Уфа: УГАТУ Вестник УГАТУ 2000. №1. С. 45–52

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.95

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В. А. БАЙКОВ, Р. К. ГАЗИЗОВ*, Н. Х. ИБРАГИМОВ**

*УГАТУ, естественно-научный факультет
Тел: (3472) 23 77 35 Факс: (3472) 22 29 18 E-mail: baikov|gazizov@math.ugatu.ac.ru

**Норд-Вест Университет (Ммавато, ЮАР)
Институт симметрийного анализа и математического моделирования
Тел: (27)(18) 389 2354 Факс: (27)(18) 392 5775 E-mail: nhiisa@unibo.uniwest.ac.za

Аннотация: Изучаются многопараметрические приближенные группы преобразований, представляющие собой реализацию (точных) локальных групп Ли приближенными преобразованиями. Приведены основные теоремы, позволяющие сводить задачу исследования таких нелинейных объектов к алгебраическим линейным объектам — приближенным алгебрам Ли. Построены новые примеры приближенных групп преобразований, допускаемых дифференциальными уравнениями с малым параметром

Ключевые слова: приближенные группы преобразований; симметрийные свойства уравнений с малым параметром

ВВЕДЕНИЕ

Наука о симметриях, в частности, теория непрерывных групп преобразований, в настоящее время претерпевает бурный рост, что связано, во-первых, с углублением самой теории, во-вторых, с многочисленными приложениями как в традиционных, так и в нетрадиционных для группового анализа областях, и, в-третьих, с синтезом этой теории с новыми направлениями развития математики.

Систематическое исследование точечных непрерывных групп преобразований было начато С. Ли в прошлом веке. Хотя вначале основной задачей, решавшейся С. Ли, была задача построения аналога теории Абеля-Галуа с целью решения вопроса о разрешимости в квадратурах обыкновенных дифференциальных уравнений. Первоначально эта задача не нашла широкого применения в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, но она дала толчок внедрению теории групп преобразований в различные разделы математики и физики.

Классический групповой анализ дает конструктивный метод построения точечных групп преобразований, допускаемых дифференциальными уравнениями (см., например, работы [1,2]). Эта конструктивность основана на теоремах о соответствии между группами и алгебрами Ли, что позволяет сложные нелинейные условия инвариантности дифференциальных уравнений относительно групповых преобразований заменить эквивалентными более простыми линейными условиями, отражающими инфинитезимальную инвариантность.

Классические модели физических и механических процессов формулируются в виде дифференциальных уравнений, обладающих достаточно широкой группой симметрий. Это в немалой степени связано с тем, что эти модели строятся на основе естественных законов сохранения, а законы сохранения являются на самом деле другим способом выражения свойств симметрии. Поэтому не удивительно, что среди таких дифференциальных уравнений имеется большое количество интегрируемых. Вместе с тем эти интегрируемые уравнения описывают реальный физический процесс лишь в первом приближении. Учет в модели каких-либо дополнительных факторов (обычно малых) приводит, как правило, к уравнению с худшими симметрийными свойствами (с точки зрения классических симметрий Ли и Ли-Беклунда), что во многом снижает эффективность групповых методов.

Одно из возможных решений этой задачи связано с рассмотрением приближенных групп преобразований, которые были введены в нашей работе [3]. В отличие от точной теории групп преобразований, где изучаются преобразования вида $\bar{z}^i = f^i(z,a)$, переводящие уравнения $F(z)=0$ в уравнения такого же вида, в теории приближенных групп преобразований изучаются преобразования вида

$$\bar{z}^i \approx f^i(z,a,\varepsilon) \equiv f^i_{(0)}(z,a) + \varepsilon f^i_{(1)}(z,a) + o(\varepsilon),$$

зависящие от малого параметра ε, такие, что уравнение

$$F_{(0)}(z) + \varepsilon F_{(1)}(z) = 0$$

с малым параметром ε в новых переменных $\bar{z}$ сохраняет свой вид с точностью до членов второго порядка по ε.

На множестве таких преобразований, зависящих от вещественного параметра a, может быть введена структура приближенной группы преобразований, а именно: такие преобразования образуют однопараметрическую приближенную группу преобразований, если выполняются следующие аксиомы:

1°. $f^i(z,0,\varepsilon) \approx 0$;

2°. $f^i(f(z,a,\varepsilon),b,\varepsilon) \approx f^i(z,a+b,\varepsilon)$;

3° Если $f^i(z,a,\varepsilon) \approx 0$ для всех z, то $a=0$.

Исследование однопараметрических приближенных групп преобразований, допускаемых дифференциальными уравнениями с малым параметром (обзор результатов см., например, в [4]), показало, что, как правило, уравнение допускает несколько таких групп преобразований или, другими словами, несколько приближенных симметрий. Композиция однопараметрических приближенных групп преобразований с генераторами, образующими приближенную алгебру Ли, приводит к новому объекту — так называемой многопараметрической приближенной группе преобразований. Основы теории таких преобразований были представлены в работе [5].

В данной работе показано, что многопараметрические приближенные группы преобразований представляют собой реализацию точной локальной группы Ли (параметрическая группа) приближенными преобразованиями. Доказано, что множество приближенных симметрий уравнения с малым параметром образует приближенную алгебру Ли, и, значит, семейство соответствующих преобразований является многопараметрической приближенной группой. В качестве примера использования групповой структуры приближенных симметрий для построения решения соответствующего уравнения рассмотрена задача интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром методом редукции его порядка.

В работе используются следующие обозначения: $z=(z^1,\ldots,z^N)\in\mathbb{R}^N$ — независимая переменная, ε — малый параметр. Равенство $\theta(z,\varepsilon) = o(\varepsilon^p)$ означает, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\theta(z,\varepsilon)}{\varepsilon^p}=0$, или, что то же самое, что функция $\theta(z,\varepsilon)$ может быть представлена в виде $\theta(z,\varepsilon) = \varepsilon^{p+1}\varphi(z,\varepsilon)$, где $\varphi(z,\varepsilon)$ — ряд по неотрицательным степеням ε. Приближенное равенство $f\approx g$ означает выполнение равенства $f(z,\varepsilon) = g(z,\varepsilon)+o(\varepsilon^p)$ с некоторым фиксированным значением p. В выражениях вида $\xi^i_\alpha(z,\varepsilon)\dfrac{\partial}{\partial z^i}$ предполагается суммирование по повторяющемуся индексу. Вместе с тем знак $\sum$ появляется в случаях, когда пределы суммирования не очевидны. Все рассматриваемые функции предполагаются локально дифференцируемыми достаточное количество раз.

1. МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В пространстве переменных $z = (z^1,\ldots,z^N)\in\mathbb{R}^N$ рассмотрим семейство $(p+1)$ гладких вектор-функций $f_{(0)}(z), f_{(1)}(z),\ldots,f_{(p)}(z)$ с координатами

$$f^i_{(0)}(z), f^i_{(1)}(z),\ldots,f^i_{(p)}(z),\qquad i=1,\ldots,N.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Приближенным преобразованием*

$$\bar{z}^i \approx f^i_{(0)}(z) + \varepsilon f^i_{(1)}(z) + \ldots + \varepsilon^p f^i_{(p)}(z)$$

точек $z\in\mathbb{R}^N$ *в точки* $\bar{z}\in\mathbb{R}^N$ *называется класс преобразований*

$$\bar{z} = f(z,\varepsilon)$$

с вектор-функциями $f=(f^1,\ldots,f^N)$ *такими, что*

$$f^i(z,\varepsilon) \approx f^i_{(0)}(z) + \varepsilon f^i_{(1)}(z) + \ldots + \varepsilon^p f^i_{(p)}(z).$$

Пусть G_r — r-параметрическая локальная группа Ли и пусть каждой точке $a \in G_r$ поставлено в соответствие некоторое приближенное преобразование

$$T_a: \quad \bar{z}^i \approx f^i(z,a,\varepsilon) \equiv \equiv f^i_{(0)}(z,a) + \varepsilon f^i_{(1)}(z,a) + \ldots + \varepsilon^p f^i_{(p)}(z,a) + o(\varepsilon^p), \quad (1)$$

$$i = 1, \ldots, N,$$

пространства $\mathbb{R}^N$ в себя. Здесь все рассматриваемые преобразования — взаимно однозначные и приближенные функции $f^i(z,a,\varepsilon)$ — существенно зависят от параметров $a^1, \ldots, a^r$ в том смысле, что невозможно подобрать функции $A^1(a), \ldots, A^{r-1}(a)$ так, чтобы имели место приближенные равенства

$$f^i(z,a^1,\ldots,a^r,\varepsilon) \approx \approx F^i\left(z, A^1(a), \ldots, A^{r-1}(a), \varepsilon\right).$$

Определение 2. Семейство $\{T_a\}$ приближенных преобразований (1) образует локальную *r-параметрическую приближенную (порядка p) группу $\tilde{G}^N_r$ преобразований в $\mathbb{R}^N$*, если выполнены следующие условия:

1°. Нулю группы Ли G_r соответствует приближенно тождественное преобразование T_0, т. е. $f^i(z,0,\varepsilon) \approx z^i$.

2°. Произведению элементов группы G_r соответствует композиция преобразований T_a, т. е. если $\phi(a,b)$ — закон умножения в G_r, то

$$T_b T_a = T_{\phi(a,b)}: \quad f^i(f(z,a,\varepsilon),b,\varepsilon) \approx f^i(z,\phi(a,b),\varepsilon).$$

3°. Если $f^i(z,a,\varepsilon) \approx z^i$ для всех z, то $a=0$.

Как и в теории точных групп Ли преобразований, изучение приближенных групп преобразований тесно связано с рассмотрением соответствующих приближенных векторных полей и приближенных операторов.

Рассмотрим семейство $(p+1)$ векторных полей

$$\xi_{(q)}(z) = (\xi^1_{(q)}(z), \ldots, \xi^N_{(q)}(z)), \; q = 0, \ldots, p.$$

Определение 3. Класс векторных полей

$$\xi(z,\varepsilon) = (\xi^1(z,\varepsilon), \ldots, \xi^N(z,\varepsilon))$$

таких, что

$$\xi^i(z,\varepsilon) \approx \xi^i_{(0)}(z) + \varepsilon \xi^i_{(1)}(z) + \cdots + \varepsilon^p \xi^i_{(p)}(z), \quad i = 1, \ldots, N,$$

называется *приближенным (порядка $o(\varepsilon^p)$) векторным полем*. Класс соответствующих дифференциальных операторов первого порядка

$$X = \xi^i(z,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial z^i},$$

называется *приближенным (порядка $o(\varepsilon^p)$) оператором*.

По аналогии с точными операторами (векторными полями) для приближенных операторов можно ввести операции сложения двух приближенных операторов и умножения приближенного оператора на число. Поэтому множество всех приближенных операторов образует векторное пространство. В таком векторном пространстве обычным образом определяются понятия линейно независимых векторов, базиса и размерности векторного пространства.

Для приближенных групп преобразований (1) введем в рассмотрение r приближенных векторных полей $\xi_\alpha(z,\varepsilon)$ с координатами

$$\xi^i_\alpha(z,\varepsilon) \approx \left.\frac{\partial f^i(z,a,\varepsilon)}{\partial a^\alpha}\right|_{a=0},$$

$$i = 1, \ldots, N, \quad \alpha = 1, \ldots, r,$$

или, что то же самое, дифференциальных операторов

$$X_\alpha = \xi^i_\alpha(z,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial z^i}. \quad (2)$$

Теорема 1 (Первая прямая теорема Ли для приближенных групп преобразований). *Если преобразования (1) образуют r-параметрическую приближенную группу преобразований, то функции $\bar{z}^i = f^i(z,a,\varepsilon)$ удовлетворяют системе приближенных уравнений*

$$\frac{\partial \bar{z}^i}{\partial a^\alpha} \approx \xi^i_\beta(\bar{z},\varepsilon) \cdot V^\beta_\alpha(a), \quad \alpha = 1, \ldots, r, \quad (3)$$

называемых приближенными уравнениями Ли. Соответствующие дифференциальные операторы (2) (а значит и вектор-функции $\xi_\alpha(z,\varepsilon) = (\xi^1_\alpha(z,\varepsilon), \ldots, \xi^N_\alpha(z,\varepsilon))$) линейно независимы в рассматриваемом приближении. Здесь $V^\beta_\alpha(a), \alpha, \beta = 1, \ldots, r,$ — вспомогательные функции соответствующей локальной группы Ли G_r.

Для доказательства достаточного условия аналога первой теоремы Ли необходимо ввести понятие вполне интегрируемости приближенных уравнений и исследовать вопросы разрешимости систем вполне интегрируемых приближенных уравнений в частных производных первого порядка. Полученные результаты далее используются для анализа приближенных уравнений Ли.

Определение 4. Система приближенных уравнений

$$\frac{\partial z^i}{\partial a^\alpha} \approx \psi^i_\alpha(z, a, \varepsilon),$$

$$i = 1, \ldots, N; \quad \alpha = 1, \ldots, r,$$

называется *вполне интегрируемой*, если в силу уравнений этой системы выполняются приближенные равенства

$$\frac{\partial}{\partial a^\beta}\left(\frac{\partial z^i}{\partial a^\alpha}\right) \approx \frac{\partial}{\partial a^\alpha}\left(\frac{\partial z^i}{\partial a^\beta}\right).$$

Теорема 2 (Первая обратная теорема Ли для приближенных групп преобразований). *Пусть система приближенных уравнений Ли* (3)

$$\frac{\partial \bar{z}^i}{\partial a^\alpha} \approx \xi^i_\beta(\bar{z}, \varepsilon) \cdot V^\beta_\alpha(a),$$

$$i = 1, \ldots, N, \quad \alpha = 1, \ldots, r,$$

вполне интегрируема, функции $\xi_\alpha(\bar{z}, \varepsilon)$ *(приближенно) линейно независимы, ранг матрицы* $V(a) = \left\| V^\beta_\alpha(a) \right\|$ *равен* r. *Тогда решение уравнений* (3), *удовлетворяющее условиям*

$$\bar{z}^i\big|_{a=0} \approx z^i,$$

имеет вид

$$\bar{z} = f_{(0)}(z, a) + \varepsilon f_{(1)}(z, a) + \cdots + \varepsilon^p f_{(p)}(z, a) + o(\varepsilon^p)$$

и определяет приближенную (с точностью $o(\varepsilon^p)$*)* r*-параметрическую группу преобразований.*

Рассмотрим векторное пространство приближенных (с точностью $o(\varepsilon^p)$) операторов (см. Определение 3)

$$X = \xi^i(z, \varepsilon)\frac{\partial}{\partial z^i} \equiv$$

$$\equiv \left(\xi^i_{(0)}(z) + \varepsilon \xi^i_{(1)}(z) + \ldots + \varepsilon^p \xi^i_{(p)}(z)\right)\frac{\partial}{\partial z^i}. \tag{4}$$

Определение 5. *Приближенным (с точностью* $o(\varepsilon^p)$*) коммутатором приближенных операторов* X_1 и X_2 называется приближенный оператор, обозначаемый $[X_1, X_2]$ и определяемый выражением

$$[X_1, X_2] \approx X_1 X_2 - X_2 X_1,$$

рассматриваемым с точностью $o(\varepsilon^p)$.

Определение 6. Векторное пространство L приближенных операторов вида (4) называется *приближенной алгеброй Ли операторов*, если оно замкнуто (в приближении данного порядка p) относительно приближенного коммутирования.

Теорема 3 (Вторая теорема Ли для приближенных групп преобразований). *Пусть задана локальная* r*-параметрическая приближенная группа преобразований* (1). *Тогда линейная оболочка операторов* (2) *является приближенной алгеброй Ли операторов, структурные константы которой совпадают со структурными константами локальной группы Ли* G_r:

$$[X_\alpha, X_\beta] \approx c^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma. \tag{5}$$

Обратно, если даны r *линейно независимых операторов, удовлетворяющих условиям* (5) *с постоянными* $c^\gamma_{\alpha\beta}$, *то им соответствует локальная* r*-параметрическая приближенная группа преобразований.*

2. ГРУППОВОЕ СВОЙСТВО ПРИБЛИЖЕННЫХ СИММЕТРИЙ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Рассмотрим $(p+1)$ вектор-функций

$$F_{(q)}(z) = \left(F^1_{(q)}(z), \ldots, F^n_{(q)}(z)\right),$$

$$q = 0, \ldots, p.$$

Определение 7. *Приближенным (порядка* $o(\varepsilon^p)$*) уравнением*

$$F(z, \varepsilon) = o(\varepsilon^p) \tag{6}$$

называется класс уравнений $G(z, \varepsilon) = 0$ таких, что

$$G(z, \varepsilon) = F_{(0)}(z) + \varepsilon F_{(1)}(z) + \ldots + \varepsilon^p F_{(p)}(z) + o(\varepsilon^p).$$

Определение 8. Будем говорить, что приближенное уравнение (6) является *инвариантным относительно приближенной группы преобразований* (1), если $F^\nu(f(z, a, \varepsilon), \varepsilon) \approx$

≈ 0, $\nu = 1, \ldots, n$, для всех z, удовлетворяющих (6).

По аналогии с теорией групп Ли преобразований имеет место следующий инфинитезимальный критерий инвариантности приближенного уравнения (см., например, [3, 4]).

ТЕОРЕМА 4. *Пусть приближенная функция $F(z,\varepsilon)$ удовлетворяет условию*

$$\operatorname{rank}\left\|\frac{\partial F^{\nu}_{(0)}(z)}{\partial z^i}\right\|\Bigg|_{F_{(0)}(z)=0} = n. \qquad (7)$$

Тогда приближенное уравнение (6) *приближенно инвариантно относительно приближенной группы $\tilde{G}^N_r$ преобразований* (1) *тогда и только тогда, когда*

$$X_\alpha F(z,\varepsilon)\Big|_{(6)} = o(\varepsilon^p), \quad \alpha = 1, \ldots, r. \qquad (8)$$

Критерий инвариантности (8) может быть использован для решения задачи построения приближенных групп преобразований, оставляющих инвариантным (с рассматриваемой точностью) заданное приближенное уравнение (6), а именно: генератор

$$X = \xi^i(z,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial z^i}$$

приближенной группы ищется из *приближенного определяющего уравнения*

$$XF^{\nu}(z,\varepsilon)\Big|_{(6)} = o(\varepsilon^p), \quad \nu = 1, \ldots, n. \qquad (9)$$

Если определяющее уравнение (9) удовлетворяется, также говорят, что X *является приближенной симметрией уравнения* (6).

Из формулы (9), рассматриваемой при $\varepsilon = 0$, очевидно вытекает следующее

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если приближенное уравнение* (6) *инвариантно относительно приближенной группы преобразований с генератором $X \approx X_{(0)} + \varepsilon X_{(1)} + \ldots + \varepsilon^p X_{(p)}$, таким, что $\xi_{(0)}(z) = (\xi^1_{(0)}(z), \ldots, \xi^N_{(0)}(z)) \neq 0$, то (точный) оператор*

$$X_{(0)} = \xi^i_{(0)}(z)\frac{\partial}{\partial z^i} \qquad (10)$$

является точной симметрией уравнения

$$F_{(0)}(z) = 0. \qquad (11)$$

Уравнение (11) в дальнейшем будем называть *«невозмущенным»* уравнением, а (6) — *«возмущенным»*. При выполнении условий Следствия 1 будем говорить, что симметрия (10) является *устойчивой симметрией* уравнения (11) относительно рассматриваемого возмущения $\varepsilon F_{(1)}(z) + \ldots + \varepsilon^p F_{(p)}(z) + o(\varepsilon^p)$, или что уравнение (6) *наследует* симметрию $X_{(0)}$ невозмущенного уравнения (11).

Пусть приближенные (точности $o(\varepsilon^p)$) операторы

$$X \approx X_{(0)} + \varepsilon X_{(1)} + \ldots + \varepsilon^p X_{(p)},$$

$$Y \approx Y_{(0)} + \varepsilon Y_{(1)} + \ldots + \varepsilon^p Y_{(p)}$$

являются приближенными симметриями уравнения (6).

ТЕОРЕМА 5 [7]. *Приближенный оператор Z, полученный как приближенный коммутатор приближенных симметрий X и Y уравнения* (6), *является приближенной симметрией уравнения* (6).

СЛЕДСТВИЕ 2. *Множество приближенных симметрий уравнения с малым параметром образует приближенную алгебру Ли, а множество соответствующих приближенных преобразований образует многопараметрическую приближенную группу преобразований.*

СЛЕДСТВИЕ 3. *Множество устойчивых (в данном приближении) симметрий невозмущенного уравнения* (11) *является подалгеброй алгебры Ли всех симметрий* (11).

3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ СИММЕТРИИ НЕКОТОРЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исторически теория групп преобразований развивалась для интегрирований обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, в работах С. Ли было показано, что если дифференциальное уравнение второго порядка допускает двухмерную алгебру Ли симметрий, то оно методом последовательного понижения порядка интегрируется в квадратурах. Оказывается, если возмущенное уравнение второго порядка наследует две симметрии невозмущенного уравнения (образующие алгебру Ли в силу Следствия 3), то оно также может быть проинтегрировано методом последовательного понижения порядка.

В качестве простейшего примера рассмотрим уравнение

$$u'' + u = \varepsilon u^2, \qquad (12)$$

которое допускает лишь одну точную симметрию (сдвиг по независимой переменной

x). Согласно групповой классификации, проведенной в [6], наряду с переносом по x еще только две симметрии соответствующего невозмущенного уравнения наследуются уравнением (12) в виде приближенных операторов

$$Y_1 = 4\varepsilon \sin x \frac{\partial}{\partial x} + (3\cos x + 2\varepsilon u \cos x)\frac{\partial}{\partial u},$$
$$Y_2 = -4\varepsilon \cos x \frac{\partial}{\partial x} + (3\sin x + 2\varepsilon u \sin x)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{13}$$

Эти операторы порождают двухмерную абелеву приближенную алгебру Ли, т. е. $[Y_1, Y_2] \approx \approx 0$, и могут быть использованы для приближенного интегрирования уравнения (12) методом *последовательного понижения порядка*.

Вместо переменных (x, u) введем новые переменные (s, v) такие, что в этих переменных оператор Y_1 принимает вид $Y_1 = \dfrac{\partial}{\partial s}$. Пусть

$$s \approx \varphi(x, u, \varepsilon) \equiv \varphi_{(0)}(x, u) + \varepsilon\varphi_{(1)}(x, u) + o(\varepsilon),$$
$$v \approx \psi(x, u, \varepsilon) \equiv \psi_{(0)}(x, u) + \varepsilon\psi_{(1)}(x, u) + o(\varepsilon).$$

Тогда функции $\varphi(x, u, \varepsilon), \psi(x, u, \varepsilon)$ находятся из приближенных уравнений

$$Y_1(\varphi(x, u, \varepsilon)) \approx 1, \quad Y_1(\psi(x, u, \varepsilon)) \approx 0,$$

решение которых дает:

$$s = \frac{u}{3\cos x} + \varepsilon\left(-\frac{u^2}{9}\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} - \frac{u^2}{9\cos^3 x}\right),$$
$$v = x - \frac{4}{3}\varepsilon u\,\mathrm{tg}x\,. \tag{14}$$

В новых переменных (s, v) оператор Y_2 принимает вид

$$Y_2 = \mathrm{tg}v\frac{\partial}{\partial s} - \frac{4\varepsilon}{\cos v}\frac{\partial}{\partial v},$$

а уравнение (12) —

$$v'' + 2\mathrm{tg}v\, v'^2 + \frac{6\varepsilon v'}{\cos v}(\sin^2 v + 1) \approx 0.$$

Это уравнение не содержит независимой переменной s и стандартной подстановкой $v' = p(v)$ приводится к виду

$$p' + 2\mathrm{tg}v\, p + \frac{6\varepsilon}{\cos v}(\sin^2 v + 1) \approx 0. \tag{15}$$

Для интегрирования этого уравнения перепишем в переменных (v, p) оператор Y_2:

$$\tilde{Y}_2 = \frac{4\varepsilon}{\cos v}\frac{\partial}{\partial v} + \left(\frac{p^2}{\cos^2 v} + \frac{4\varepsilon p \sin v}{\cos^2 v}\right)\frac{\partial}{\partial p}. \tag{16}$$

Введем новые переменные (t, q) такие, что в этих переменных $\tilde{Y}_2 = \dfrac{\partial}{\partial q}$. Решая уравнения

$$\tilde{Y}_2 t(v, p, \varepsilon) \approx 0, \quad \tilde{Y}_2 q(v, p, \varepsilon) \approx 1,$$

получаем:

$$t = v + \frac{4\varepsilon\cos v}{p},$$
$$q = \frac{\cos^2 v}{p} - \frac{6\varepsilon \sin v \cos^2 v}{p^2}. \tag{17}$$

В переменных (t, q) уравнение (15) принимает вид

$$q' = 0.$$

Следовательно,

$$q = K_1\,, \quad K_1 = \mathrm{const}.$$

Подставляя сюда выражение для q из (17), получаем

$$p = \frac{\cos^2 v}{K_1} - 6\varepsilon \sin v,$$

откуда, в силу условия $v' = p(v)$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{K_1}{\cos^2 v}\left(1 + 6\varepsilon K_1 \frac{\sin v}{\cos^2 v}\right) dv = ds,$$

имеющее решение

$$K_1 \mathrm{tg}v + \frac{2K_1^2\varepsilon}{\cos^3 v} = s - K_2\,.$$

Возвращаясь к исходным переменным (x, u), получаем приближенное решение

$$u = 3K_1 \sin x + 3K_2 \cos x + \\ + \varepsilon\left(\frac{9}{2}K_1^2 + \frac{9}{2}K_2^2 + \frac{3}{2}K_1^2 \cos 2x - \\ - \frac{3}{2}K_2^2 \sin 2x - 3K_1K_2 \sin 2x\right)$$

уравнения (12).

В качестве другого примера, иллюстрирующего полное наследование симметрий невозмущенного уравнения возмущенным, рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I}. \qquad (18)$$

Здесь $I = (I_1, I_2, \ldots, I_m)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$ — канонически сопряженные переменные, $H = H_{(0)}(I) + \varepsilon H_{(1)}(I, \varphi, t)$ — гамильтониан системы, t – время, ε – малый параметр. Полагая

$$\frac{\partial H_{(0)}}{\partial I} = \omega(I), \quad \omega(I) = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m), \qquad (19)$$

систему (18) можно переписать в следующей форме:

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial H_{(1)}}{\partial \varphi}, \quad \dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial H_{(1)}}{\partial I}. \qquad (20)$$

Оператор

$$X = \sum_{i=1}^{m} \left(\mu_i(I, \varphi, t, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial \varphi_i} + \nu_i(I, \varphi, t, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial I_i} \right)$$

приближенной группы преобразований, допускаемой системой (20), с координатами μ_i и ν_i вида

$$\mu_i = \mu_{i,(0)} + \varepsilon \mu_{i,(1)} + \ldots,$$
$$\nu_i = \nu_{i,(0)} + \varepsilon \nu_{i,(1)} + \ldots$$

находится из системы приближенных определяющих уравнений

$$X \left(\dot{I} + \frac{\partial H_{(1)}}{\partial \varphi} \right) \Bigg|_{(20)} = 0,$$
$$X \left(\dot{\varphi} - \omega(I) - \varepsilon \frac{\partial H_{(1)}}{\partial I} \right) \Bigg|_{(20)} = 0. \qquad (21)$$

Система уравнений (21) после расщепления по степеням ε может быть решена методом характеристик, так что верна следующая

Теорема 6 [8]. *Полная группа невозмущенной системы (20) ($\varepsilon = 0$), определяемая инфинитезимальным оператором с координатами*

$$\nu_{i,(0)} = g_i(\xi, I),$$
$$\mu_{i,(0)} = f_i(\xi, I) + t \sum_j \frac{\partial \omega_i}{\partial I_j} g_i(\xi, I), \qquad (22)$$

где g_i, f_i – произвольные функции указанных аргументов, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, $\xi_i = \varphi_i - \omega_i t$, наследуется с любым порядком точности по ε, причем

$$\mu_{i,(k)} = \int^t N_{i,k}(J, \xi, \tau)\, d\tau + \sum_j \frac{\partial \omega_i}{\partial I_j} \int^t \int^\tau M_{i,k}(J, \xi, \theta)\, d\theta d\tau, \qquad (23)$$
$$\nu_{i,(k)} = \int^t M_{i,k}(J, \xi, \tau)\, d\tau,$$

где $M_{i,k}$, $N_{i,k}$ определяются соотношениями

$$M_{i,k} = \sum_j \left(\frac{\partial H_{(1)}}{\partial I_j} \frac{\partial \nu_{i,(k-1)}}{\partial \varphi_j} + \frac{\partial H_{(1)}}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \nu_{i,(k-1)}}{\partial I_j} - \frac{\partial^2 H_{(1)}}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \mu_{i,(k-1)} - \frac{\partial^2 H_{(1)}}{\partial \varphi_i \partial I_j} \nu_{i,(k-1)} \right),$$

$$N_{i,k} = \sum_j \left(-\frac{\partial H_{(1)}}{\partial I_j} \frac{\partial \mu_{i,(k-1)}}{\partial \varphi_j} + \frac{\partial H_{(1)}}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \mu_{i,(k-1)}}{\partial I_j} + \frac{\partial^2 H_{(1)}}{\partial I_i \partial \varphi_j} \mu_{i,(k-1)} + \frac{\partial^2 H_{(1)}}{\partial I_i \partial I_j} \nu_{i,(k-1)} \right)$$

в силу замены $J = I$, $\xi = \varphi - \omega t$, $\tau = t$.

Если генератор группы порожден первым интегралом гамильтоновой системы, то такие симметрии обычно называются гамильтоновыми.

Например, если в системе (20) $\varepsilon = 0$, то общий вид интеграла этой системы есть $F_{(0)} = F_{(0)}(\varphi - \omega t, I)$ ($F_{(0)}$ — произвольная функция) и соответствующая ему гамильтонова симметрия имеет вид

$$X_{(0)} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F_{(0)}}{\partial I_i} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial F_{(0)}}{\partial \varphi_i} \frac{\partial}{\partial I_i} \right). \qquad (24)$$

Верна следующая

Теорема 7. *Гамильтонова симметрия (24) невозмущенной системы (20) ($\varepsilon = 0$) с соответствующим интегралом $F_{(0)} = F_{(0)}(\varphi - \omega t, I)$ наследуется в гамильтонову симметрию возмущенной системы (20) вида*

$$X = X_{(0)} + \varepsilon X_{(1)} + \ldots = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial I_i} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} \frac{\partial}{\partial I_i} \right),$$

где F — приближенный первый интеграл возмущенной системы и

$$F = F_{(0)} + \varepsilon F_{(1)} + \varepsilon^2 F_{(2)} + \ldots,$$

$$F_{(k+1)} = \\ = \int \sum_j \left(\frac{\partial F_{(k)}}{\partial J_j} \frac{\partial H_{(1)}}{\partial \xi_j} - \frac{\partial F_{(k)}}{\partial \xi_j} \frac{\partial H_{(1)}}{\partial J_j} \right) d\tau \equiv \\ \equiv \int \left\{ F_{(k)}, H_{(1)} \right\} d\tau, \quad k \geqslant 0$$

в силу замены $J = I,\ \xi = \varphi - \omega t,\ \tau = t.$

Некоторые примеры построения приближенных симметрий и решений уравнений в частных производных с малым параметром приведены в обзоре [9].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методы теории приближенных групп преобразований, построенной с целью исследования симметрийных свойств дифференциальных уравнений с малым параметром, в большинстве случаев подобны методам классической теории групп Ли преобразований. В частности, в этой работе показано, что приближенные группы, так же как и точные группы преобразований, могут интерпретироваться как реализации точных групп Ли, являющихся в обоих случаях параметрической группой. Поэтому большинство идей и алгоритмов классического группового анализа, плодотворно использующихся для исследования и решения дифференциальных уравнений, описывающих различные физические ситуации, переносятся на уравнения с малым параметром.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lie S., Engel F.** Theorie der Transformationsgruppen. Leipsig: Teubner, Bd. 1, 1888; Bd. 2, 1890; Bd. 3, 1893.
2. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
3. **Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.** Приближенные симметрии // Матем. сборник. 1988. Т. 136, вып. 4. С. 435 450.
4. **Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.** Методы возмущений в групповом анализе. М.: ВИНИТИ, 1989 / Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Новейшие достижения». Т. 34. С. 85–147.
5. **Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.** Приближенные группы преобразований // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 10. С. 1712–1732.
6. **Baikov V. A., Gazizov R. K., Ibragimov N. H., Mahomed F. M.** Closed orbits and their stable symmetries // J. of Mathematical Physics. 1994. Vol. 35, No 12. P. 6525–6535.
7. **Gazizov R. K.** Lie algebras of approximate symmetries // Nonlinear Mathematical Physics. 1996. Vol. 3, No 1-2. P. 96–101.
8. **Байков В. А., Гладков А. В.** Приближенные группы симметрий гамильтоновых систем с малым параметром // Актуальные проблемы математики. Математические методы в естествознании: Межвуз. науч. сб. Уфа: УГАТУ, 1999. С. 27–31.
9. **Baikov V. A., Gazizov R. K., Ibragimov N. H.** Differential equations with a small parameter: exact and approximate symmetries // Chapter 9 in CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 3. New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods. Edited by N. H. Ibragimov. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1996. P. 217–289.

ОБ АВТОРАХ

Байков Виталий Анварович, профессор, зав. кафедрой математики УГАТУ. Дипл. физик (БГУ, 1977), д-р физ.-мат. наук в области математической физики (ИПЛ им. М. В. Келдыша, 1991). Исследования в групповом анализе, нелинейной физике.

Газизов Рафаэль Кавыевич, проф. кафедры математики УГАТУ. Дипл. математик (БГУ, 1983), д-р физ.-мат. наук в области дифференциальных уравнений (ИММ Уральского отделения РАН, 1999). Исследования в групповом анализе дифференциальных уравнений.

Ибрагимов Наиль Хайруллович, дир. междунар. ин-та симметрийного анализа и мат. моделирования при ун-те Норд-Вест (ЮАР). Дипл. математик (НГУ, 1965), д-р физ.-мат. наук в области дифуравнений (ИМ СО АН СССР, 1973). Исследования в теории дифуравнений и теории групп преобразований.