УДК 621.357.74

# ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ МАТРИЦ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

**А. А. КУЗЬМИНЫХ**

Факультет авиационно-технологических систем УГАТУ

Тел: (3472) 23 06 76

Предложена методика исследования напряженно-деформированного состояния многослойных матриц методом конечных элементов. Матрицы с произвольным числом слоев собраны с предварительным натягом

*Напряженно-деформированное состояние; многослойная матрица; метод конечных элементов; идеальный контакт слоев; суперэлемент; двойные узлы; узловые силы; матрица жесткости; оптимальное проектирование*

Наиболее трудоемкой и требующей преобладающей доли от затрат машинного времени частью задачи оптимального проектирования многослойных матриц для холодной объемной штамповки является определение компонент их напряженно-деформированного состояния (НДС). В то же время все ужесточающиеся требования к точности и достоверности получаемых результатов диктуют необходимость использования для расчета НДС современных численных методов, в частности, метода конечных элементов (МКЭ).

Предметом данной статьи является разработка общей методики расчета НДС многослойных матриц для штамповки некруглых деталей. На рисунке приводится расчетная схема одного из вариантов такой матрицы — с центральным шестигранным отверстием, представляющей собой циклически симметричную конструкцию (12 плоскостей симметрии).

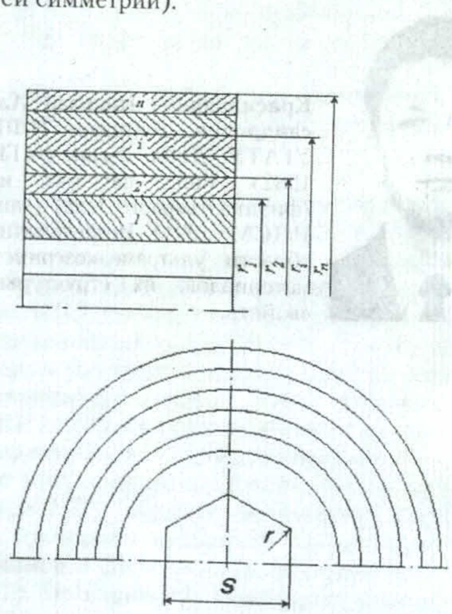


**Рис.** Расчетная схема многослойной матрицы

В статье [1] решением плоской контактной задачи теории упругости доказано, что в такого рода конструкциях при сборке с натягом и нагружении внутренним давлением имеет место „идеальный" контакт слоев — проскальзывания слоев не происходит. Далее это обстоятельство принимается как гипотеза — допущение об идеальном контакте слоев (или рассматриваются только те случаи, когда такая гипотеза справедлива).

Нижеизложенный алгоритм справедлив как для трех-, так и двух- и одномерных задач определения НДС многослойных матриц. Задача будет одномерной, если отверстие постоянного (по высоте) сечения и круглое, постоянна также внешняя нагрузка (внутреннее давление), и становится двухмерной, если все перечисленное остается в силе, но отверстие уже не круглое (плоская задача) или для осесимметричных конструкций. Размерность задачи далее обозначается буквой $N$.

Матричные уравнения МКЭ для слоев записываются как для суперэлементов [2, 3]: перемещения внутренних и не участвующих в контакте контурных узлов исключаются (методом симметричного Гауссового исключения или фронтальным методом Айронса). Базовые (участвующие в контакте) узлы считаются двойными: принадлежащими соответственно охватываемой и охватывающей поверхностям.

Основные матричные соотношения МКЭ для суперэлементов (слоев общим число $n$) могут быть записаны в виде [2, 4]

$$\boldsymbol{K}_{22}^{(1)} \boldsymbol{u}_{\text{int}}^{(1)} = \boldsymbol{P}^{(1)} + \boldsymbol{X}^{(1)};$$

$$\left\| \begin{matrix} \boldsymbol{K}_{11}^{(i)} & \boldsymbol{K}_{12}^{(i)} \\ \boldsymbol{K}_{21}^{(i)} & \boldsymbol{K}_{22}^{(i)} \end{matrix} \right\| \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{u}_{\text{ext}}^{(i-1)} \\ \boldsymbol{u}_{\text{int}}^{(i)} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -\boldsymbol{X}^{(i-1)} \\ \boldsymbol{X}^{(i)} \end{matrix} \right\}, \quad i = 2, ..., n-1; \tag{1}$$

$$\boldsymbol{K}_{11}^{(n)} \boldsymbol{u}_{\text{ext}}^{(n-1)} = \boldsymbol{P}^{(1)} + \boldsymbol{X}^{(1)}.$$

Здесь $\boldsymbol{X}^{(i)}$ $(i = 1, 2, ..., n-1)$ — векторы (матрицы-столбцы) узловых сил взаимодействия между слоями $i$ и $(i+1)$; $\boldsymbol{u}_{\text{int}}^{(k)}$, $\boldsymbol{u}_{\text{ext}}^{(k)}$ $(k = 1, 2, ..., n-1)$ — векторы узловых перемещений на стыке $k$ (слоев $k$ и $(k+1)$) соответственно на охватываемой (int) и охватывающей (ext) поверхностях.

Пусть все поверхности стыка слоев цилиндрические, а перемещения узлов в векторах $\boldsymbol{u}_{\text{int}}^{(k)}$, $\boldsymbol{u}_{\text{ext}}^{(k)}$ перечислены в порядке: радиальное, осевое и окружное при $N = 3$, радиальное и окружное или радиальное и осевое (осесимметричная задача) при $N = 2$, радиальные — при $N = 1$. Тогда, вводя векторы размерности $N \cdot M^{(k)}$, где $M^{(k)}$ — число двойных узлов на стыке $k$,

$$\boldsymbol{J}^{(k)T} = \| 100100\dots100 \|, \quad k = 1, 2, ..., n-1, \quad N = 3, \tag{2а}$$

$$\boldsymbol{J}^{(k)T} = \| 101010\dots10 \|, \quad k = 1, 2, ..., n-1, \quad N = 2, \tag{2б}$$

$$\boldsymbol{J}^{(k)T} = \| 11\dots1 \|, \quad k = 1, 2, ..., n-1, \quad N = 1. \tag{2в}$$

Для составной конструкции, собранной с предварительным натягом $\delta^{(k)}$ $(k = 1, 2, \dots, n-1)$, равным разности радиусов охватываемой и охватывающей поверхностей, можно записать следующее матричное уравнение, выражающее условия совместности деформации (при идеальном контакте слоев)

$$\boldsymbol{u}_{\text{int}}^{(k)} = \boldsymbol{u}_{\text{ext}}^{(k)} + \delta^{(k)} \boldsymbol{J}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \tag{3}$$

С привлечением (3) из уравнений (1) удается исключить неизвестные узловые силы между слоями $\boldsymbol{X}^{(i)}$ и записать их в стандартной для МКЭ форме

$$\|K\| \{u\} = \{P\} - \sum_{k=1}^{n-1} \delta^{(k)} \left\{ b^{(k)} \right\}. \tag{4}$$

Здесь

$$\|K\| = \|K\|^T =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{K}_{11}^{(2)} + \boldsymbol{K}_{22}^{(1)} \dots & 0 & \dots & 0 \\ \boldsymbol{K}_{21}^{(2)} \quad \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 \quad \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots \quad \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \quad \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots \quad \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \quad \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 \quad \dots & \boldsymbol{K}_{12}^{(i)} & \dots & 0 \\ 0 \quad \dots & \boldsymbol{K}_{11}^{(i+1)} + \boldsymbol{K}_{22}^{(i)} & \dots & 0 \\ 0 \quad \dots & \boldsymbol{K}_{21}^{(i+1)} & \dots & 0 \\ 0 \quad \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots \quad \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \quad \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 \quad \dots & 0 & \dots & \boldsymbol{K}_{12}^{(n-1)} \\ 0 \quad \dots & 0 & \dots & \boldsymbol{K}_{11}^{(n)} + \boldsymbol{K}_{22}^{(n-1)} \end{matrix} \right\| \tag{5}$$

— симметричная блочно-диагональная матрица жесткости составной конструкции (знак $T$ означает операцию транспонирования), где $\mathbf{0}$ — нулевая прямоугольная матрица, размерность которой $NM_i \times NM_j$ определяется ее местоположением в матрице (5); $i$ — номер строки, $j$ — номер столбца блоков;

$$\{u\}^T = \left\| \ \boldsymbol{u}_{\text{ext}}^{(1)T} \quad \boldsymbol{u}_{\text{ext}}^{(2)T} \quad \dots \quad \boldsymbol{u}_{\text{ext}}^{(n-1)T} \ \right\| \tag{6}$$

— вектор узловых перемещений ансамбля суперэлементов;

$$\{\boldsymbol{P}\}^T = \left\| \ \boldsymbol{P}^{(1)T} \quad \mathbf{0}^{(2)} \quad \dots \quad \mathbf{0}^{(n-1)} \ \right\| \tag{7}$$

— вектор узловых сил на ансамбль от поверхностной нагрузки на стенки отверстия;

$$\left\{ b^{(1)} \right\}^T = \left\| \ \boldsymbol{J}^{(1)T} \boldsymbol{K}_{22}^{(1)T} \quad \mathbf{0}^{(2)} \quad \mathbf{0}^{(3)} \quad \dots \quad \mathbf{0}^{(n-1)} \ \right\|,$$
$$\left\{ b^{(2)} \right\}^T = \left\| \ \boldsymbol{J}^{(2)T} \boldsymbol{K}_{12}^{(2)T} \quad \boldsymbol{J}^{(2)T} \boldsymbol{K}_{22}^{(2)T} \quad \mathbf{0}^{(3)} \quad \dots \quad \mathbf{0}^{(n-1)} \ \right\|,$$
$$\left\{ b^{(i)} \right\}^T = \left\| \ \mathbf{0}^{(1)} \ \dots \ \mathbf{0}^{(i-2)} \quad \boldsymbol{J}^{(i)T} \boldsymbol{K}_{12}^{(i)T} \quad \boldsymbol{J}^{(i)T} \boldsymbol{K}_{22}^{(i)T} \quad \mathbf{0}^{(i+1)} \ \dots \ \mathbf{0}^{(n-1)} \ \right\|,$$
$$\left\{ b^{(n-1)} \right\}^T = \left\| \ \mathbf{0}^{(1)} \ \dots \ \mathbf{0}^{(n-3)} \quad \boldsymbol{J}^{(2)T} \boldsymbol{K}_{12}^{(n-1)T} \quad \boldsymbol{J}^{(2)T} \boldsymbol{K}_{22}^{(n-1)T} \ \right\|. \tag{8}$$

В (7) и (8) через $\mathbf{0}^{(k)}$ $(k = 1, 2, ..., n-1)$ обозначены нулевые векторы (матрицы-строки) размерности $N \times M_{(k)}$.

Нетрудно убедиться, что глобальную матрицу жесткости составной конструкции (5) можно вычислить по обычной процедуре МКЭ как неоднородного тела. В случае одномерной задачи в уравнениях (1)–(8) матрицы (блоки матриц) являются скалярными величинами.

Матричное уравнение (4) по структуре повторяет, а для одномерной задачи — совпадает с известным уравнением „трех давлений“ [5, 6].

Решением системы линейных алгебраических уравнений (4) при заданной внешней нагрузке (7) и натягах между слоями $\delta^{(k)}$ определяется вектор перемещений базовых узлов на охватывающих (6), затем — по (3) на охватываемых поверхностях суперэлементов (слоев). Далее, по известной методике МКЭ — перемещения внутренних узлов и напряжения в конечных элементах слоев.

По предложенной выше методике была разработана программа для оптимального проектирования многослойных матриц с произвольным числом слоев. Как и следовало ожидать, тестирование программы на примерах трех- [4] и двухмерной [7] задач дало идентичные результаты.

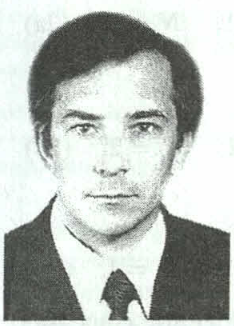
## ВЫВОДЫ

Предложена методика и алгоритм исследования методом конечных элементов напряженно-деформированного состояния многослойных матриц, содержащих произвольное число слоев и собранных с предварительным натягом. Будучи включенной в состав систем автоматизированного проектирования, методика позволяет повысить точность и достоверность получаемых результатов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Кузьминых А. А., Газизов Х. Ш., Якупов Р. Г., Шевелев А. А.** Исследование напряженного состояния составного цилиндра с шестиугольным контуром полости // Изв. вузов. Черная металлургия. 1994. № 5. С. 38–40.
2. **Галлагер Р.** Метод конечных элементов. М.: Мир, 1984. 428 с.
3. **Газизов Х. Ш., Кузьминых А. А.** Расчет соединений с натягом методом конечных элементов // Изв. вузов. Машиностроение. 1994. № 7–9. С. 58–61.
4. **Кузьминых А. А., Газизов Х. Ш., Закиров Д. М.** Оптимальное проектирование трехслойных матриц для штамповки шестигранных деталей // Теория и технология процессов пластической деформации. М.: МИСиС, 1997. С. 380–389.
5. **Канторович З. Б.** Основы расчета химических машин и аппаратов. М.: Машгиз, 1960. 743 с.
6. **Кузьминых А. А., Газизов Х. Ш.** Оптимизация геометрических параметров многослойных матриц с твердосплавной вставкой // Изв. вузов. Черная металлургия. 1999. № 3. С. 48–51.
7. **Адельгильдин А. Х., Закиров Д. М., Кузьминых А. А.** Расчет параметров бандажированных матриц для штамповки шестигранных деталей методом конечных элементов // Прогрессивные технологические процессы в обработке металлов давлением. Магнитогорск: МДП, 1997. С. 231–236.


## ОБ АВТОРЕ



**Кузьминых Александр Андреевич,** доцент, гл. науч. сотр. отраслевой лаборатории РТИИ УГАТУ. Дипл. инж.-механик (Челяб. политехн. ин-т, 1966). Канд. техн. наук по обработке металлов давлением (защ. в МИСиС, 1975). Исследования в области технологии производства инструментов для обработки металлов давлением.

УДК 571.95

# ПРИБЛИЖЕННЫЕ СИММЕТРИИ И ОТОБРАЖЕНИЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

**А. В. ГЛАДКОВ**

Естественно-научный факультет УГАТУ
Тел: (3472) 23 77 35 E-mail: gladkov@math.ugatu.ac.ru

Рассматриваются гамильтоновы системы с малым параметром. На основе приближенных симметрий этих систем строятся соответствующие им отображения (за период, сепаратрисные). Полученные отображения могут быть использованы для анализа локальной неустойчивости и оценки стохастических слоев близи сепаратрис невозмущенной задачи. В качестве примеров разобраны два случая периодического возмущения нелинейного маятника и возмущенная система волчка Эйлера

*Гамильтоновы системы с малым параметром; приближенные симметрии; отображение за период; сепаратрисное отображение*

## ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются гамильтоновы системы с гамильтонианом

$$H = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_1(\mathbf{I}, \varphi, t). \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{I} = (I_1, I_2, \ldots I_m)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m)$ – канонически сопряженные переменные «угол-действие», $t$ – время, $\varepsilon$ – малый параметр.

Случай $\varepsilon = 0$ соответствует невозмущенной задаче, которая представляет собой интегрируемую систему с достаточным набором точных симметрий. Наличие же возмущения ($\varepsilon \neq 0$) часто приводит к нарушению симметрийных свойств системы и, вообще говоря, к ее неинтегрируемости [4].

В [3] была доказана теорема о наследовании всех точных симметрий невозмущенной системы в виде приближенных симметрий системы с возмущением. Для класса гамильтоновых симметрий, связанных с первыми интегралами системы, доказана теорема о сохранении свойства гамильтоновости при наследовании симметрии и предъявлены формулы для коэффициентов разложения приближенных первых интегралов, также исследован вопрос устойчивости симметрий относительно возмущения.

В данной работе рассмотрены два случая периодического возмущения нелинейного маятника. При помощи приближенных гамильтоновых симметрий построены приближенно инвариантные решения в виде приближенных первых ин-