Уфа: УГАТУ, 2005 Вестник УГАТУ Т. 6, № 2 (13). С. 45–51

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • ФИЗИКА

УДК 621.6.001:621.59, 536.242.001.5, 517.958+519.63

Н. М. ЦИРЕЛЬМАН, А. В. ЖИБЕР

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ТЕОРИИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

Показано применение нелокальных преобразований к анализу формирования нестационарных полей температуры и концентрации вещества и к нахождению местоположения подвижных границ. *Тепломассоперенос; фазовое превращение; шаровая симметрия; эволюционные уравнения*

ВВЕДЕНИЕ

Нахождение распределений потенциалов переноса тепла и вещества при зависящих от них, а также от координат и времени свойствах среды, параметрах граничных условий и при наличии подвижных границ, на которых происходит, в частности, изменение агрегатного состояния вещества, встречает непреодолимые трудности при использовании традиционных методов решения соответствующих задач математической физики. Между тем наличие аналитических решений позволило бы проводить параметрический анализ влияния различного рода факторов на протекание процесса тепломассопереноса и организовывать его проведение в оптимальных режимах.

С указанной точки зрения мы полагаем актуальным показать возможные приложения почти обратимых преобразований вида

$$\begin{aligned} dy &= a\left(x,u\right)dx + b\left(x,u,u_x\right)dt, \\ a\left(x,u\right) &= \varphi\left(y,v\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Преобразования (1) использовались в работах [1–3] для классификации эволюционных уравнений, а также применялись многими авторами для построения важных с точки зрения приложений точных решений эволюционных уравнений (см., напр., [4–8]).

На их основе в работе [9] были получены точные решения начально-краевой задачи, описывающей динамику адсорбции–десорбции с нелинейной изотермой сорбции для различных распределений на входе в пористую среду условия Данквертса и при задании концентрации адсорбата в подвижной фазе на поверхности пористой среды. Кроме того, с использованием преобразований (1) в [10,11] были изучены процессы фазового превращения водорода с изменением его агрегатного состояния. При этом получены зависимости для описания температурных полей в старой и новой фазах и для определения закона движения границы их раздела.

В настоящей работе приведена схема применений преобразований (1) в задачах тепломассопереноса и даны примеры применения теории для различного рода граничных условий.

1. АЛГОРИТМ ПРИМЕНЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Рассмотрим два эволюционных уравнения в дивергентной форме:

$$\frac{\partial a\left(x,u\right)}{\partial t} = \frac{\partial b\left(x,u,u_x\right)}{\partial x}\,,$$
$$\frac{\partial c\left(y,v\right)}{\partial t} = \frac{\partial e\left(y,v,v_y\right)}{\partial y}\,.$$

Заменой $a\left(x,u\right) \leftrightarrow u,\ c\left(y,v\right) \leftrightarrow v$ они сводятся к уравнениям:

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x}B(x,u,u_x), \tag{2}$$

$$v_t = \frac{\partial}{\partial y}A(y,v,v_y). \tag{3}$$

Пусть преобразование типа (1) задается формулами:

$$\begin{gathered} dy = u\,dx + Bdt, \quad dx = v\,dy + Adt, \\ u = \frac{1}{v}\,, \quad A = -vB. \end{gathered} \tag{4}$$

Преобразования (4) переводят уравнение (2) в уравнение (3) и наоборот, если $B = B(u,u_x),\ A = A(v,v_y)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-97909 р_агидель_а).

Далее рассмотрим преобразование вида

$$dy = u\,dx + B(x,u,u_x)\,dt, \quad u = \varphi(y,v), \qquad (5)$$

которое уравнение (2) преобразует в эволюционное уравнение (3). Нетрудно доказать, что уравнение (2), сводящееся заменой (5) к уравнению типа (3), имеет вид

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x}\left[b(u,u_x) + cxu\right], \quad c = \text{const}. \qquad (6)$$

Приведем схему применения преобразований (5) в задачах со свободными границами типа Стефана с вырождением области E начального существования фазы в точку. Случай $E = (a,b)$, $a < b$ рассматривается аналогично.

***Задача* А**: найти функции $x_i(t)$ и решение $u(x,t)$ уравнения (6) в области $x_1(t) < x_2(t)$, $t > 0$ такие, что имеют место равенства

$$\begin{gathered} p_i(u,u_x) = \varphi(t), \\ \frac{dx_i(t)}{dt} = q_i(u,u_x,t) - cx \\ \text{при } x = x_i(t),\ t > 0; \\ x_i(0) = a, \quad i = 1,2. \end{gathered} \qquad (7)$$

***Задача* Б**: найти функцию $x = x(t)$ и решение $u(x,t)$ уравнения (6) в области $f(t) < x < x(t)$, $t > 0$ такие, что выполняются следующие соотношения:

$$p_1(u,u_x) = \varphi_1(t) \text{ при } x = f(t),\ t > 0, \qquad (8)$$

$$p_2(u,u_x) = \varphi_2(t), \quad \frac{dx}{dt} = q(u,u_x,t) - cx$$
$$\text{при } x = x(t),\ t > 0,\ f(0) = x(0). \qquad (9)$$

Ясно, что преобразование (5) необратимо в общей ситуации, тем не менее, используя такие преобразования, часто можно решение задач **А** и **Б** сводить к решению подобных задач для преобразованного уравнения.

Так, если $q_i(u,u_x,t) \neq (\psi_i(t) - b(u,u_x))/u$, $i = 1,2$, то задаче **А** при использовании преобразования (5) соответствует следующая задача: найти функции и решение преобразованного уравнения (3) в области $y_1(t) < y < y_2(t)$, $t > 0$ такие, что справедливы равенства:

$$\begin{gathered} p_i(\varphi,\varphi\varphi') = \varphi_i(t), \\ \frac{dy_i}{dt} = \varphi q_i(\varphi,\varphi\varphi',t) + b(\varphi,\varphi\varphi') \\ \text{при } y = y_i(t),\quad t > 0, \\ y_i(0) = d,\ i = 1,2. \end{gathered}$$

Отметим, что при

$$q(u,u_x,t) \neq (\varphi(t) - b(u,u_x))/u$$

задача **Б** сводится к задаче следующего вида: найти функции $y_i(t)$ и решение $v(y,t)$ уравнения (3) в области $y_1(t) < y < y_2(t)$, $t > 0$ такие, что

$$\begin{gathered} p_1(\varphi,\varphi\varphi') = \varphi_1(t), \\ \frac{dy_1}{dt} = \varphi f'(t) + b(\varphi,\varphi\varphi') + cf(t)\varphi \\ \text{при } y = y_1(t),\ t > 0; \\ p_2(\varphi,\varphi\varphi') = \varphi_2(t), \\ \frac{dy_2}{dt} = \varphi q(\varphi,\varphi\varphi',t) + b(\varphi,\varphi\varphi') \\ \text{при } y = y_2(t),\ t > 0, \\ y_i(0) = d,\ i = 1,2. \end{gathered}$$

Здесь через φ' обозначено выражение $\varphi' = \varphi_y + v_y\varphi_y$.

Нетрудно выписать краевые условия (7)–(9), при которых задачи **А** и **Б** в области со свободными границами сводятся к краевой задаче вида: найти решение $v(y,t)$ уравнения (3) в области $f_1(t) < y < f_2(t)$, $t > 0$ такое, что выполняются соотношения

$$a_i(t,v,v_y) = \varphi_i(t) \text{ при } y = f_i(t),\ t > 0,$$
$$i = 1,2,\ f_1(0) = f_2(0)$$

или же эти 2 задачи сводятся к задаче типа **Б** для преобразованного уравнения.

Рассмотрим примеры применения преобразований (1).

Первым из них является классическая задача Стефана для нелинейного уравнения теплопроводности, которую сформулируем следующим образом: найти функции $x(t)$ и $u(x,t)$ такие, что удовлетворяются соотношения

$$u_t = -2uu_{xx} + u_x^2,\ -\infty < x < x(t),\ t > 0, \qquad (10)$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ -\infty < x \leqslant 0, \qquad (11)$$

$$u(x(t),t) = \psi(t),\ t > 0, \qquad (12)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -u_x(x(t),t) + f(t),\ t > 0,\ x(0) = 0. \qquad (13)$$

Рассмотрим преобразование вида

$$dx = v(y,t)\,dy + v_y(y,t)\,dt,$$
$$u(x,t) = v^2(y,t)/2. \qquad (14)$$

Замена (14) сводит уравнение (10) к уравнению теплопроводности $v_t = v_{yy}$. Пусть $v(y,t)$ — решение следующей краевой задачи:

$$v_t = v_{yy}, \quad -\infty < y < h(t), \quad t > 0, \tag{15}$$
$$v(y,0) = g(y), \quad -\infty < y \leqslant 0, \tag{16}$$
$$v(h(t),t) = p(t), \quad t \geqslant 0. \tag{17}$$

Далее предположим, что $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ — ограниченные и непрерывно дифференцируемые функции, $f(t)$ — непрерывная функция, причем $\psi(t) < 0, \varphi(x) < 0, \varphi(0) = \psi(0)$, и пусть имеют место равенства

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)\frac{1}{p(\tau)}d\tau, \qquad p(t) = (-2\psi t))^{1/2}.$$

Тогда, если функция $g(y)$ — решение уравнения

$$g(y) = \left\{-2\varphi\left(\int_0^y g(x)\,dx\right)\right\}^{1/2}$$

и имеет место интеграл

$$\int_{-\infty}^0 (-2\varphi(x))^{-1/2}\,dx = \infty,$$

то нетрудно проверить, что решение исходной задачи (10)–(13) существует и вычисляется по формулам:

$$x(t) = \int_0^t \{p(\tau)\,h'(\tau) + v_y(h(\tau),\tau)\}\,d\tau,$$

$$u(x,t) = -\frac{1}{2}v^2(y,t),$$

$$x = \int_{(0,0)}^{(y,t)} v(s,\tau)\,ds + v_s(s,\tau)d\tau.$$

Здесь $v(y,t)$ — решение вспомогательной задачи (15)–(17).

Другим примером применения преобразования (1) является задача о нахождении двух неизвестных границ для уравнения (10), имеющая вид:

$$u_t = -2uu_{xx} + u_x^2, \quad x_1(t) < x < x_2(t), \quad t > 0, \tag{18}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x_1(0) \leqslant x \leqslant x_2(0), \tag{19}$$
$$u(x_i(t),t) = \psi_i(t), \quad t > 0, \tag{20}$$
$$\frac{dx_i}{dt}u_x(x_i(t),t) + f_i(t), \quad t > 0,$$
$$i = 1,2, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = l, \quad l > 0. \tag{21}$$

Ее решение может быть выражено, как и ранее, через решение краевой задачи для линейного уравнения теплопроводности. Действительно, рассмотрим следующую задачу:

$$v_t = v_{yy}, \quad h_1(t) < y < h_2(t), \quad t > 0, \tag{22}$$
$$v(y,0) = g(y), \quad h_1(0) \leqslant y \leqslant h_2(0), \tag{23}$$
$$v(h_i(t),t) = p_i(t), \quad t > 0, \quad i = 1,2. \tag{24}$$

Предположим далее, что $\varphi(x)$ и $\psi_i(t)$, $i = 1,2$ — непрерывно дифференцируемые функции; $f_i(t)$, $i = 1,2$ — непрерывные функции, причем $\varphi(x) < 0$, $\psi_i(t) < 0$, $i = 1,2$, $\varphi(0) = \psi_1(0)$ и $\varphi(l) = \psi_2(0)$. Тогда, если функция $g(y)$ есть решение уравнения

$$g(y) = \left(-2\varphi\left(\int_0^y g(s)\,ds\right)\right)^{1/2}, \tag{25}$$

$$h_1(t) = \int_0^t f_1(\tau)\frac{1}{p_1(\tau)}d\tau,$$

$$h_2(t) = b + \int_0^t f_2(\tau)\frac{1}{p_2(\tau)}d\tau,$$

где

$$p_i(t) = (-2\psi_i(t))^{1/2}, \quad i = 1,2,$$

$$l = \int_0^b (-2\varphi(s))^{1/2}\,ds$$

и выполняется неравенство

$$f_1(t)\,p_1(t) \leqslant f_2(t)\,p_2(t),$$

то при этих ограничениях решение задачи (18)–(21) определяется по формулам:

$$x_1(t) = \int_0^t [f_1(t) + v(h_1(\tau),\tau)]\,d\tau, \tag{26}$$

$$x_2(t) = \int_0^b g(y)\,dy + \int_0^t [f_2(\tau) + v_y(h_2(\tau),\tau)]d\tau, \tag{27}$$

$$u(x,t) = -\frac{1}{2}v^2(y,t),$$

$$x = \int_{(0,0)}^{(y,t)} v(s,\tau)\,ds + v_s(s,\tau)\,d\tau. \tag{28}$$

Здесь $v(y,t)$ — решение краевой задачи (22)–(24).

Действительно, решение $g(y)$ уравнения (25) является положительной непрерывно-дифференцируемой функцией. Так как $g(0)=p_1(0)$, $g(b)=p_2(0)$, то краевая задача (22)–(24) имеет непрерывные производные v_t, v_{yy} в области $h_1(t)<y<h_2(t)$, $0\leqslant t<t_1$, а v и v_y непрерывны при $h_1(t)\leqslant y\leqslant h_2(t)$, $0\leqslant v<t_1$ для любого t_1.

Введем в рассмотрение функцию

$$x=x(y,t)=\int\limits_{(0,0)}^{(y,t)} v(s,\tau)\,ds+v_s(s,\tau)\,d\tau \quad (29)$$

и отметим, что интеграл в (29) не зависит от пути интегрирования. Преобразование, заданное формулой (29), переводит кривую $h_1(t)$ в кривую $x_1(t)$, а кривую $h_2(t)$ в кривую $x_2(t)$, определяемые формулами (26), (27), в силу того, что v и v_y непрерывны в области $h_1(t)\leqslant y\leqslant h_2(t)$, $0<t<t_1$. Из принципа максимума следует, что решение задачи (22)–(24) — положительная функция $v(y,t)>0$, а это означает, что $\frac{\partial x(y,t)}{\partial y}>0$. Поэтому имеет место неравенство $x_1(t)<x_2(t)$, так как $h_1(t)<h_2(t)$ и, следовательно, функция $u(x,t)$ определена. Простыми вычислениями теперь проверяется, что формулы (26)–(28) задают решение исходной задачи (18)–(21).

Преобразование (1) позволяет исследовать задачи со свободными границами и в случае $x_1(0)=x_2(0)=0$. Рассмотрим в качестве примера нахождение функций $x_i(t)$ и $u(x,t)$, удовлетворяющих задаче

$$\begin{gathered}
u_t=-2uu_{xx}+u_x^2,\ \ x_1(t)<x<x_2(t),\ t>0,\\
u(x_i(t),t)=\varphi_i(t),\ t>0,\\
\frac{dx_i(t)}{dt}=-u_x(x_i(t),t)+f_i(t),\ t>0,\\
x_i(0)=0,\ i=1,2.
\end{gathered}$$

Ее решение строится, как и ранее, с использованием вспомогательной задачи вида:

$$\begin{gathered}
v_t=v_{yy},\quad h_1(t)<y<h_2(t),\quad t>0,\\
v(y,0)=0,\quad h_1(0)<y<h_2(0),\\
v(h_i(t),t)=p_i(t),\quad t>0,\quad i=1,2,
\end{gathered}$$

содержащей начальное условие.

2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В ТЕЛАХ СО СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

Большое количество изделий различного технического и технологического назначения изготовляется из пространственно неоднородного материала, объемная теплоемкость которого C и коэффициент теплопроводности λ зависит от искомой температуры T и переменной $r=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Процесс теплопереноса в телах со сферической симметрией в важных для приложений случаях описывается следующим нелинейным уравнением теплопроводности:

$$C(r,T)\,T_t=\operatorname{div}\left[\lambda(r,T)\operatorname{grad}T\right]. \quad (30)$$

Положим, что функции $C(r,T)$ и $\lambda(r,T)$ представимы в виде произведения функции координаты r на функцию температуры T. В работе [12] показано, что любое уравнение вида (30), которое линеаризуется с помощью точечной замены и нелокального преобразования вида (1), определяется формулами:

$$\begin{gathered}
\mathrm{C}(r,T)=\frac{A(r)\,F'(T)}{F^2(T)};\\
\lambda(r,T)=\frac{F'(T)}{r^4A(r)}.
\end{gathered} \quad (31)$$

В самом деле, точечной заменой

$$u=F(T),\qquad T=T(r,t) \quad (32)$$

уравнения (30), (31) преобразуются к виду

$$\frac{r^4A^2(r)}{u^2}u_t=u_{rr}-u_r\left[\frac{2}{r}+\frac{A'(r)}{A(r)}\right]. \quad (33)$$

Уравнение (33) с использованием нелокального преобразования типа (1)

$$\begin{gathered}
u(r,t)=v(y,t),\\
\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{r^2A(r)}{v},\\
\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial y}\ln v
\end{gathered} \quad (34)$$

приводится к линейному уравнению теплопроводности

$$v_t=v_{yy}. \quad (35)$$

Отметим, что из формул (34) функция $y=y(r,t)$ определяется в виде

$$y(r,t)=\int\limits_L \frac{\partial y}{\partial\rho}d\rho+\frac{\partial y}{\partial\tau}d\tau. \quad (36)$$

Здесь L — кривая, соединяющая точки $M_0(r_0,t_0)$ и $M(r,t)$ и в силу (33) и (34) интеграл в (36) не зависит от пути интегрирования L.

С использованием (34) формулу (36) можно записать следующим образом:

$$y(r,t)=\int\limits_L \frac{\rho^2 A(\rho)}{u(\rho,\tau)}d\rho-\frac{u_\rho}{\rho^2 A(\rho)}d\tau,$$

и учитывая (32), будем иметь

$$y(r,t)=\int\limits_L \frac{\rho^2 A(\rho)}{F(T(\rho,\tau))}d\rho- -\frac{F'(T(\rho,\tau))\,T_\rho(\rho,\tau)}{\rho^2 A(\rho)}d\tau. \quad (37)$$

Теперь мы покажем применение преобразований (31) и (34) к краевым задачам для нелинейных уравнений (30), (31).

Рассмотрим следующую задачу: найти решение уравнения (30) в области

$$\Omega_{t_1}=(0,t_1)\times D,$$

$$D=\left\langle \mathrm{M}(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \middle| R_1<r<R_2,\ r=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2}\right\rangle,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$T(r,0)=\varphi(r),\qquad R_1<r<R_2, \quad (38)$$

а также одному из следующих граничных условий на поверхностях $r=R_1$ и $r=R_2$:

- первого рода

$$\begin{aligned} &T(R_1,t)=\varphi_1(t),\\ &T(R_2,t)=\varphi_2(t),\quad t>0, \end{aligned} \quad (39)$$

- второго рода

$$\begin{aligned} &\lambda(r,T)\,T_r=f_1(t),\quad r=R_1,\quad t>0,\\ &\lambda(r,T)\,T_r=f_2(t),\quad r=R_2,\quad t>0, \end{aligned} \quad (40)$$

- третьего рода

$$\begin{aligned} &\lambda(r,T)\,T_r=\alpha_1(T-\psi_1(t)),\\ &\qquad r=R_1,\quad t>0,\\ &\lambda(r,T)\,T_r=\alpha_2(T-\psi_2(t)),\\ &\qquad r=R_2,\quad t>0. \end{aligned} \quad (41)$$

Покажем, что краевая задача (30), (31), (38), (39) сводится к решению задачи со свободными границами для уравнения теплопроводности. При преобразовании (37) «прямая» $r=R_1$ на плоскости r,t перейдет в кривую $y=y_1(t)$ на плоскости y,t, а «прямая» $r=R_2$ — в кривую $y=y_2(t)$:

$$\begin{aligned} y_1(t)&=y(R_1,t)=\\ &=-\int\limits_0^t \frac{F'(T(R_1,\tau))\,T_\rho(R_1,\tau)}{R_1^2 A(R_1)}d\tau,\\ y_2(t)&=y(R_2,t)=\\ &=-\int\limits_0^t \frac{F'(T(R_2,\tau))\,T_\rho(R_2,\tau)}{R_2^2 A(R_2)}d\tau+\\ &+\int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{\rho^2 A(\rho)}{F(T(\rho,0))}d\rho. \end{aligned} \quad (42)$$

Далее, положим

$$y(r)=y(r,0)=\int\limits_{R_0}^{r} \frac{\rho^2 A(\rho)}{F(T(\rho,0))}d\rho \quad (43)$$

и теперь рассмотрим краевую задачу вида

$$v_t=v_{yy},\quad t>0,\quad y_1(t)<y<y_2(t), \quad (44)$$

$$\begin{aligned} &v(y,0)=F(\varphi(r))=F(\varphi(r(y))),\\ &\qquad\qquad y_1(0)<y<y_2(0), \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} &v(y_1(t),t)=F(\varphi_1(t)),\\ &\frac{dy_1(t)}{dt}=-\frac{v_y(y_1(t),t)}{F(\varphi_1(t))},\quad t>0, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} &v(y_2(t),t)=F(\varphi_2(t)),\\ &\frac{dy_2(t)}{dt}=-\frac{v_y(y_2(t),t)}{F(\varphi_2(t))},\quad t>0. \end{aligned} \quad (47)$$

где $r(y)$ — функция, обратная $y(r)$, определенной по формуле (43).

Непосредственно проверяется, что рассмотренная здесь задача (30), (31), (38), (39) сводится к решению задачи со свободными границами (43)–(47) с использованием формул (32), (34), (37)–(39), (42) и (43).

Для краевой задачи (30), (31), (38), (40) с граничными условиями второго рода в силу соотношения

$$\lambda(r,T)\,T_r=\frac{F'(T)}{r^4 A(r)}T_r$$

формулы (42) примут соответственно вид

$$y_1(t)=-\int\limits_0^t R_1^2 f_1(\tau)\,d\tau;$$

$$y_2(t)=-R_2^2\int\limits_0^t f_2(\tau)\,d\tau+\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\rho^2 A(\rho)\,d\rho}{F(\varphi(\rho))}.$$

Таким образом, функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ полностью определяются начальными и граничными условиями (38), (40) и мы приходим к следующей краевой задаче:

$$v_t = v_{yy}, \quad t > 0, \quad y_1(t) < y < y_2(t), \tag{48}$$

$$v(y,0) = F(\varphi(r(y))), \ y_1(0) < y < y_2(0), \tag{49}$$

$$v_y = R_1^2 v, \quad y = y_1(t), \quad t > 0 \text{ и}$$
$$v_y = R_2^2 v, \quad y = y_2(t), \quad t > 0. \tag{50}$$

Отметим, что условия (50) соответствуют граничным условиям (40), так что решение рассмотренной здесь задачи (30), (31), (38), (40) сводится к решению краевой задачи (48)–(50).

Задача нестационарной теплопроводности (30), (31), (38), (41) для граничных условий третьего рода сводится к решению задачи со свободными границами, имеющей вид

$$v_t = v_{yy}, \ t > 0, \ y_1(t) < y < y_2(t),$$
$$v(y,0) = F(\varphi(r(y))), \quad y_1(0) < y < y_2(0),$$
$$\frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial y}\ln v, \quad y = y_i(t), \ i = 1,2, \ t > 0,$$
$$v_y = \alpha_i R_i^2 v\left(F^{-1}(v) - \psi_i\right), \quad y = y_i(t),$$
$$i = 1,2, \quad t > 0.$$

Краевые задачи со свободными границами для уравнений параболического типа исследовались многими авторами (см., напр., [13–15]).

В заключение на примере неограниченной области с шаровой полостью покажем, что приведенные в настоящей работе преобразования позволяют строить точные решения краевых задач.

Рассмотрим следующую задачу со свободной границей для уравнения (30), (31):

$$C(r,T)\,T_t = \operatorname{div}\left[\lambda(r,T)\operatorname{grad} T\right],$$
$$r(T) < r < \infty, \quad t > 0, \tag{51}$$

$$T(r,0) = v_0, \ 0 < r < \infty, \ r(0) = 0, \tag{52}$$

$$T(r(t),t) = v_1, \quad t > 0, \tag{53}$$

$$A(r)\frac{dr}{dt} = u_2\lambda(r,T)\,T_r, \ r = r(t), \ t > 0, \tag{54}$$

$$\frac{1}{r^2 A(r)}T_r \to 0 \text{ при } r \to \infty, \quad t > 0. \tag{55}$$

Здесь v_0, v_1, u_2 — постоянные.

Преобразования (32), (34) переводят задачу (51)–(55) в задачу для линейного уравнения, имеющую вид

$$v_t = v_{yy}, \quad y(t) < y < \infty, \quad t > 0, \tag{56}$$

$$v(y(t),t) = u_1, \quad t > 0, \tag{57}$$

$$v(y,0) = u_0; \ 0 < y < \infty, \quad y(0) = 0, \tag{58}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{(u_2 - u)_1}{u_1^2}\frac{\partial v(y(t),t)}{\partial y}, \quad t > 0, \tag{59}$$

$$\frac{\partial v(y,t)}{\partial y} \to 0 \text{ при } y \to +\infty, \quad t > 0. \tag{60}$$

Постоянные u_0 и u_1 определяются из соотношений $F(v_i) = u_i$, $i = 1,2$.

Решение задачи (56)–(60) является автомодельным и определяется по известным формулам (см., напр., [16]):

$$v(y,t) = u_0 + \frac{\beta u_1^2}{(u_2 - u_1)}\exp\left(\frac{\beta^2}{4}\right) \times \tag{61}$$

$$\times\left[\int_0^{y/2\sqrt{t}} \exp\left(-\xi^2\right)d\xi - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right], \tag{62}$$

$$y(t) = \beta\sqrt{t}, \tag{63}$$

где постоянная β определяется из трансцендентного уравнения

$$2\beta\exp\left(\beta^2/4\right)\left[\int_0^{\beta/2}\exp\left(-\xi^2\right)d\xi - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right] =$$
$$= \frac{(u_1 - u_0)(u_2 - u_1)}{u_1^2}.$$

Далее, используя формулы (32), (34), (61) и (62), нетрудно проверить, что решение задачи (51)–(55) определяется формулами:

$$T(r,t) = \Phi\left[u_0 - \beta\frac{u_1^2}{(u_2 - u_1)}\exp\left(\beta^2/4\right) \times\right.$$
$$\left.\times\int_{y(r,t)/2\sqrt{t}}^{\infty}\exp\left(-\xi^2\right)d\xi\right],$$

$$\frac{u_1 u_2}{(u_2 - u_1)}\beta\sqrt{t} = \int_0^{r(t)}\rho^2 A(\rho)\,d\rho,$$

где функция $y(r,t)$ задается неявным образом, а именно уравнением

$$\int_0^r \rho A(\rho)\,d\rho = \left[u_0 - \frac{\beta}{2}\frac{\sqrt{\pi}u_1^2}{(u_2-u_1)}\exp\left(\beta^2/4\right)\right]y + \frac{\beta u_2^2}{(u_2-u_1)}\exp\left(\beta^2/4\right)\times \left[\sqrt{t}\exp\left(-y^2/(4t)\right) + y\int_0^{y/2\sqrt{t}} \exp\left(-\xi^2\right) d\xi\right],$$

а $\Phi(u)$ — функция, обратная $u = F(T)$, определенной в (32).

ОБОЗНАЧЕНИЯ:

x, y, z— — координаты; t — время; $x(t)$ — координата границы раздела фаз; $T(x,y,z,t)$ — текущее значение температуры; C и λ — объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности материала; α — коэффициент теплоотдачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Свинолупов С. И.** Эволюционные уравнения второго порядка // УМН. 1985. Т.40, В.5. С.263–264.
2. **Хабиров С. В.** Проблема Беклунда для эволюционных уравнений второго порядка: Препринт. Уфа: Башкир. филиала АН СССР, 1986. 35 с.
3. **Sokolov V. V., Svinolupov S. J.** On the generation of nonlinear integrable evolution equations from linear second order equation: Preprint. Jena: Friedrich-Schiller Univ. N/88/33. 12 p.
4. **Пухначев В. В., Шмарев С. И.** Исследование квазилинейных уравнений методом лагранжевых координат // Функциональные и численные методы математической физики. Киев: Наукова Думка, 1988. С. 181–185.
5. **Bluman C., Kumei S.** On the remarkable nonlinear diffusion equation // J. of Math. Phys. 1980. V. 21, No. 5. P. 1019–1023.
6. **Rosen G.** Nonlinear heat conduction in solid H2 // Phys. Rev. B. 1979. V. 19, No. 14. P. 2398–2399.
7. **Rosen G.** Method for the exact solution of a nonlinear diffusion-convection equation // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49, No. 25. P. 1844–1847.
8. **Жибер А. В., Цирельман Н. М.** Точное решение задачи стефановского типа для твердого водорода // Инж.-физ. журн. 1988. Т. 54, № 1. С. 144–145.
9. **Цирельман Н. М., Жибер А. В.** Точные решения задачи динамики адсорбции-десорбции с нелинейной изотермой сорбции // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1989. № 5. С. 107–112.
10. **Жибер А. В., Цирельман Н. М.** Теплофизика изменений агрегатного состояния водорода // Вестник УГАТУ. Уфа, 2002. Т. 3, № 1. С. 45–52.
11. **Жибер А. В., Цирельман Н. М.** Однофазная задача Стефана для водорода // Тр. 5-го междунар. форума по тепло- и массообмену. Минск: ИТМО им. А. В. Лыкова, НАНБ, 2004. С. 239–241.
12. **Жибер А. В., Цирельман Н. М.** Определение температурных полей в пространственно неоднородной нелинейной среде // Вопросы теории и расчета рабочих процессов тепловых двигателей. Уфа, 2004. С. 421–431.
13. **Мейерманов А. М.** Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 239 с.
14. **Рубинштейн Л. И.** Проблема Стефана. Рига: Звайзгне. 1967. 457 с.
15. **Фридман А.** Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 427 с.
16. **Тихонов А. М., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.

ОБ АВТОРАХ

Цирельман Наум Моисеевич, проф. каф. теории авиац. и ракетн. двигателей. Дипл. инж.-мех. (Одесск. технол. ин-т пищевой и холодильной пром-ти, 1963). Д-р техн. наук по мат. моделированию (защ. в Казанск. гос. техн. ун-те, 1995). Иссл. в обл. числ.-аналитич. и эксперим. методов тепломассопереноса.

Жибер Анатолий Васильевич, проф., вед. науч. сотр. ИМ УНЦ РАН. Дипл. математик (Новосиб. гос. ун-т, 1969). Д-р физ.-мат. наук по диф. уравнениям (защ. в ИМиМ УрОРАН, Екб., 1994). Иссл. в обл. совр. группового анализа диф. уравнений.