой x-интеграл есть функция переменных*

$$x, w^1, w^2, \dots, w^p, Dw^1, Dw^2, \dots, Dw^p, D^2w^1, D^2w^2, \dots, D^2w^p, \dots .$$

Доказательство. Пусть $w^1_{u^1_n} \neq 0$, что можно сделать путем переименования переменных, тогда

$$u_n^1 = f_1(x, y, u, u_1, \dots, u_{n-1}, u_n^2, u_n^3, \dots, u_n^p, w^1).$$

Далее от переменных $x, y, u, u_1, \dots, u_n$ перейдем к переменным $x, y, u, u_1, \dots, u_{n-1}$, $u_n^2, u_n^3, \dots, u_n^p, w^1$. Очевидно, что это обратимая замена переменных, в результате которой интегралы w^i, $i = 2, 3, \dots, p$ можно записать в виде

$$w^i = w^i(x, y, u, u_1, \dots, u_{n-1}, u_n^2, u_n^3, \dots, u_n^p, w^1).$$

Тогда $\sum\limits_{i=2}^{p} \left(\frac{\partial w^2}{\partial u_n^i}\right)^2 \neq 0$. Иначе, в противном случае функцию w^2 разложим в окрестности точки $w^{(0)}$ в степенной ряд

$$w^2 = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^2(x, y, u, u_1, \dots, u_{n-1}) \left(w^1 - w^{(0)}\right)^k.$$

Так как $\overline{D}w^2 = 0$ и w^1 является x-интегралом, тогда все коэффициенты w_k^2 ряда будут также x-интегралами порядка $n - 1$ или меньшего. Из того, что n является минимальным порядком, следует, что w_k^2 есть функции переменных x.

Таким образом, $w^2 = w^2(x, w^1)$. А это противоречит независимости в главном интегралов w^i, $i = 1, 2, \dots, p$.

Не ограничивая общности, можно считать, что $w^2_{u_n^2} \neq 0$. Тогда

$$u_n^2 = f_2(x, y, u, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n^3, u_n^4, \ldots, u_n^p, w^1, w^2).$$

Теперь от переменных $x, y, u, u_1, \ldots, u_n$ перейдем к переменным $x, y, u, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n^3, u_n^4, \ldots, u_n^p, w^1, w^2$ в интегралах w^i, $i = 3, 4, \ldots, p$.

Как и выше, можно показать, что $\sum\limits_{i=3}^{p}\left(\frac{\partial w^3}{\partial u_n^i}\right)^2 \neq 0$, и так как $w^3_{u_n^3} \neq 0$, то

$$u_n^3 = f_3(x, y, u, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n^4, u_n^5, \ldots, u_n^p, w^1, w^2, w^3).$$

Продолжая последовательно эту процедуру, приходим на i-м шаге к соотношениям

$$u_n^i = f_i(x, y, u, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n^{i+1}, u_n^{i+2}, \ldots, u_n^p, w^1, w^2, \ldots, w^i), \quad i \leqslant p. \quad (5)$$

Теперь из соотношений (5) получаем, что u_n^i представимы в виде

$$u_n^i = f_i(x, y, u, u_1, \ldots, u_{n-1}, w^1, w^2, \ldots, w^p), \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Применяя оператор дифференцирования D^k к последним формулам, имеем, что

$$u_{n+k}^i = \varphi_i(x, y, u, u_1, \ldots, u_{n-1}, w^1, w^2, \ldots, w^p, Dw^1, \ldots, Dw^p, \ldots, D^k w^1, D^k w^2, \ldots, D^k w^p),$$
$$i = 1, 2, \ldots, p, \;\; k = 1, 2, \ldots .$$

Пусть G — произвольный x-интеграл порядка $s \geqslant n$:

$$G = G(x, y, u, u_1, u_2, \ldots, u_s).$$

От переменных $x, y, u, u_1, u_2, \ldots, u_s$ перейдем к переменным x, y, u, $u_1, \ldots, u_{n-1}$, w^1, $w^2, \ldots, w^p, Dw^1, Dw^2, \ldots, Dw^p, \ldots, D^{s-n}w^1$, $D^{s-n}w^2, \ldots, D^{s-n}w^p$ и в окрестности точки

$$\left(\xi^{(1)}, \xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_{s-n}^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi_1^{(2)}, \ldots, \xi_{s-n}^{(2)}, \ldots, \xi^{(p)}, \xi_1^{(p)}, \ldots, \xi_{s-n}^{(p)}\right)$$

функцию G разложим в степенной ряд:

$$G = \sum_{\alpha_1^1+\cdots+\alpha_1^{s-n}=0}^{\infty} \; \sum_{\alpha_2^1+\cdots+\alpha_2^{s-n}=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_p^1+\cdots+\alpha_p^{s-n}=0}^{\infty} G_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}(x, y, u, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \left(w^1 - \xi^{(1)}\right)^{\alpha_1^1} \times$$
$$\times \left(Dw^1 - \xi_1^{(1)}\right)^{\alpha_1^2} \cdots \left(D^{s-n}w^1 - \xi_{s-n}^{(1)}\right)^{\alpha_1^{s-n}} \times$$
$$\times \left(w^2 - \xi^{(2)}\right)^{\alpha_2^1} \cdots \left(D^{s-n}w^2 - \xi_{s-n}^{(2)}\right)^{\alpha_2^{s-n}} \times$$
$$\times \left(w^3 - \xi^{(3)}\right)^{\alpha_3^1} \cdots \left(w^p - \xi^{(p)}\right)^{\alpha_p^1} \times$$
$$\times \left(Dw^p - \xi_1^{(p)}\right)^{\alpha_p^2} \cdots \left(D^{s-n}w^p - \xi_{s-n}^{(p)}\right)^{\alpha_p^{s-n}}.$$

Здесь $\alpha_k = (\alpha_k^1, \alpha_k^2, \ldots, \alpha_k^{s-n})$, $k = 1, 2, \ldots, p$. Так как $\overline{D}G = 0$, а все функции w^1, $Dw^1, \ldots$, $D^{s-n}w^1$, w^2, $Dw^2, \ldots$, $D^{s-n}w^2, \ldots$, w^p, Dw^p, $\ldots$, $D^{s-n}w^p$, являются x-интегралами, то все коэффициенты этого ряда должны быть также x-интегралами порядка $n-1$ или меньшего. Из того, что число n является минимальным порядком интеграла, следует, что $G_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}$ есть функции переменных x. Таким образом,

$$G = G\Big(x, w^1, w^2, \ldots, w^p, Dw^1, Dw^2, \ldots, Dw^p, \ldots, D^{s-n}w^1, D^{s-n}w^2, \ldots, D^{s-n}w^p\Big).$$

Лемма доказана.

Основной результат настоящего параграфа формулируется в следующем утверждении:

Теорема 1. *Если система уравнений (1) имеет p x-интегралов w^i, $i = 1, 2, \ldots, p$ минимальных порядков $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_p$, независимых в главном, тогда любой другой есть функция переменных*

$$x, w^1, w^2, \ldots, w^p, Dw^1, Dw^2, \ldots, Dw^p, D^2w^1, D^2w^2, \ldots, D^2w^p, \ldots .$$

Доказательство. Положим $N = n_p$ и применим к интегралу w^i оператор полного дифференцирования D^{N-n_i}, получим

$$D^{N-n_i}w^i = w^i_{u^1_{n_i}} u_N^1 + w^i_{u^2_{n_i}} u_N^2 + \cdots + w^i_{u^p_{n_i}} u_N^p + \cdots = \widetilde{w}^i, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1.$$

Таким образом, мы имеем p интегралов $\widetilde{w}^1, \widetilde{w}^2, \ldots \widetilde{w}^{p-1}, w^p$ одного порядка N. Отметим, что построенные интегралы независимы в главном. Далее, проводя аналогичные рассуждения, как и в доказательстве леммы 1, получаем, что

$$u^i_N = f_i(x, y, u, u_1, \ldots, u_{N-1}, \widetilde{w}^1, \widetilde{w}^2, \ldots, \widetilde{w}^{p-1}, w^p), \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

или

$$u^i_N = f_i(x, y, u, u_1, \ldots, u_{N-1}, D^{N-n_1}w^1, D^{N-n_2}w^2, \ldots, D^{N-n_{p-1}}w^{p-1}, w^p), \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Применим оператор дифференцирования D^k к последним соотношениям, получим

$$u^i_{N+k} = \phi_i(x, y, u, u_1, \ldots, u_{N-1}, D^{N-n_1}w^1, D^{N-n_1+1}w^1, \ldots, D^{N-n_1+k}w^1, D^{N-n_2}w^2, D^{N-n_2+1}w^2, \ldots, D^{N-n_2+k}w^2, \ldots \ldots, D^{N-n_{p-1}}w^{p-1}, D^{N-n_{p-1}+1}w^{p-1}, \ldots \ldots, D^{N-n_{p-1}+k}w^{p-1}, w^p, Dw^p, \ldots D^k w^p),$$

$$i = 1, 2, \ldots, p, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Пусть G – произвольный x-интеграл порядка $s \geqslant N$:

$$G = G(x, y, u, u_1, u_2, \ldots, u_s).$$

Далее, как и выше, от переменных x, y, u, u_1, u_2, $\ldots$, u_s перейдем к переменным x, y, u, u_1, $\ldots$, u_{N-1}, $D^{N-n_1}w^1$, $D^{N-n_1+1}w^1$, $\ldots$, $D^{s-n_1}w^1$, $D^{N-n_2}w^2$, $D^{N-n_2+1}w^2$, $\ldots$, $D^{s-n_2}w^2$, $\ldots$, $D^{N-n_{p-1}}w^{p-1}$, $D^{N-n_{p-1}+1}w^{p-1}$, $\ldots$, $D^{s-n_{p-1}}w^{p-1}$, w^p, Dw^p, $\ldots$, $D^{s-N}w^p$. В окрестности точки

$$\Big(\xi^{(1)}_{N-n_1}, \xi^{(1)}_{N-n_1+1}, \ldots, \xi^{(1)}_{s-n_1}, \xi^{(2)}_{N-n_2}, \xi^{(2)}_{N-n_2+1}, \ldots, \xi^{(2)}_{s-n_2}, \ldots, \xi^{(p-1)}_{N-n_{p-1}}, \xi^{(p-1)}_{N-n_{p-1}+1}, \ldots, \xi^{(p-1)}_{s-n_{p-1}}, \xi^{(p)}, \xi^{(p)}_1, \ldots, \xi^{(p)}_{s-N}\Big)$$

последнюю функцию G представим в виде степенного ряда

$$G = \sum_{\alpha_1^{N-n_1}+\cdots+\alpha_1^{s-n_1}=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_{p-1}^{N-n_{p-1}}+\cdots+\alpha_{p-1}^{s-n_{p-1}}=0}^{\infty} \sum_{\alpha_p^1+\cdots+\alpha_p^{s-N}=0}^{\infty} G_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}(x, y, u, u_1, u_2, \ldots, u_{N-1}) \times$$

$$\times \Big(D^{N-n_1}w^1 - \xi^{(1)}_{N-n_1}\Big)^{\alpha_1^{N-n_1}} \times \Big(D^{N-n_1+1}w^1 - \xi^{(1)}_{N-n_1+1}\Big)^{\alpha_1^{N-n_1+1}} \cdots \times \Big(D^{s-n_1}w^1 - \xi^{(1)}_{s-n_1}\Big)^{\alpha_1^{s-n_1}} \cdots \times$$

$$\times \Big(D^{N-n_{p-1}}w^{p-1} - \xi^{(p-1)}_{N-n_{p-1}}\Big)^{\alpha_{p-1}^{N-n_{p-1}}} \times \Big(D^{N-n_{p-1}+1}w^{p-1} - \xi^{(p-1)}_{N-n_{p-1}+1}\Big)^{\alpha_{p-1}^{N-n_{p-1}+1}} \cdots \times \Big(D^{s-n_{p-1}}w^{p-1} - \xi^{(p-1)}_{s-n_{p-1}}\Big)^{\alpha_{p-1}^{s-n_{p-1}}} \times$$

$$\times \Big(w^p - \xi^{(p)}\Big)^{\alpha_p^1} \times \Big(Dw^p - \xi^{(p)}_1\Big)^{\alpha_p^2} \cdots \Big(D^{s-N}w^p - \xi^{(p)}_{s-N}\Big)^{\alpha_p^{s-N}}.$$

Здесь $\alpha_k = (\alpha_k^{N-n_1}, \alpha_k^{N-n_1+1}, \ldots, \alpha_k^{s-n_1})$, $k = 1, 2, \ldots, p-1$, $\alpha_p = (\alpha_p^1, \alpha_p^2, \ldots, \alpha_p^{s-N})$.

Так как $\overline{D}G = 0$, а все функции $D^{N-n_1}w^1$, $D^{N-n_1+1}w^1$, $\ldots$, $D^{s-n_1}w^1$, $D^{N-n_2}w^2$, $D^{N-n_2+1}w^2$, $\ldots$, $D^{s-n_2}w^2$, $\ldots$, $D^{N-n_{p-1}}w^{p-1}$, $D^{N-n_{p-1}+1}w^{p-1}$, $\ldots$, $D^{s-n_{p-1}}w^{p-1}$, $w^p, Dw^p, \ldots$ $D^{s-N}w^p$ являются x-интегралами, то все коэффициенты ряда должны быть также x-интегралами порядка $N-1$ или меньшего. Из определения интегралов минимальных порядков вытекает, что $G_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}$ есть функции переменных $x, w^1, Dw^1, D^2w^1, \ldots$, $D^{N-n_1-1}w^1$, $w^2, Dw^2, D^2w^2, \ldots$, $D^{N-n_2-1}w^2, \ldots$, w^{p-1}, $Dw^{p-1}, D^2w^{p-1}, \ldots, D^{N-n_{p-1}-1}w^{p-1}$. Таким образом, произвольный x-интеграл G имеет вид

$$G = G\Big(x, w^1, w^2, \ldots, w^p, Dw^1, Dw^2, \ldots, Dw^p, \ldots, D^{s-n_1}w^1, D^{s-n_2}w^2, \ldots, D^{s-n_p}w^p\Big)$$

и, следовательно, интегралы $w^1, w^2, \ldots, w^p$ образуют полный базис.

Теорема доказана.

Отметим, что теорема 1 является обобщением соответствующего утверждения для скалярного уравнения типа (1) ($p = 1$) (см. [14]).

2. ЛИНЕЙНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

Для скалярного уравнения

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

базис x-интегралов состоит из одного элемента $w(x, y, u, u_1, \dots, u_m)$, при этом в случае $m \geq 2$ интеграл w можно выбрать линейным по старшей переменной u_m [14].

Результатом этого параграфа является следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть система уравнений лиувиллевского типа (1) имеет базис интегралов $w^1, w^2, \dots, w^p$ порядка n. Тогда при $n \geq 2$ элементы базиса можно выбрать линейными по старшим переменным:*

$$W^i = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ik}(x, y, u, u_1, \dots, u_{n-1}) u_n^k + \beta_i(x, y, u, u_1, \dots, u_{n-1}), \quad i = 1, 2, \dots, p. \tag{6}$$

Доказательство. Как было показано в предыдущем параграфе, старшие переменные u_n^i можно представить в виде

$$u_n^i = f_i(x, y, u, u_1, \dots, u_{n-1}, w^1, \dots, w^p), \quad i = 1, 2, \dots, p. \tag{7}$$

Далее разложим функции (7) в степенные ряды в окрестности точки $\left(w_0^1, w_0^2, \dots, w_0^p\right)$ по переменным $w^1, w^2, \dots, w^p$:

$$u_n^i = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p = 0}^{\infty} \alpha^i_{i_1 i_2 \cdots i_p}(x, y, u, u_1, \dots, u_{n-1}) \times \left(w^1 - w_0^1\right)^{i_1} \cdots \left(w^p - w_0^p\right)^{i_p}, \quad i = 1, 2, \dots, p. \tag{8}$$

Теперь применим к соотношениям (8) оператор полного дифференцирования $\overline{D}$, получим в силу системы (3) равенства

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial F^i}{\partial u_1^k} u_n^k + \Phi^i(x, y, u, \bar{u}_1, u_1, \dots, u_{n-1}) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p = 0}^{\infty} \overline{D} \alpha^i_{i_1 i_2 \cdots i_p} \left(w^1 - w_0^1\right)^{i_1} \cdots \left(w^p - w_0^p\right)^{i_p},$$

$i = 1, 2, \dots, p$, или с учетом (8) соотношения вида

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial F^i}{\partial u_1^k} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p = 0}^{\infty} \alpha^i_{i_1 i_2 \cdots i_p} \left(w^1 - w_0^1\right)^{i_1} \cdots \left(w^p - w_0^p\right)^{i_p} + \Phi^i = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p = 0}^{\infty} \overline{D} \alpha^i_{i_1 i_2 \cdots i_p} \left(w^1 - w_0^1\right)^{i_1} \cdots \left(w^p - w_0^p\right)^{i_p},$$

$i = 1, 2, \dots, p$. Последние эквивалентны следующим уравнениям:

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha^k_{i_1 i_2 \cdots i_p} \frac{\partial F^i}{\partial u_1^k} = \overline{D} \alpha^i_{i_1 i_2 \cdots i_p}, \quad i_1 + i_2 + \dots + i_p > 0 \tag{9}$$

и

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha^k_{00\cdots 0} \frac{\partial F^i}{\partial u_1^k} + \Phi^i = \overline{D} \alpha^i_{00\cdots 0}, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Общее решение уравнений (9) имеет следующую структуру:

$$\alpha^i_{i_1 i_2 \cdots i_p} = \sum_{k=1}^{p} C^k_{i_1 i_2 \cdots i_p}(x) \beta_i^k(x, y, u, u_1, \dots, u_{n-1}), \tag{10}$$

$i = 1, 2, \dots, p$, $\quad i_1 + i_2 + \dots + i_p > 0$. Теперь подстановка функции (10) в соотношения (8) дает:

$$u_n^i = \alpha^i_{00\cdots 0}(x, y, u, u_1, \dots, u_{n-1}) + \sum_{k=1}^{p} \beta_i^k(x, y, u, u_1, \dots, u_{n-1}) \times \sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_p > 0}^{\infty} C^k_{i_1 i_2 \cdots i_p}(x) \left(w^1 - w_0^1\right)^{i_1} \cdots \times \left(w^p - w_0^p\right)^{i_p}, \tag{11}$$

$i = 1, 2, \dots, p$. Положим

$$W^k = \sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_p > 0}^{\infty} C^k_{i_1 i_2 \cdots i_p}(x) \left(w^1 - w_0^1\right)^{i_1} \cdots \times \left(w^p - w_0^p\right)^{i_p}, \tag{12}$$

$k = 1, 2, \dots, p$. Ясно, что $\overline{D} W^k = 0$ при $k = 1, 2, \dots, p$. Из формул (11), (12) получаем равенства

$$u_n^i = \alpha^i_{00\cdots 0}(x, y, u, u_1, \dots, u_{n-1}) + \sum_{k=1}^{p} \beta_i^k(x, y, u, u_1, \dots, u_{n-1}) W^k,$$

$i = 1, 2, \dots, p$, откуда следуют соотношения (6).

Теорема доказана.

3. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЛИУВИЛЛЕВСКОГО ТИПА СО СПЕЦИАЛЬНЫМ БАЗИСОМ ИНТЕГРАЛОВ

В этом параграфе для простоты изложения мы рассмотрим двухкомпонентную систему уравнений (1) ($p = 2$, $u^1 = u$, $u^2 = v$, $F^1 = a$, $F^2 = b$):

$$\begin{cases} u_{xy} = a(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y); \\ v_{xy} = b(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y). \end{cases} \tag{13}$$

Нашей целью является определение правой части системы лиувиллевского типа (13) для специального базиса интегралов.

Справедливо следующее предложение:

Теорема 3. *Пусть интегралы*

$$\begin{gathered} w = \alpha u_n + \beta \quad и \quad W = \delta v_n + \gamma, \\ \operatorname{ord}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \leqslant n - 1, \quad n \geqslant 2 \end{gathered} \tag{14}$$

образуют полный базис x-интегралов уравнений (13). Тогда

$$\frac{\partial a}{\partial v_x} = 0 \quad и \quad \frac{\partial b}{\partial u_x} = 0. \tag{15}$$

Обратно, если справедливы соотношения (15), то существует базис из элементов вида (14).

Доказательство. Пусть интегралы w и W представимы в виде

$$w = \alpha u_n + \beta \quad и \quad W = \delta v_n + \gamma,$$

$$\operatorname{ord}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \leqslant n - 1.$$

Так как функции w и W являются x-интегралами, то выполняются соотношения:

$$\overline{D}w = \overline{D}\alpha u_n + \alpha(a_{u_1} u_n + a_{v_1} v_n + \cdots) + \overline{D}\beta = 0,$$

$$\overline{D}W = \overline{D}\delta v_n + \delta(b_{u_1} u_n + b_{v_1} v_n + \cdots) + \overline{D}\gamma = 0.$$

Из последнего получаем, что $a_{v_1} = 0$ и $b_{u_1} = 0$.

Докажем вторую часть теоремы. В первую очередь покажем, что x-интегралы системы уравнений (13) можно выбрать как функции переменных

$$\begin{gathered} w = w(x, y, u, v, u_1, v_1, \ldots, u_{n-1}, v_{n-1}, u_n), \\ W = W(x, y, u, v, u_1, v_1, \ldots, u_{n-1}, v_{n-1}, v_n) \end{gathered} \tag{16}$$

при выполнении условия (15).

Рассмотрим случай, когда интегралы w и W такие, что $w_{u_n} \cdot w_{v_n} \neq 0$ и $W_{u_n} \cdot W_{v_n} \neq 0$. Так как $w_{u_n} \neq 0$, то $u_n = f(x, y, u, v, u_1, v_1, \ldots, u_{n-1}, v_{n-1}, v_n, w)$. Далее от переменных $x, y, u, v, u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n$ перейдем к переменным x, y, u, v, u_1, v_1, ..., u_{n-1}, v_{n-1}, v_n, w. Очевидно, что это обратимая замена переменных, в результате которой интеграл W можно записать в виде

$$W = W(x, y, u, v, u_1, v_1, \ldots, u_{n-1}, v_{n-1}, v_n, w).$$

В окрестности точки $w^{(0)}$ последнюю функцию представим в виде степенного ряда

$$W = \sum_{i=0}^{\infty} W^i(x, y, u, v, u_1, v_1, \ldots, u_{n-1}, v_{n-1}, v_n) \times \left(w - w^{(0)}\right)^i.$$

Так как $\overline{D}W = 0$ и w является x-интегралом, то при выполнении условия $b_{u_1} = 0$ все коэффициенты W^i ряда будут также x-интегралами порядка n или меньшего. По крайней мере, один из коэффициентов ряда является x-интегралом порядка n. Иначе $W = f(w)$, что противоречит независимости интегралов.

Таким образом, мы доказали, что в качестве интеграла W можно выбрать функцию переменных $x, y, u, v, u_1, v_1, \ldots, u_{n-1}, v_{n-1}, v_n$. Аналогично доказывается, что вместо w можно выбрать интеграл вида

$$w = w(x, y, u, v, u_1, v_1, \ldots, u_{n-1}, v_{n-1}, u_n).$$

В остальных случаях утверждение, что x-интегралы системы уравнений (13) можно выбрать как функции переменных вида (16) при выполнении условия (15), доказывается аналогично, как и выше.

А теперь докажем, что интегралы w и W можно выбрать линейными по старшим переменным.

Дифференцируя соотношение $\overline{D}w = 0$ по старшей переменной u_n, получаем, что

$$\left(\overline{D} + a_{u_1}\right) w_{u_n} = 0 \quad и \quad \left(\overline{D} + 2a_{u_1}\right) w_{u_n u_n} = 0. \tag{17}$$

Возможны два варианта. Первый случай — $w_{u_n u_n} = 0$. Тогда

$$w = \alpha u_n + \beta, \quad \operatorname{ord}(\alpha, \beta) \leqslant n - 1.$$

Если $w_{u_n u_n} \neq 0$, то из соотношения (17) следует, что

$$\overline{D}\left\{\ln \frac{w_{u_n u_n}}{w_{u_n}^2}\right\} = 0.$$

Последнее эквивалентно записи

$$\ln \frac{w_{u_n u_n}}{w_{u_n}^2} = h(x,w) \qquad (18)$$

для некоторой функции h. Соотношение (18) можно записать в виде

$$\frac{w_{u_n u_n}}{w_{u_n}} = \frac{\partial H(x,w)}{\partial w} w_{u_n},$$

$$\text{где} \quad \frac{\partial H(x,w)}{\partial w} = e^h,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial u_n}\left\{\ln \frac{\partial w}{\partial u_n} - H(x,w)\right\} = 0.$$

Следовательно,

$$\ln \frac{\partial w}{\partial u_n} - H(x,w) =$$

$$= \varphi(x, y, u, v, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_{n-1}, v_{n-1}).$$

Отсюда $e^{-H}\frac{\partial w}{\partial u_n} = e^{\varphi}$, и тогда, проинтегрировав, получим

$$\int e^{-H} dw = e^{\varphi} u_n +$$

$$+ \phi(x, y, u, v, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_{n-1}, v_{n-1}).$$

Поэтому в качестве w можно выбрать функцию, линейную по старшей переменной u_n.

Аналогично доказывается, что в качестве интеграла W можно выбрать функцию вида

$$W = \gamma v_n + \delta, \quad \mathrm{ord}\,(\gamma, \delta) \leqslant n - 1.$$

Теорема доказана.

Результат теоремы 3 обобщается на случай многокомпонентной системы уравнений (1), а именно: наличие базиса x-интегралов вида

$$w^i = \alpha_i u_n^i + \beta_i, \quad \mathrm{ord}\,(\alpha_i, \beta_i) \leqslant n - 1, \qquad (19)$$

$i = 1, 2, \ldots, p$ эквивалентно соотношениям

$$\frac{\partial F^i}{\partial u_1^k} = 0 \qquad \text{для всех} \quad k \neq i.$$

Если к дополнению базиса (19) система уравнений (1) имеет базис y-интегралов вида

$$\bar{w}^i = \bar{\alpha}_i \bar{u}_m^i + \bar{\beta}_i, \quad \mathrm{ord}\,(\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i) \leqslant m - 1,$$

$i = 1, 2, \ldots, p$, то система уравнений (1) имеет специальную форму:

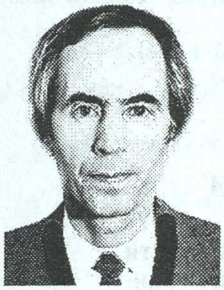
$$u_{xy}^i = F^i(x, y, u^1, u^2, \ldots, u^p, u_x^i, u_y^i),$$

$$i = 1, 2, \ldots, p.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Жибер А. В., Шабат А. Б.** Уравнения Клейна–Гордона с нетривиальной группой // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247, № 5. С. 1103–1107.
2. **Жибер А. В., Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б.** Уравнения типа Лиувилля // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249, № 1. С. 26–29.
3. **Шабат А. Б., Ямилов Р. И.** Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана: Препринт. Уфа: Баш. филиал АН СССР, 1981. 20 с.
4. **Лезнов А. Н., Смирнов В. Г., Шабат А. Б.** Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем // Теоретическая и математическая физика. 1982. Т. 51, № 1. С. 10–21.
5. **Жибер А. В., Шабат А. Б.** Системы уравнений $u_x = p(u,v), v_y = q(u,v)$, обладающие симметриями // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 1. С. 29–33.
6. **Darboux G.** Lecons sur la theorie generale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal. Paris: Gauthier–Villars, 1915. V. 2.
7. **Vessiot E.** Sur les equations aux derivees partialles du second order, $F(x,y,p,q,r,s,t) = 0$, inteqrables par la methode de Darboux // J. Math. Pure Appl. 18; 21 (1939; 1942).
8. **Звягин М. Ю.** Уравнения второго порядка, приводимые преобразованием Беклунда к $z_{xy} = 0$ // Докл. АН СССР. 1991. 316 (1). С. 36–40.
9. **Жибер А. В., Соколов В. В., Старцев С. Я.** О нелинейных гиперболических уравнениях, интегрируемых по Дарбу // Докл. РАН. 1995. 343 (6). С. 746–748.
10. **Anderson J. M., Kamran N.** The variational bicomplex for second order scalar partial differential equations in the plane // Duke Math. J. 1997. V. 87(2). P. 265–319.
11. **Жибер А. В., Соколов В. В.** Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа // УМН. 2001. Т. 56 (1). С. 63–106.
12. **Мешков А. Г.** Симметрии скалярных полей III. Двумерные интегрируемые модели // Теоретическая и математическая физика. 1985. Т. 63, № 3. С. 323–332.
13. **Демской Д. К., Мешков А. Г.** Представление Лакса для триплета скалярных полей // Теоретическая и математическая физика. 2003. Т. 134, № 3. С. 351–364.
14. **Жибер А. В.** Квазилинейные гиперболические уравнения с бесконечной алгеброй симметрий // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58, № 4. С. 33–54.

ОБ АВТОРАХ



Жибер Анатолий Васильевич, проф., вед. науч. сотр. ИМ УНЦ РАН. Дипл. математик (Новосиб. гос. ун-т, 1969). Д-р физ.-мат. наук по диф. уравнениям (защ. в ИМиМ УрОРАН, Екб., 1994). Иссл. в обл. совр. группового анализа диф. уравнений.

Гурьева Адель Минивасимовна, асп. кафедры математики УГАТУ. Дипл. магистр в области прикладной математики и информатики (УГАТУ, 2002). Готовит диссертацию о преобразованиях Лапласа линейных гиперболических уравнений под рук. проф. А. В. Жибера.