Уфа: УГАТУ, 2005 Вестник УГАТУ Т. 6, № 2 (13). С. 34–39

УДК 533

С. В. ХАБИРОВ

К ГРУППОВОМУ АНАЛИЗУ МОДЕЛИ ТЕРМОВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Показано, что групповое свойство модели термовязкой несжимаемой жидкости аналогично групповому свойству моделей идеальной жидкости и вязкой несжимаемой жидкости. Построена оптимальная система подалгебр размерностей 1, 2, 3, 4 бесконечной допускаемой алгебры. Установлены все инвариантные подмодели рангов 3 и 2. *Гидродинамика; инвариантные подмодели*

Во многих производственных процессах приходится иметь дело с движением вязкой теплопроводной несжимаемой жидкости в трубах, в реакторах, в колоннах переменного сечения. При этом вязкость, теплоемкость и коэффициент теплопроводности зависят от температуры. Если вязкость и теплоемкость для критической температуры принимают согласованные экстремальные значения, то говорят о жидкостях с аномальной вязкостью [1]. Пространственные задачи движения такой жидкости сложны для аналитических и численных исследований. Поэтому желательно редуцировать уравнения к более простым всеми возможными способами, оставаясь в рамках точных решений. Уменьшение числа независимых переменных возможно при рассмотрении инвариантных подмоделей на основе допускаемой группы преобразований [2]. Классификация инвариантных подмоделей определяется оптимальной системой конечномерных подалгебр алгебры Ли, соответствующей допускаемой группе [3]. Построение оптимальной системы проведено для подалгебр малых размерностей 1, 2, 3 и 4. Классификация инвариантных подмоделей сделана для подалгебр размерностей 4 и 3.

1. ГРУППОВОЕ СВОЙСТВО УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Уравнения движения вязкой теплопроводной несжимаемой жидкости имеют вид [4, гл. 6, §1]:

$$\nabla\cdot\vec{u}=0,\quad \frac{d\vec{u}}{dt}+\nabla p=\nu(T)\nabla^2\vec{u}+2\nu'(T)\nabla T\cdot E,$$
$$c(T)\frac{dT}{dt}=\nabla\cdot(\lambda(T)\nabla T)+2\nu(T)E:E, \tag{1.1}$$

где $\frac{d}{dt}=\partial_t+\vec{u}\cdot\nabla$ — оператор полного дифференцирования, $\vec{u}$ — скорость, p — давление, отнесенное к плотности, T — температура, ν — кинематическая вязкость, λ — удельный коэффициент теплопроводности, c — теплоемкость, $2E=\nabla\otimes\vec{u}+(\nabla\otimes\vec{u})^T$ — тензор скоростей деформации.

Если вязкость ν постоянна, то система (1.1) распадается на систему Навье–Стокса и уравнение теплопроводности. При $\nu=0$ уравнения Навье–Стокса переходят в модель идеальной жидкости.

Теорема 1.1. Система (1.1) с произвольными функциями $\nu(T)$, $c(T)$, $\lambda(T)$ допускает операторы, записанные в декартовых координатах:

$$\begin{aligned}
\langle\varphi_j(t)\rangle_j&=\varphi_j\partial_{x^j}+\dot\varphi_j\partial_{u^j}-x^j\ddot\varphi_j\partial_p,\quad j=1,2,3,\\
X_7&=x^2\partial_{x^3}-x^3\partial_{x^2}+u^2\partial_{u^3}-u^3\partial_{u^2},\\
X_8&=x^3\partial_{x^1}-x^1\partial_{x^3}+u^3\partial_{u^1}-u^1\partial_{u^3},\\
X_9&=x^1\partial_{x^2}-x^2\partial_{x^1}+u^1\partial_{u^2}-u^2\partial_{u^1},\\
X_{10}&=\partial_t,\quad \langle\varphi_0(t)\rangle_0=\varphi_0\partial_p.
\end{aligned}$$

Эти операторы образуют ядро L алгебр Ли, допускаемых системами вида (1.1). Линейное подпространство $J=\left\{\langle\varphi_j\rangle_j,\quad j=0,1,2,3\right\}$ есть идеал в L. Линейное подпространство $L_{10}=\{X_j,\quad j=1,...,10\}$, где $X_j=\langle 1\rangle_j,\quad X_{3+j}=\langle t\rangle_j,\quad j=1,2,3$, есть подалгебра в L. Алгебра L_{10} есть алгебра Ли группы Галилея.

Справедливо разложение алгебры L в полупрямую сумму идеала J и подалгебры L_4: $L=L_4\oplus J$, где $L_4=\{X_7,X_8,X_9,X_{10}\}$.

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований ОЗММПУ РАН № ОЭ 15.

Доказательство теоремы проводится по следующей схеме. Находим преобразования, отвечающие операторам:

$$X_{10} \to t' = t + t_0; \quad X_7, X_8, X_9 \to \vec{x}' = O\vec{x},$$
$$\vec{u}' = O\vec{u}, \quad OO^T = 1, \quad \det O = 1;$$
$$\langle \varphi(t)_j \rangle_j \to \vec{x}' = \vec{x} + \vec{\varphi}(t), \quad \vec{u}' = \vec{u} + \dot{\vec{\varphi}},$$
$$p' = p - \vec{x} \cdot \ddot{\vec{\varphi}} - \frac{1}{2}\dot{\vec{\varphi}} \cdot \dot{\vec{\varphi}} + \varphi_0(t).$$

Проверяем, что эти преобразования не меняют систему (1.1). Утверждение об алгебраических свойствах линейного множества операторов следует из таблицы ненулевых коммутаторов [2, §7]:

$$[\langle\varphi\rangle_1, X_9] = \langle\varphi\rangle_2, \qquad [\langle\varphi\rangle_1, X_8] = -\langle\varphi\rangle_3,$$
$$[\langle\psi\rangle_2, X_7] = \langle\psi\rangle_3, \qquad [\langle\psi\rangle_2, X_9] = -\langle\psi\rangle_1,$$
$$[\langle\chi\rangle_3, X_7] = -\langle\chi\rangle_2, \qquad [\langle\chi\rangle_3, X_8] = \langle\chi\rangle_1,$$
$$[X_7, X_8] = -X_9, \qquad [X_7, X_9] = X_8,$$
$$[X_8, X_9] = -X_7, \qquad [X_{10}, \langle\varphi\rangle_i] = \langle\dot{\varphi}\rangle_i,$$
$$[\langle\varphi\rangle_j, \langle\psi\rangle_j] = \langle\psi\ddot{\varphi} - \varphi\ddot{\psi}\rangle_0,$$
$$i = 0, 1, 2, 3; \qquad j = 1, 2, 3.$$

Теорема 1.2. Система (1.1) допускает растяжение только в случае $\nu = \nu_0 T^n$, $c = c_0 T^n$, $\lambda = \lambda_0 T^{k+n}$. Оператор растяжения таков:

$$X_{11} = 2(-k+n+1)t\partial_t + (-2k+n+1)x^i\partial_{x^i} - (n+1)u^i\partial_{u^i} - 2(n+1)p\partial_p - 2T\partial_T.$$

Для идеальной жидкости $\nu = \lambda = 0$ имеются два оператора растяжений:

$$X_{11} = 2t\partial_t + x^i\partial_{x^i} - u^i\partial_{u^i} - 2p\partial_p,$$
$$X_{12} = t\partial_t + x^i\partial_{x^i}.$$

Операторы из теорем 1.1 и 1.2 образуют полное линейное множество, допускаемое уравнениями Навье–Стокса и уравнениями идеальной жидкости [4].

2. ОПТИМАЛЬНАЯ СИСТЕМА ПОДАЛГЕБР МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Две подалгебры из L подобны, если они связаны линейным преобразованием внутренних автоморфизмов [2, §15]. Для любого оператора $Y \in L$ однопараметрическая группа внутренних автоморфизмов определяется решением уравнения Ли в L с произвольными начальными данными

$$\partial_a X' = \left[Y, X'\right], \quad X'|_{a=a} = X.$$

Произвольный элемент в L задаем в виде $X = x^i X_i + \sum_{j=0}^{3} \langle\psi_j\rangle_j$, $i = 1, ..., 10$.

Обозначим символом (x, ψ, ψ_0) координаты оператора X, где $x = (x^1, ..., x^{10})$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$. Если в качестве Y взять базисные операторы X_i, $i = 1, ..., 10$; $\langle g_i \rangle_j$, $j = 0, 1, 2, 3$, то решения уравнений Ли дадут все однопараметрические группы внутренних автоморфизмов, суперпозиция которых определяет группу $Int\, L$. Внутренние автоморфизмы удобно сгруппировать следующим образом.

Введем обозначения для проекций:

$$p_1(x, \psi, \psi_0) = (x^1, x^2, x^3),$$
$$p_2(x, \psi, \psi_0) = (x^4, x^5, x^6),$$
$$p_3(x, \psi, \psi_0) = (x^7, x^8, x^9),$$
$$\alpha_1 = (a_1, a_2, a_3),$$
$$\alpha_2 = (a_4, a_5, a_6),$$
$$\alpha_3 = (a_7, a_8, a_9),$$
$$g = (g_1, g_2, g_3).$$

Внутренние автоморфизмы для $Y = X_1$, X_2, X_3 записываются в виде

$$T : p_1' = p_1 + p_3 \times \alpha_1, \quad \psi_0' = \psi_0 - \alpha_1 \cdot \ddot{\psi}.$$

Внутренние автоморфизмы для $Y = X_4$, X_5, X_6 записываются так:

$$\Gamma : p_1' = p_1 - x^{10}\alpha_2, \quad p_2' = p_2 + p_3 \times \alpha_2,$$
$$\psi_0' = \psi_0 - \alpha_2 \cdot \dot{\psi}.$$

Операторам вращения X_7, X_8 , X_9 отвечают преобразования:

$$O : p_1' = Op_1, \quad p_2' = Op_2, \quad p_3' = Op_3,$$
$$\psi' = O\psi, \quad OO^T = 1, \quad \det O = 1.$$

Оператору X_{10} отвечает однопараметрическая группа преобразований

$$A_{10} : p' = p_1 + a_{10}p_2, \quad \psi_j'(t) = \psi_j(t + a_{10}),$$
$$j = 0, 1, 2, 3.$$

Операторам $\langle\psi_j\rangle_j$, $j = 0, 1, 2, 3$, соответствуют автоморфизмы

$$\Psi_g \Psi_{g0} : \psi' = \psi - x^{10}\dot{g} + p_3 \times g,$$
$$\psi_0' = \psi_0 + (p_1 + tp_2 + \psi)\ddot{g} - \ddot{\psi} \cdot g + \frac{1}{2}x^{10}(g \cdot \dddot{g} - \dot{g} \cdot \ddot{g} - 2\dot{g}_0).$$

которые образуют бесконечную линейную по g, g_0 нормальную подгруппу, действующую в J.

Оптимальная система алгебры L_{10} группы Галилея вычислена в [5] в алгебраических терминах. Оптимальная система алгебры $\{L_{10}, X_{12}\}$ группы Галилея, расширенной растяжением,вычислена в [3].

Алгебра $\{L_{10}, X_{11}, X_{12}\}$ аналогична алгебре, возникшей при групповой классификации уравнений газовой динамики [6, $N = 5$]. Для нее перечислены подалгебры фактор-алгебры по абелевому идеалу [6, табл. 6].

Справедливы разложения $L_{10} = L_4 \oplus J_6$, $L = L_4 \oplus J$, где $L_4 = \{X_7, X_8, X_9, X_{10}\}$ — подалгебра, $J_6 = \{X_i,\ i = 1, ..., 6\}$ — абелев идеал в L_{10}, J — идеал в L.

Теорема 2.1. Оптимальная система алгебры L_4 состоит из 5 подалгебр:

$$L_4, \quad \{X_7, X_8, X_9\}, \quad \{X_7, X_{10}\},$$
$$X_7 + aX_{10}, \quad X_{10}.$$

Теорема 2.2. Оптимальная система конечномерных подалгебр малых размерностей алгебры L состоит из следующих подалгебр:

1.1 $X_7 + aX_{10}, \quad a \neq 0;$

1.2 $X_7 + \langle\varphi\rangle_1;$

1.3 $X_{10};$

1.4 $\sum\limits_{j=1}^{3} \langle\varphi_i\rangle_i;$

1.5 $\langle\varphi\rangle_0;$

2.1 $\{X_{10}, \quad X_7 + aX_1 + b\langle 1\rangle_0\};$

2.2 $\{X_7 + aX_{10}, \quad b\langle e^{\mu t}\rangle_1 + f\left(\langle e^{\mu t}\cos\frac{t}{a}\rangle_2 + \langle e^{\mu t}\sin\frac{t}{a}\rangle_3\right) + d\langle e^{\mu t}\rangle_0;$
$a \neq 0, \quad b^2 + f^2 = 1$ или $b = f = 0,\ d = 1\};$

2.3 $\left\{X_7 + \langle\varphi\rangle_1, \quad \left\langle \varphi\left(b + a\int\varphi^{-2}dt\right)\right\rangle_1 + \langle\psi\rangle_0, \quad a^2 + b^2 = 1\right\};$

2.4 $\{X_{10}, \quad a\left\langle e^{\mu t}\right\rangle_1 + b\left\langle e^{\mu t}\right\rangle_0, \quad a^2 + b^2 = 1\};$

2.5 $\left\{\sum\limits_{i=1}^{3}\langle\varphi_i\rangle_i, \quad \sum\limits_{i=1}^{3}\langle\psi_i\rangle_i, \quad \ddot{\vec{\varphi}}\cdot\vec{\psi} = \vec{\varphi}\cdot\ddot{\vec{\psi}}, \quad \vec{\varphi}\times\vec{\psi} \neq 0\right\}.$

Здесь $\varphi, \varphi_i, \psi_j$ — функции переменной t; a, b, f, d, μ — постоянные.

Добавление к подалгебрам 1.2, 1.4, 1.5 оператора $\langle\sigma(t)\rangle_0$ дает двумерную подалгебру. Такие подалгебры не включены в список.

В оптимальную систему входит 17 типов трехмерных подалгебр и 27 типов четырехмерных подалгебр. Полный список приведен в [7]. Оптимальная система подалгебр размерностей 1 и 2 алгебры $\{L, X_{11}, X_{12}\}$ вычислена в [8]. Оптимальная система подалгебр размерностей 1, 2 и 3 алгебры $\{L, X_{11}\}$ вычислена в [9].

3. ПОДМОДЕЛИ РАНГА 3

По одномерным подалгебрам строятся инвариантные подмодели ранга 3. Они задаются системами уравнений для инвариантных функций, зависящих от 3-х независимых переменных.

Подалгебра 1.1 имеет инварианты в цилиндрической системе координат C: $x, r, \varphi = \theta - t/a, U, W, V, p, T$. Представление инвариантного решения таково: $W = r/a + W_1$, W_1, U, V, p, T функции переменных x, r, φ. Подстановка представления в (1.1) дает вращательную подмодель.

$$\begin{aligned}
&DU + p_x = \nu\Delta U + \nu'\big(2T_xU_x + T_r(V_x + U_r) + \\
&\quad + r^{-1}T_\varphi(W_{1x} + r^{-1}U_\varphi)\big),\\
&DV + p_r - r^{-1}W^2 - 2a^{-1}W - ra^{-2} = \\
&\quad = \nu(\Delta V - 2r^{-2}W_\varphi - r^{-2}V) + \nu'\big(T_x(V_x + U_r) + \\
&\quad + 2T_rV_r + r^{-1}T_\varphi\left(W_r + r^{-1}V_\varphi - r^{-1}W\right)\big),\\
&DW + r^{-1}p_\varphi + V\left(r^{-1}W + 2a^{-1}\right) = \\
&\quad = \nu\left(\Delta W + 2r^{-2}V_\varphi - r^{-2}W\right) + \\
&\quad + \nu'\big(T_x(W_x + r^{-1}U_\varphi) + \\
&\quad + T_r\left(W_r + r^{-1}V_\varphi - r^{-1}W\right) + \\
&\quad + 2r^{-2}T_\varphi\left(W_\varphi + V\right)\big),\\
&cDT = (\lambda T_x)_x + (\lambda T_r)_r + r^{-2}\left(\lambda T_\varphi\right)_\varphi + r^{-1}\lambda T_r + \\
&\quad + \nu\big(2V_x^2 + 2V_r^2 + 2r^{-2}\left(W_\varphi + V\right)^2 + \\
&\quad + (V_x + U_r)^2 + \left(W_x + r^{-1}U_\varphi\right)^2 + \\
&\quad + \left(W_r + r^{-1}V_\varphi - r^{-1}W\right)^2\big),\\
&U_x + V_r + r^{-1}\left(W_\varphi + V\right) = 0,
\end{aligned}$$

где $D = U\partial_x + V\partial_r + r^{-1}W\partial_\varphi$, $\Delta = \partial_x^2 + \partial_r^2 + r^{-2}\partial_\varphi^2 + r^{-1}\partial_r$.

При $a \to \infty$ получается стационарная подмодель, которая строится по подалгебре 1.3.

Подалгебра 1.2 имеет инварианты в системе координат C: $t, r, \theta, U - \varphi^{-1}\dot{\varphi}x = U_1, V, W, T, p + \frac{1}{2}\varphi^{-1}\ddot{\varphi}x^2 = p_1$. Представление инвариантного решения получается из инвариантов, если функции U_1, V, W, T, p_1 зависят от t, r, θ. Подстановка представления в (1.1) дает обобщенную вращательно-симметричную подмодель

$$DU_1 + p_{1x} + \varphi^{-1}\dot{\varphi}U_1 = \\ = \nu\Delta U_1 + \nu'\left(T_{\text{к}}U_{1r} + r^{-2}T_\theta U_{1\theta}\right),$$
$$DV + p_r - r^{-1}W^2 = \nu(\Delta V - 2r^{-2}W_\theta - r^{-1}V) + \\ + \nu'\left(2T_rV_r + r^{-1}T_\theta\left(W_r + r^{-1}V_\theta - r^{-1}W\right)\right),$$
$$DW + r^{-1}p_\theta + r^{-1}VW = \\ \nu\left(\Delta W + 2r^{-1}V_\theta - r^{-2}W\right) + \\ + \nu'\left(T_r(W_r + r^{-1}U_\theta - r^{-1}W) + 2r^{-2}T_\theta(W_\theta + V)\right),$$
$$cDT = (\lambda T_r)_r + r^{-2}\left(\lambda T_\theta\right)_\theta + r^{-1}\lambda T_r + \\ + \nu\big(2V_r^2 + 2r^{-2}\left(W_\theta + V\right)^2 + U_{1r}^2 + \\ + r^{-2}U_{1\theta}^2 + \left(W_r + r^{-1}V_\theta - r^{-1}W\right)^2\big),$$
$$V_r + r^{-1}W_\theta + r^{-1}V + \varphi^{-1}\dot{\varphi} = 0,$$

где $D = \partial_t + V\partial_r + r^{-1}W\partial_\theta$, $\Delta = \partial_r^2 + r^{-2}\partial_\theta^2 + +r^{-1}\partial_r$. При $\dot{\varphi} = 0$ получается подмодель двумерных движений, которая строится по подалгебре 1.2 с $\varphi = 0$.

Подалгебра 1.3 задает представление инвариантного решения, в котором все функции не зависят от t. Получается стационарная подмодель.

Подалгебра 1.4 имеет инварианты вида

$$t, \quad s_1 = \vec{a}_1\cdot\vec{x}, \quad s_2 = \vec{a}_2\cdot\vec{x}, \quad \vec{u}_1 = \vec{u} - B\vec{x}, \\ p_1 = p + \vec{x}\cdot C\vec{x}, \quad C = C^T, \quad T,$$

где $\vec{a}_1(t)$, $\vec{a}_2(t)$ — вектор-функции и $B(t)$, $C(t)$ — матричные функции удовлетворяют равенствам $\vec{a}_1\cdot\vec{\varphi} = 0$, $\vec{a}_2\cdot\vec{\varphi} = 0$, $\dot{\vec{\varphi}} = = B\varphi$, $2C = \dot{B} + B^2$, $\dot{B}^T + (B^T)^2 = \dot{B} + B^2$.

Представление инвариантного решения получится, если функции $\vec{u}_1$, p_1, T зависят от t, s_1, s_2. Подстановка представления (1.1) дает обобщенную двумерную нестационарную подмодель

$$\vec{u}_{1s_1}\cdot\vec{a}_1 + \vec{u}_{1s_2}\cdot\vec{a}_2 + \operatorname{tr} B = 0;$$
$$\vec{u}_{1t} + \vec{u}_{1s_1}(\vec{a}_1\cdot\vec{u}_1) + \vec{u}_{1s_2}(\vec{a}_2\cdot\vec{u}_1) + \vec{a}_1p_{s_2} + \vec{a}_2p_{s_2} = \\ = \nu(\vec{a}_1^2\vec{u}_{1s_1s_2} + 2(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)\vec{u}_{1s_1s_2} + \vec{a}_2^2\vec{u}_{1s_2s_2}) + \\ + \nu'[T_{s_1}((B + B^T)\vec{a}_1 + \vec{a}_1^2\vec{u}_{1s_1} + (\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)\vec{u}_{1s_2} + \\ + (\vec{a}_1\cdot\vec{u}_{1s_1})\vec{a}_1 + (\vec{a}_1\cdot\vec{u}_{1s_2})\vec{a}_2) + \\ + T_{s_2}((B + B^T)\vec{a}_2 + (\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)\vec{u}_{1s_1} + \\ + \vec{a}_2^2\vec{u}_{1s_2} + (\vec{a}_2\cdot\vec{u}_{1s_1})\vec{a}_1 + (\vec{a}_2\cdot\vec{u}_{1s_2})\vec{a}_2)],$$
$$c(T_t + (\vec{a}_1\cdot\vec{u}_1)T_{s_1} + (\vec{a}_2\cdot\vec{u}_1)T_{s_2}) = \\ = \vec{a}_1^2(\lambda T_{s_1})_{s_1} + 2\left(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2\right)\left(\lambda T_{s_1s_2} + \lambda' T_{s_1}T_{s_2}\right) + \\ + \vec{a}_2^2(\lambda T_{s_2})_{s_2} + \frac{1}{2}\nu E : E^T,$$

где $E = B + B^T + \vec{u}_{1s_1}\otimes\vec{a}_1 + \vec{u}_{1s_2}\otimes\vec{a}_2$. При этом выполняются равенства $\dot{\vec{a}}_1 + B^T\vec{a}_1 = 0$, $\dot{\vec{a}}_2 + + B^T\vec{a}_2 = 0$.

4. ПОДМОДЕЛИ РАНГА 2

По двумерным подалгебрам строятся инвариантные подмодели ранга 2. Они задаются системами уравнений для инвариантных функций, зависящих от 2-х независимых переменных.

Подалгебра 2.1 задает представление инвариантного решения в системе координат C

$$U = ar^{-1}W + U_1, \quad p = b\theta + P,$$

где U_1, P, V, W, T — функции переменных r, $s = x - a\theta$.

Подстановка представления в (1.1) дает стационарную подмодель с винтовыми линиями уровня инвариантных функций

$$U_{1s} + V_r + r^{-1}V = 0,$$
$$DU_1 + (1 + a^2r^{-2})P_s - 2ar^{-2}VW - abr^{-2} = \\ = \nu(\Delta U_1 + 2a^2r^{-3}V_s - 2ar^{-2}W_r + 2ar^{-3}W) + \\ + \nu'[2T_s\left(U_{1s}(1 + a^2r^{-2}) + a^2r^{-3}V\right) + \\ + T_r\left(V_s(1 + a^2r^{-2}) + U_{1r}\right)],$$
$$DV + P_r - r^{-1}W^2 = \nu(\Delta V + 2ar^{-2}W_s - r^{-2}V) + \\ + \nu'[T_s\left(V_s(1 + a^2r^{-2}) + U_{1r}\right) + 2T_rV_r],$$
$$DW - ar^{-1}P_s + r^{-1}VW + br^{-1} = \\ = \nu\left(\Delta W - 2ar^{-2}V_s - r^{-2}W\right) + \\ + \nu'[T_s(W_s(1 + a^2r^{-2}) - ar^{-1}U_{1s} - 2ar^{-2}V) + \\ + T_r(W_r - ar^{-1}V_s - r^{-1}W)],$$
$$cDT = (1 + a^2r^{-2})\left(\lambda T_s\right)_s + (\lambda T_r)_r + r^{-1}\lambda T_r + \\ + \nu[2(U_{1s} + ar^{-1}W_s)^2 + \\ + \left((1 + a^2r^{-2})W_s - ar^{-1}U_s\right)^2 + 2V_r^2 + \\ + 2r^{-2}(V - aW_s)^2 + (V_s + U_{1r} + ar^{-1}W_r - \\ - ar^{-2}W)^2 + \left(W_r - ar^{-1}V_\theta - r^{-1}W\right)^2],$$

где $D = U_1\partial_s + V\partial_r$, $\Delta = (1 + a^2r^{-2})\partial_s^2 + \partial_r^2 + + r^{-1}\partial_r$.

Подалгебра 2.2 при $f = 1$ задает представление инвариантного решения в декартовой системе координат D :

$$u = u_1 + b(W_1 + (\mu y + a^{-1}z)\cos\tau + \\ + (\lambda z + a^{-1}y)\sin\tau),$$
$$v = (y\cos\tau + z\sin\tau)(-a^{-1}\sin\tau + \mu\cos\tau) - \\ - v_1\sin\tau + w_1\cos\tau,$$
$$w = (y\cos\tau + z\sin\tau)(a^{-1}\cos\tau + \mu\sin\tau) + \\ + v_1\cos\tau + w_1\sin\tau,$$

$$p = P - (y\cos\tau + z\sin\tau)[-d + b\mu^2 x + 2\mu a^{-1}(z\cos\tau - y\sin\tau) + \frac{1}{2}(\mu^2 - a^2)(y\cos\tau + z\sin\tau)],$$

где $\tau = ta^{-1}$. Функции $u_1,\ v_1,\ w_1,\ P,\ T$ зависят от переменных $s_2 = z\cos\tau - y\sin\tau,\ s_1 = x - b(y\cos\tau + z\sin\tau)$.

Подстановка представления в (1.1) дает подмодель с прямыми линиями уровня для инвариантных функций

$$\begin{aligned}
&u_{1s} + v_{1s_2} + \mu = 0,\\
&Du_1 + (1+b^2)P_{s1} + 2ba^{-1}(v_1 + \mu s_2) - bd + b\mu^2 s_1 = \nu\Delta u_1 + \nu'\Big[2T_{s1}(1+b^2)u_{1s_1} + T_{s_2}\big(u_{1s_1} + (1+b^2)v_{1s_1}\big)\Big],\\
&Dv_1 + P_{s_2} + 2a^{-1}w_1 + a^{-2}s_2 = \nu\Delta v_1 + \nu'\left[T_{s_1}\left(u_{1s_2} + (1+b^2)\,v_{1s_1}\right) + 2T_{s_2}v_{1s_1}\right],\\
&Dw_1 - bP_{s_2} + \mu w_1 - a^{-1}v_1 + d - b\mu^2 s_1 - \mu a^{-1}s_1 = \nu\Delta w_1 + \nu'\Big[T_{s_1}\left((1+b^2)w_{1s_1} - bu_{1s_1} - b\mu\right) + T_{s_2}\left(w_{1s_2} - bv_{1s_1} - a^{-1}\right)\Big],\\
&c\,DT = (1+b^2)(\lambda T_{s_1})_{s_1} + (\lambda T_{s_2})_{s_2} + \nu[2(u_{1s_1} + bw_{1s_1})^2 + 2v_{1s_2}^2 + 2w_{1s_2}^2 + b^2v_{1s_1}^2 + 2b^2w_{1s_1}^2 + (v_{1s_1} + u_{1s_2} + bw_{1s_2})^2 +\\
&\quad + (w_{1s_1}(1-b^2) - bu_{1s_1})^2 - 2bw_{1s_2}v_{1s_1} + 2ba^{-1}u_{1s_1} + 2a^{-1}(1-b^2)w_{1s_2} - 2\mu b^2u_{1s_1} - 2\mu b(1+b^2)w_{1s_1} + a^{-2}(1+b^2) + \mu(b^2+2)],
\end{aligned}$$

где $D = u_1\partial_{s_1} + v_1\partial_{s_2},\ \Delta = (1+b^2)\partial_{s_1}^2 + \partial_{s_2}^2$.

При $f = 0,\quad b = 1$ представление инвариантного решения в системе координат C имеет вид

$$U = \mu x + U_1, \quad W = r(W_1 + a^{-1}),$$
$$p = xd - \frac{1}{2}\mu^2x^2 + P,$$

где $U_1,\ V,\ W_1,\ T,\ P$ — функции переменных $s = \theta - ta^{-1},\ r$.

Подстановка в (1.1) дает подмодель плоских вращательных движений, равноускоренных в перпендикулярном направлении

$$\begin{aligned}
&V_r + W_{1s} + r^{-1}V + \mu = 0,\\
&DU_1 + \mu U_{1s} + d = \nu\Delta U_1 + \nu'(T_rU_{1r} + r^{-2}T_sU_{1s}),\\
&DV + P_r - r(W_1 + a^{-1})^2 = \nu(\Delta V - r^{-2}V - 2r^{-1}W_{1s}) + \nu'(2T_rV_r + r^{-1}T_s(W_r + r^{-1}V_s - r^{-1}W)),\\
&DW_1 + r^{-2}P_s + 2r^{-1}V(W_1 + a^{-1}) = \nu(\Delta W_1 + 2r^{-1}W_{1r} + 2r^{-3}V_s) + \nu'[T_r(W_{1r} + r^{-2}V_s) + 2r^{-2}T_s(W_{1s} + r^{-1}V)],\\
&c\,DT = (\lambda T_r)_r + r^{-2}(\lambda T_s)_s + r^{-1}\lambda T_r + \nu[2\mu^2 + 2V_r^2 + 2(W_{1s} + r^{-1}V)^2 + U_r^2 + r^{-2}U_s^2 + (rW_{1r} + r^{-1}V_s)^2],
\end{aligned}$$

где $D = V\partial_r + W_1\partial_s,\ \Delta = \partial_r^2 + r^{-2}\partial_{ss} + r^{-1}\partial_r$.

Подалгебра 2.3 задает представление инвариантного решения в системе координат C

$$U = \psi^{-1}(\dot\psi x - a\theta) + U_1,$$
$$p = -1/2\varphi^{-1}\ddot\varphi x^2 + P,$$
$$\psi = \varphi(b + a\int\varphi^{-2}dt).$$

Функции $U_1,\ P,\ V,\ W,\ T$ зависят от переменных t и r. Подстановка в (1.1) дает подмодель обобщенных радиальных движений.

$$\begin{aligned}
&V = r^{-1}V_1(t) - \frac{1}{2}\psi^{-1}\dot\psi r,\\
&P_r = r^{-1}W^2 - \nu'T_r(2r^{-2}V_1 + \psi^{-1}\dot\psi) + r\left(\frac{1}{2}\psi^{-1}\ddot\psi - \frac{3}{4}\psi^{-2}\dot\psi^2\right) - V_1r^{-1} + V_1^2r^{-3},\\
&DU_1 + \psi^{-1}(\dot\psi U_1 - ar^{-1}W) = \nu r^{-1}(rU_{1r})_r - \nu'T_rU_{1r},\\
&DW + W(r^{-2}V_1 - \frac{1}{2}\psi^{-1}\dot\psi) = \nu(W_{rr} + r^{-1}W_r - r^{-2}W) - \nu'T_r(W_r - r^{-1}W),\\
&c\,DT = (\lambda T_r)_r + r^{-1}\lambda T_r + \nu[3\psi^{-2}\dot\psi^3 + 4r^{-4}V_1^2 + U_{1r}^2 + a^2r^{-2}\psi^{-2} + (W_r - r^{-1}W)^2],
\end{aligned}$$

где $D = \partial_t + (r^{-1}V_1 - \frac{1}{2}\psi^{-1}\dot\psi r)\partial_r,\ V_1(t),\ \varphi(t)$ — произвольные функции.

Подалгебра 2.4 задает представление инвариантного решения в системе координат D: $u = \mu x + u_1, p = bx + \frac{1}{2}\mu^2x^2 + P$, а функции U_1, P, v, w, T зависят от y, z. Система (1.1) переходит в подмодель плоских стационарных течений

$$\begin{aligned}
&v_y + w_z + \mu = 0,\\
&Du_1 + \mu u_1 + b = \nu\Delta u_1 + \nu'(T_yu_{1y} + T_zu_{1z}),\\
&Dv + P_y = \nu\Delta v + \nu'(2T_yv_y + T_z(v_z + w_y)),\\
&Dw + P_z = \nu\Delta w + \nu'[T_y(w_y + v_z) + 2T_zw_z],\\
&c\,DT = (\lambda T_y)_y + (\lambda T_z)_z + \nu[2v_y^2 + 2w_z^2 + 2\mu^2 + u_{1y}^2 + u_{1z}^2 + (v_z + w_y)^2],
\end{aligned}$$

где $D = v\partial_y + w\partial_z$, $\Delta = \partial_y^2 + \partial_z^2$.

Подалгебра 2.5 имеет инварианты t, $s = \vec{\alpha} \cdot \vec{x}$, T, $\vec{u_1} = \vec{u} + \vec{a} \times \vec{x} + D\vec{x}$, $P = p + (1/2)(D\vec{x})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{x})^2 - \vec{a}^2\vec{x}^2 + \vec{x} \cdot D\vec{x}$, где $\vec{\alpha} = \vec{\varphi} \times \vec{\psi} \neq 0$, $D = D^T$, $\dot{\vec{\varphi}} + \vec{a} \times \vec{\varphi} + D\vec{\varphi} = 0$, $\dot{\vec{\psi}} + \vec{a} \times \vec{\psi} + D\vec{\psi} = 0$, $\dot{\vec{\alpha}} - \vec{\alpha} \times \vec{a} - D\vec{a} + \vec{\alpha} \operatorname{tr} D = 0$, $\vec{a} = \vec{a} \operatorname{tr} D - D\vec{a}$; $D(t)$ — матричная функция, $\vec{\alpha}$, $\vec{a}$, $\vec{\varphi}$, $\vec{\psi}$ — вектор-функции, зависящие от переменной t. Представление инвариантного решения получится, если функции $\vec{u_1}$, T, P зависят от t и s.

Система (1.1) станет для представления подмоделью одномерных нестационарных движений.

$$\vec{u_1} \cdot \vec{\alpha} - s \operatorname{tr} D = \mu(t),$$

$$P_s\vec{\alpha}^2 = 2\nu' T_s(\vec{\alpha}^2 \operatorname{tr} D - \vec{\alpha} \cdot D\vec{\alpha}) - s \operatorname{tr}\dot{D} + \vec{u}_1 \cdot (2\dot{\vec{\alpha}} + \vec{\alpha} \operatorname{tr} D) - \dot{\mu} - \mu \operatorname{tr} D,$$

$$\vec{u}_{1t} + \mu\vec{u}_{1s} = \vec{a} \times \vec{u}_1 + D\vec{u}_1 + \nu\vec{\alpha}^2\vec{u}_{1ss} + \vec{\alpha}^{-2}\vec{\alpha}(\dot{\mu} + s(\operatorname{tr}\dot{D} + (\operatorname{tr} D)^2) - 2\vec{u}_1 \cdot \dot{\vec{\alpha}}) + \nu' T_s(\vec{\alpha}^2\vec{u}_{1s} - \vec{\alpha} \operatorname{tr} D + 2\dot{\vec{\alpha}}\vec{\alpha}^{-2}\vec{\alpha} \cdot D\vec{\alpha} - 2D\vec{\alpha}),$$

$$c(T_t + \mu T_s) = \vec{\alpha}^2(\lambda T_s)_s + 2\nu E : E,$$

где $2E = \vec{u}_{1s} \otimes \vec{\alpha} + (\vec{u}_{1s} \otimes \vec{\alpha})^T - 2D$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все инвариантные подмодели рангов 2 и 3 установлены. Индивидуальные особенности подмоделей могут быть получены их дальнейшим изучением методами группового анализа [9]. Инвариантные решения ранга 1 и 0 по подалгебрам из оптимальной системы работы [7] пока не рассматривались.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Урманчеев С. Ф., Киреев В. Н.** Установившееся течение жидкости с температурной аномалией вязкости // ДАН. 2004. Т. 396, № 2. С. 204–207.
2. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
3. **Овсянников Л. В.** Программа подмодели. Газовая динамика // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
4. **Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А.** Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994. 318 с.
5. **Garnon L.** Continuous subgroups of the Galilei and Galilei-similitude groups // Canadian J. of Physics. 1989. V. 67, No. 1. P. 21–36.
6. **Khabirov S.** Optimal system of symmetry subalgebras forbig models of gasdinamics // Salsuk J. of Appl. Math. 2002. V. 3, No. 2. P. 65–80.
7. **Хабиров С. В.** Симметрийный анализ модели несжимаемой жидкости с вязкостью и теплопроводностью, зависящими от температуры: Препринт. Уфа: Ин-т мех. УНЦ РАН, 2005. 45 с.
8. **Шанько Ю. В., Капцов О. В.** Оптимальные системы подалгебр и инвариантные решения ранга два для трехмерных уравнений Эйлера // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1814–1819.
9. **Fushchych W., Popowych R.** Symmetry reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equatious. I, II // Nonlinear Mathematical Physics. 1994. V. 1, No. 1. P. 75–113; No. 2. P. 158–189.

ОБ АВТОРЕ

Хабиров Салават Валеевич, проф., гл. науч. сотр., зав. лаб. ИМ УНЦ РАН, проф. каф. математики УГАТУ. Дипл. механик (Новосиб. гос. ун-т, 1970). Д-р физ.-мат. наук (защ. в Ин-те мат. и мех. РАН, Екб., 1991). Иссл. в обл. груп. анализа диф. уравнений.