Уфа: УГАТУ
Вестник УГАТУ
2001. № 1 (3). С. 53–58
НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 336

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ПОРТФЕЛЬНЫХ ИНВЕСТИЦИЙ

Е. М. БРОНШТЕЙН

Факультет информатики и робототехники УГАТУ
Тел: (3472) 23 79 67 E-mail: brem@soros.bashedu.ru

Описываются математические структуры, связанные с инвестиционными проектами. Формулируются различные оптимизационные задачи, возникающие при формировании инвестиционных портфелей

*Инвестиционные проекты; банковские политики; оптимальные инвестиционные портфели*

## ВВЕДЕНИЕ

Одной из важнейших задач, стоящих перед потенциальным инвестором, является задача разумного (или в том или ином смысле наилучшего) размещения средств. В теории инвестиций обычно разделяют две стороны: микроэкономическую — задачи реальных инвестиций, когда принимается решение о том, как именно достичь конкретной производственной цели, и макроэкономическую — задачи портфельных инвестиций, когда считается, что по каждому проекту уже проработан путь реализации цели, а инвестору из предложенных проектов в зависимости от наличных средств и других факторов необходимо принять решение о том, какие именно проекты отобрать для финансирования.

Статья посвящена теории портфельных инвестиций. Основам теории инвестиций посвящен ряд фундаментальных изданий, например, [1,2]. К этому кругу идей относится классическая теория Нобелевских лауреатов Г. Марковица и Дж. Тобина, разработавших подходы к формированию портфелей, состоящих из ценных бумаг, имеющихся на фондовом рынке.

В настоящей работе в качестве основных элементов рассматриваются инвестиционные проекты и политика банков, определяемая как динамика банковской процентной ставки. В статье рассматриваются детерминированные задачи. В качестве математического аппарата использованы базовые концепции функционального анализа и теории оптимизации.

## 1. ИНВЕСТИЦИОННЫЕ ПРОЕКТЫ

**Определение 1.** *Инвестиционным проектом (потоком платежей) называется вектор* $C = (c_0, c_1, \dots, c_n, \dots)$, *удовлетворяющий следующим условиям:*

1. *Существует индекс $k$ такой, что $c_i = 0$ при $i > k$.*
2. *Если $b(C) = \min\{i : c_i \neq 0\}$, то $c_{b(C)} < 0$.*
3. *Если $e(C) = \max\{i : c_i \neq 0\}$, то $c_{e(C)} > 0$.*
4. $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i \geq 0$.

Финансовый смысл этого понятия таков: $c_i$ — размер платежа в $i$-й момент времени (для определенности год). Положительные значения $c_i$ соответствуют платежам инвестору, отрицательные — вкладам инвестора в инвестируемый проект. Числа $b(C)$ и $e(C)$ — соответственно фактические начало и окончание проекта $C$. Соответственно $e(C) - b(C)$ — срок выполнения проекта. Заметим, что определению 1 удовлетворяет нулевой вектор — ему соответствует нулевой проект.

Множество $P$ инвестиционных проектов является подмножеством линейного пространства $C_0$ последовательностей, удовлетворяющих условию 1 определения 1. Структура этого подмножества описывается следующим предложением.

**Теорема 1.** *Множество инвестиционных проектов $P$ является выпуклым подконусом пространства $C_0$.*

Выпуклые операции (сложения и умножения на неотрицательные числа) в конусе $P$ имеют следующий финансовый смысл: сложение соответствует формированию портфеля из двух проектов, умножение на неотрицательное число — образованию кратного проекта.

Важнейшую роль при анализе выпуклых множеств играют экстремальные элементы. Напомним, что $x$ является экстремальной точкой выпуклого конуса $K$, если из условий $x = y + z$, $y, z \in K$ следует существование таких чисел $\lambda, \mu \geq 0$, что $y = \lambda x$, $z = \mu x$. Тем самым экстремальные точки конуса $K$ заметают лучи $\{\lambda x : \lambda \geq 0\}$.

Опишем структуру множества экстремальных лучей конуса $P$. Множество экстремальных лучей конуса $P$ обозначается через $\operatorname{exr} P$. Нулевой элемент конуса всегда является экстремальным.

**Теорема 2.** *Для включения $C \in \operatorname{exr} P$, $C \neq 0$ необходимо и достаточно существование чисел $\lambda \in R^+$, $n \in N$, таких, что $C_i = 0$ при $i \neq n, n+1$; $C_n = -\lambda$; $C_{n+1} = \lambda$.*

В пространстве $C_0$ можно ввести норму, которая превращает $C_0$ в линейное нормированное (неполное) пространство. Это позволяет оценивать близость инвестиционных проектов.

Наиболее распространенными являются следующие нормы:

$\|C\|_0 = \max \lambda_i |c_i|$;

$\|C\|_p = \left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} \lambda_i |c_i|^p\right)^{1/p}$, где $p \geq 1$. При этом сумма фактически является конечной.

Здесь параметр $\lambda_i \in [0,1]$ отражает важность того или иного момента времени: чем больше $\lambda_i$, тем важнее соответствующий момент времени.

В некоторых случаях в выпуклых конусах в линейных нормированных пространствах любой элемент можно приблизить (в той или иной норме) линейной комбинацией экстремальных элементов с неотрицательными коэффициентами. В нашем случае это не так. У любой такой линейной комбинации сумма компонент равна 0, хотя для проекта это условие может не выполняться. Это объясняется незамкнутостью конуса $P$.

Справедлив следующий вариант теоремы о представимости для конуса $P$.

**Теорема 3.** *Любой элемент $C \in P$ представим в виде*

$$(0, 0, \ldots, 0, t, 0, \ldots) + \sum_{i=1}^{n} C_i,$$

*где $t \geq 0$, $C_i \in \operatorname{exr} P$.*

## 2. БАНКОВСКИЕ ПОЛИТИКИ

Наряду с потоками платежей необходимо рассматривать последовательность банковских процентных ставок, поскольку доход (или ущерб) от потока платежей зависит от этой последовательности.

Пусть последовательность $P$ банковских процентных ставок по промежуткам времени (фактическая или ожидаемая) имеет вид $(i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots)$. Соответствующие коэффициенты роста $1 + i_n$ обозначим через $r_n$.

Для наших рассмотрений удобно перейти к величинам $q_n$ — коэффициентам дисконтирования, относящим стоимость денег в момент времени $n$ к нулевому моменту времени.

Значения $q_n$ вычисляются следующим образом: $q_0 = 1$, а при $n > 1$ $q_n = [r_0 r_1 \cdots r_{n-1}]^{-1}$.

**Определение 2.** *Последовательность $Q = (q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots)$ назовем банковской политикой.*

Постоянной процентной ставке соответствует бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $1, q, q^2, \ldots, q^n \ldots$ Опишем условия на последовательность $Q$, при которых $Q$ является банковской политикой.

**Теорема 4.** *Для того чтобы последовательность $Q = (q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots)$ являлась банковской политикой при некоторой последовательности процентных ставок, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1. *Последовательность $Q$ не возрастающая.*
2. $q_0 = 1$.
3. $q_n > 0$.

Поскольку нас интересуют лишь конечное число компонент вектора $Q$, можно считать, что $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 0$.

Обозначим через $\Theta$ множество всевозможных банковских политик. Аналогично множеству $P$, $\Theta$ является подмножеством пространства $C_1$ ограниченных последовательностей. Опишем свойства множества $\Theta$.

**Теорема 5.** *$\Theta$ — выпуклое подмножество $C_1$.*

Полезно расширить множество $\Theta$, добавив к нему последовательности, члены которых равны нулю, начиная с некоторого. Экономически это соответствует резкому инфляционному скачку.

Пространство $C_1$ будем считать оснащенным нормой $\|Q\| = \sup |q_i|$. Применение диагонального метода позволяет заключить, что справедлива

**Теорема 6.** *$\Theta$ — выпуклое замкнутое подмножество $C_1$ с введенной нормой.*

Установим свойства множества $\operatorname{ext}\Theta$ экстремальных точек множества $\Theta$. Напомним, что $Q \in \operatorname{ext}\Theta$, если из условия $Q = (Q_1 + Q_2)/2$, где $Q_1, Q_2 \in \Theta$, следует, что $Q = Q_1 = Q_2$.

**Теорема 7.** *Для справедливости включения $Q \in \operatorname{ext}\Theta$ необходимо и достаточно существование такого индекса $n$, для которого $q_i = 1$ при $i \leq n$, $q_i = 0$ при $i > n$.*

Тем самым множество экстремальных точек выпуклого замкнутого множества $\Theta$ счетное. Обозначим через $S_n$ экстремальную точку $\Theta$, описанную в условии теоремы 7. В метрических выпуклых компактах справедлива теорема о представлении, т. е. любой элемент можно сколь угодно точно приблизить выпуклой комбинацией экстремальных точек. Хотя множество $\Theta$ компактом не является, справедлива

**Теорема 8.** *В выпуклом замкнутом множестве $\Theta$ любой элемент можно приблизить выпуклой комбинацией экстремальных точек.*

Многие практически важные прогнозы финансовой ситуации приводят к выпуклым семействам банковских политик. Приведем некоторые примеры.

1. Пусть прогнозируется, что коэффициенты приращения $r_n$ в любой момент времени не превосходят некоторых величин $a_n$. По определению величин $q_n$, это условие означает, что $q_n \leq a_n q_{n+1}$. Линейность неравенства означает, что соответствующее множество банковских политик выпуклое. Из нестрогости неравенств следует, что это множество является замкнутым в пространстве $C_1$.

2. Пусть коэффициенты приращения $r_n$ в любой момент времени не меньше некоторых величин $b_n$. Аналогично предыдущему эти условия равносильны линейным неравенствам $q_n \geq b_n q_{n+1}$. Тем самым соответствующие множества банковских политик выпуклые и замкнутые. Более того, справедлива

**Теорема 9.** *Если существует такое число $d > 1$, что $b_n \geqslant d$ при всех $n$, то описанное множество банковских политик компактное в $C_1$.*

3. Часто нет достаточных оснований полагать, что каждый из коэффициентов роста будет заключен в фиксированных пределах, но есть основания считать, что аналогичные величины за несколько лет не больше (или не меньше) некоторых величин. Например, пусть разумно предположение $r_n r_{n-1} \leq a_n$. Это соответствует неравенству $q_{n-1} \leq a_n q_{n+1}$. Такие предположения соответствуют прогнозам усредненных коэффициентов роста за несколько лет. В определенном смысле крайним случаем предыдущего предположения является прогноз ограниченности (снизу или сверху) коэффициентов роста $r_0 r_1 \cdots r_n$ на каждом промежутке $[0, n]$.

4. Предположение о том, что коэффициент роста за следующий год не может многократно превысить тот же коэффициент за год предыдущий ($r_n \leq c_n r_{n-1}$), приводит к неравенству $q_n^2 \leq c_n q_{n-1} q_{n+1}$. Поскольку при $x, y \geq 0$ функция $z = \sqrt{xy}$ является вогнутой, то множество банковских политик, удовлетворяющих последнему условию, является выпуклым и замкнутым.

Сочетание различных видов сформулированных условий приводит к широкому классу выпуклых замкнутых (в некоторых случаях компактных) семейств банковских политик, имеющих финансовый смысл.

Экстремальные точки соответствующих множеств при всех условиях, кроме последнего, образуют конечное множество в любом конечномерном пространстве, порожденном первыми координатными векторами. Практически важными являются именно такие подпространства. Приведем один пример.

Пусть $U = (u_1, \ldots, u_n, \ldots)$ и $V = (v_1, \ldots, v_n, \ldots)$ — числовые последовательности, для которых при любом $n$ $1 \leq u_n \leq v_n$. Рассмотрим семейство банковских политик $Q(U, V)$ таких, что справедливы соотношения $r_n \in [u_n, v_n]$. По предыдущему это множество выпуклое и замкнутое. Экстремальные точки этого множества описываются следующей теоремой.

**Теорема 10.** *Для того чтобы выполнялось соотношение $Q \in \operatorname{ext} Q(U, V)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого индекса $n$*

*выполнялось одно из двух соотношений:* $q_n = u_n q_{n+1}$ *или* $q_n = v_n q_{n+1}$.

### 3. ДОХОД ПО ПРОЕКТУ И СРАВНЕНИЕ ПРОЕКТОВ

Если $C$ — поток платежей и $Q$ — банковская политика, то доход от потока в дисконтированном виде в обобщенном смысле (сюда входит и возможный ущерб) имеет вид

$$DO(C,Q) = CQ = \sum_{i=0}^{\infty} c_i q_i.$$

Заметим, что из свойств потока $C$ следует, что сумма является конечной. Аналогично дисконтированный доход (или ущерб) для инвестора от потока $C$ в момент времени $k$ при банковской политике $Q$ равен $(CQ)_k = \sum_{i=0}^{k} c_i q_i$. При достаточно больших $k$ справедливо равенство $(CQ)_k = CQ$.

Определим понятие предпочтения проектов при банковской политике $Q$. Проект $C_1$ предпочтительнее проекта $C_2$ относительно политики $Q$, если $(C_1 - C_2)Q \geq 0$. Пусть $\{Q\}$ — какое-нибудь семейство банковских политик. Скажем, что проект $C_1$ предпочтительнее проекта $C_2$ относительно множества $\{Q\}$, если $C_1$ предпочтительнее $C_2$ относительно любой политики $Q \in \{Q\}$. Очевидно, что отношение предпочтения потоков относительно множества $\{Q\}$ является отношением нестрогого неполного порядка.

Опишем структуру потоков, которые предпочтительнее данного потока $C$ относительно множества банковских политик $\{Q\}$. Пусть $K(Q) = \{D \in P : QC \geq 0$ при $Q \in \{Q\}\}$. Множество $K(Q)$ является выпуклым конусом. Множество потоков, которые предпочтительнее $C$ относительно $Q$, имеет вид $C + K(Q)$. Из теоремы 3 следует, что такое множество потоков должно удовлетворять простой системе неравенств.

Для некоторых задач полезно рассмотреть множество банковских политик $U(C_1, C_2)$, относительно которых поток $C_1$ предпочтительнее $C_2$. Это множество может быть пустым — например, в случае, когда все компоненты вектора $C_2 - C_1$ положительные.

**Предложение 1.** *Множество банковских политик $U(C_1, C_2)$ является пересечением $Q$ с выпуклым конусом и тем самым является выпуклым подмножеством $Q$.*

Описание экстремальных элементов конуса инвестиционных проектов и множества банковских политик позволяет решить некоторые общие задачи. В частности, легко описать критерий того, что $U(C_1, C_2) = \Theta$.

**Предложение 2.** *Для того чтобы инвестиционный проект $C_1$ был предпочтительнее $C_2$ при любой банковской политике, необходимо и достаточно, чтобы при любом $k$ выполнялось неравенство*

$$\sum_{i=0}^{k} (C_{1i} - C_{2i}) > 0.$$

Приведем еще один пример такого типа. Рассмотрим семейство банковских политик, соответствующих следующему прогнозу. Предполагается, что за год $n$ коэффициент роста не меньше некоторой величины $a_n$ и может быть сколь угодно большим (ожидание финансовой нестабильности).

**Предложение 3.** *При этом предположении для того, чтобы проект $C_1$ был предпочтительнее $C_2$ при любой возможной банковской политике, необходимо и достаточно, чтобы при любом $k$ выполнялось неравенство*

$$\sum_{i=0}^{k} (C_{1i} - C_{2i}) a_1 \cdots a_k > 0.$$

Еще один пример. Пусть есть основания считать, что коэффициент роста за год $n$ не превосходит некоторой величины $b_n$ и при этом может быть сколь угодно близким к 1. (Ситуация стабильной экономики.)

**Предложение 4.** *При этом предположении для того, чтобы проект $C_1$ был предпочтительнее $C_2$ при любой возможной банковской политике, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $k_1 < k_2 < \ldots$ выполнялось неравенство:*

$$\sum_{i=0}^{\infty} (C_{1i} - C_{2i}) b_{k_1} b_{k_2} \cdots > 0.$$

Изложенный подход позволяет единообразно изложить постановки многих практически важных задач теории инвестиций. Более подробно эти подходы изложены в [3, 4].

## 4. ОПТИМАЛЬНЫЕ ИНВЕСТИЦИОННЫЕ ПОРТФЕЛИ

Задачи, стоящие перед инвесторами, как правило, заключаются в отборе из семейства предложенных части проектов. Приведем некоторые из математических задач, которые при этом возникают. Для простоты полагаем, что прогнозируется постоянство банковской процентной ставки $i_Б$.

Пусть инвестору поступили предложения о финансировании проектов

$$C_1 = (c_{10}, c_{11}, \dots, c_{1n});$$
$$\dots$$
$$C_m = (c_{m0}, c_{m1}, \dots, c_{mn}).$$

В этих условиях инвестору следует принять то или иное решение.

Прежде всего, анализ показывает, что предложения возможны двух видов.

A. Жесткие предложения. Это означает, что инвестор может согласиться на финансирование проекта только в полном объеме или отказаться от его финансирования.

B. Гибкие предложения. В этом случае инвестор вправе сам выбрать долю проекта, которую он готов финансировать. Пусть по проекту $C_1$ эта доля составляет $x \in [0,1]$. Это означает, что фактически финансируется проект $(xc_{10}, xc_{11}, \dots, xc_{1n})$. Для простоты будем считать, что все предложения относятся к одному из этих классов.

Финансовые возможности инвестора также могут различаться.

I. Инвестор обладает некоторым капиталом $F_0$ и не имеет возможности привлечения дополнительных средств.

II. Инвестор имеет возможность заимствования средств под процент $i_З$, естественно превосходящий $i_Б$.

Формирование портфеля при различных сочетаниях этих факторов приводит к оптимизационным задачам, относящимся к разным классам. Охарактеризуем эти задачи, при этом формулы опускаем. Более подробно эти постановки описаны в [5–7].

*Задача AI*. В этом случае имеем задачу целочисленного (даже булевского) программирования. В качестве ограничений выступают условия неразорения инвестора в каждый из моментов времени.

*Задача BI*. Это есть классическая задача линейной оптимизации, ограничения аналогичны предыдущим.

*Задачи A, BII*. В этом случае возникают своеобразные оптимизационные задачи. Целевая функция является кусочно-линейной и выпуклой [8]. Особенности целевой функции и метода ее построения позволили отыскать эффективные алгоритмы решения задач [8].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье затронуты только детерминированные математические задачи теории инвестиций. Для инвестора эти вопросы, видимо, вторичны. На первый план выступают юридические вопросы и экспертиза надежности проектов. Некоторым приближением к таким постановкам могут служить оптимизационные задачи, в которых учитываются возможность прекращения проектов (с известным вероятностным распределением) и случайность процентной ставки. Этим вопросам посвящены работы [9, 10].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шарп У. Ф., Александер Г. Дж., Бэйли Д. В.** Инвестиции. М: Ин-фра-М, 1997. 950 с.
2. **Мертенс А.** Инвестиции. Киев: Киевское информ. агентство, 1997. 540 с.
3. **Bronstein E., Spivak S.** Convex structures & theory of investments // 4th Faculty and Institute of Actuaries Investment Conf. & 8th AFIR Int. Colloquim. Cambridge, UK, 1998. P. 125–140. P. 13–20.
4. **Бронштейн Е. М., Спивак С. И.** О применении выпуклых структур в теории инвестиций // Тр. Средневолжск. мат. об-ва. 1999, Т. 1, № 1. С. 205–217.
5. **Бронштейн Е. М., Спивак С. И.** Сложные инвестиции и потоки платежей // Рынок ценных бумаг. 1997. № 3. С. 39–42.
6. **Бронштейн Е. М., Спивак С. И.** Как сформировать оптимальный портфель //Рынок ценных бумаг. 1997. № 14. С. 52–54.
7. **Bronstein E., Spivak S.** Mathematical analysis of the investment projects // Trans. of the 26th Int. Congress of Actuaries, Birmingham, 7-12 June 1998. V. 7, Investment. P. 295–311.
8. **Павлов Д. А.** Численные методы формирования оптимального инвестиционного портфеля // Тр. междунар. конф. по финансовой и актуарной математике. Минск, 2000, С. 51–55.

9. **Бронштейн Е. М., Спивак С. И.** Задачи оптимизации инвестиционного портфеля // Тр. междунар. конф. по финансовой и актуарной математике. Минск, 2000. С. 37–42.

10. **Bronstein E., Spivak S.** Problems of optimization of an investment portfolio // 8 AFIR Colloq. Tokio, 1999. P. 74–80.

## ОБ АВТОРЕ

**Бронштейн Ефим Михайлович**, профессор кафедры выч. математики и кибернетики УГАТУ. Дипл. инж.-электромеханик (УАИ, 1968). Д-р физ.-мат. наук по применению выч. техники, мат. моделирования и мат. методов в научных исследованиях и математическому анализу (защ. в БГУ, 1998). Соросовский доцент (1996, 1998, 1999). Работы по выпуклому анализу и финансовой математике.

*Информация*


***В. В. Атрощенко, Р. Х. Ганцев***

## Автоматическое управление и диагностика технологических процессов электрообработки

**М.: Машиностроение, 2000**

205 с. Табл. 11. Ил. 72. Библиогр.: 117 назв. ISBN 5-217-03059-3

Научный редактор д-р техн. наук, проф. *В. С. Мухин*

Рецензенты: НКТБ «Искра»; д-р техн. наук, проф. *А. Н. Зайцев*

В монографии систематизированы вопросы проектирования систем автоматического управления технологическими процессами электрообработки (САУ ТП ЭО) и диагностики аварийных ситуаций. На конкретных примерах САУ ТП ЭО и систем диагностики, внедренных в различных отраслях промышленности, проанализированы схемно-технические решения построения систем. Разработаны теоретические и прикладные основы автоматизации ТП ЭО в условиях существующего парка электротехнологических станков. Книга рассчитана на широкий круг инженерно-технических работников

**1. Современное состояние автоматизации технологических процессов электрообработки**

Основные технические показатели и особенности управления ТП ЭО. Классификация систем автоматического управления ТП ЭО. Виды аварийных ситуаций в ТП ЭО.

**2. Основы проектирования систем автроматического управления технологическими процессами электрообработки**

Задачи проектирования САУ ТП ЭО. Математическая модель интегрального МЭЗ. Математическая модель минимального локального МЭЗ. Обобщенная математическая модель динамики ТП ЭО. Расчет параметров регулятора САР МЭЗ. Разработка алгоритмов управления ТП ЭО: алгоритмы управления ТП электроэрозионной обработки; алгоритмы управления ТП электрохимической обработки; алгоритмы управления ТП электроэрозионно-электрохимической обработки; алгоритмы управления ТП размерной обработки электрической дугой.

**3. Диагностика аварийных ситуаций в технологических процессах электрообработки**

Задачи диагностики аварийных ситуаций. Оптимальная фильтрация ВЧ выбросов напряжения. Методы решения задачи диагностики коротких замыканий при электрохимической обработке. Метод адаптивной диагностики коротких замыканий.

**4. Техническая реализация управляющих систем технологических процессов электрообработки**

Разработка функциональных схем систем автоматического управления ТП ЭО: системы автоматического управления ТП ЭХО (одноконтурные САУ ТП ЭХО, двухконтурные САУ ТП ЭХО); системы автоматического управления ТП ЭЭХО; системы автоматического управления ТП РОД. Разработка функциональных схем систем автоматической диагностики коротких замыканий.