Уфа: УГАТУ *Вестник УГАТУ* 2001. № 2 (4). С. 38–44

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • ФИЗИКА И МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

ИНВАРИАНТЫ ЛАПЛАСА И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЕВСКОГО ТИПА

А. В. ЖИБЕР

Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН
Тел: (3472) 22 59 36 E-mail: zhiber@imat.rb.ru

Приведена схема описания всех интегрируемых гиперболических уравнений типа уравнения Лиувилля. Решение этой классической задачи основано на конструктивном критерии интегрируемости в терминах обобщенных инвариантов Лапласа определяющего уравнения. Сформулирован результат классификации

Интеграл; симметрия; инвариант

1. ВВЕДЕНИЕ

На ранних этапах своего развития теория уравнений в частных производных в качестве одной из основных задач выдвигала проблему нахождения и исследования уравнений, допускающих явное интегрирование. Такие классики математики 18–19 веков, как Эйлер, Лагранж, Дарбу, Ли, Якоби, Гурса и другие, разработали много приемов для явного нахождения точных решений дифференциальных уравнений в частных производных (см. [1–5]).

В конце 19-го и в 20-м веке сильнейшее влияние математической физики привело к переоценке ценностей в теории уравнений в частных производных. Поэтому ряд классических результатов, касающихся точного интегрирования, оказался основательно забыт даже специалистами. В настоящее время интерес к этим результатам значительно возрос в связи с открытием нового фундаментального метода интегрирования нелинейных уравнений в частных производных: метода обратной задачи рассеяния (см. [6]).

Стандартным примером точно интегрируемого нелинейного уравнения в частных производных является уравнение Лиувилля

$$u_{xy} = \exp(u). \qquad (1.1)$$

Изучение свойств этого уравнения привело классиков (см. [1–3]) к двум близким определениям интегрируемости для уравнений

$$u_{xy} = a(x, y, u, u_x, u_y). \qquad (1.2)$$

Согласно первому из них, уравнение типа уравнения Лиувилля характеризуется существованием параметрически заданного решения вида

$$x = A(\alpha, \beta, p, p', \dots, q, q', \dots),$$
$$y = B(\alpha, \beta, p, p', \dots, q, q', \dots),$$
$$u = C(\alpha, \beta, p, p', \dots, q, q', \dots),$$

зависящего от произвольных функций $p(\alpha), q(\beta)$ и конечного числа из производных. Так, общее решение уравнения (1.1) дается формулой

$$u(x, y) = \ln\left(\frac{2f'(x)g'(y)}{(f(x) + g(y))^2}\right).$$

Для того чтобы дать другое определение интегрируемости, нам понадобится понятие первого интеграла для уравнения в частных производных. Отметим, что в отличие от случая обыкновенных уравнений этот термин (как, впрочем, и само понятие) не является общеупотребимым.

Основную роль в вопросах точной интегрируемости обыкновенного дифференциального уравнения вида

$$G(x, u, u_x, u_{xx}, \dots) = 0 \qquad (1.3)$$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 99-01-00431

играют первые интегралы, т. е. функции вида $g(x, u, u_x, u_{xx}, \dots)$, такие, что $g(x, u(x), u'(x), u'', \dots)$ не зависят от x для любого решения $u(x)$ уравнения (1.3). Всякое обыкновенное уравнение обладает интегралами, и вся проблема состоит в том, что, вообще говоря, найти нетривиальный первый интеграл ничуть не легче, чем решать само уравнение. Для уравнения в частных производных ситуация принципиально иная, а именно: лишь исключительные уравнения имеют интегралы, но уж если известно, что у уравнения есть интеграл данного порядка, то найти его не составляет особого труда.

Уравнение Лиувилля (1.1) обладает следующими интегралами: для любого его решения $u(x, y)$ функция

$$P = u_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2$$

не зависит от y (т. е. является функцией, зависящей только от x). Аналогично, функция

$$Q = u_{yy} - \frac{1}{2}u_y^2$$

не зависит от x на решениях уравнения (1.1).

Будем называть функцию вида

$$w(x, y, u, u_x, u_y, \dots),$$

не зависящую от y на всех решениях данного уравнения, его x-интегралом. Аналогично определяются y-интегралы. Таким образом, P и Q — это соответственно x- и y-интегралы уравнения Лиувилля.

Уравнение (1.2) называется интегрируемым, если оно обладает нетривиальными x- и y-интегралами.

Обобщение этого определения на уравнения второго порядка более общего вида и на системы уравнений вида (1.2) можно найти в [7–10].

Целый ряд статей [11–16] посвящен классификации интегрируемых уравнений (1.2). В этих работах, с точки зрения различных определений интегрируемости, исследовались некоторые подклассы таких уравнений.

В настоящей работе изложены основные моменты решения задачи полной классификации уравнений (1.2), обладающих интегралами.

2. КРИТЕРИЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Для того чтобы сформулировать строгие утверждения, касающиеся исследуемого уравнения

$$u_{xy} = a(x, y, u, u_x, u_y), \tag{2.1}$$

в первую очередь нужно формализовать тот факт, что «буква» u обозначает произвольное решение уравнения. Для этого принято исключать изо всех выражений те частные производные от u, которые можно выразить из уравнения. Например, u_{xy} всегда, когда речь идет о решениях, заменяется на правую часть $a(x, y, u, u_x, u_y)$, u_{xyy} — на

$$\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial u}u_y + \frac{\partial a}{\partial u_x}a + \frac{\partial a}{\partial u_y}u_{yy}$$

и т. д. Легко видеть, что таким образом всякая смешанная производная от u может быть выражена через

$$x, y, u, u_1 = u_x, u_2 = u_{xx}, u_3 = u_{xxx}, \dots,$$
$$\bar{u}_1 = u_y, \bar{u}_2 = u_{yy}, \bar{u}_3 = u_{yyy}, \dots. \tag{2.2}$$

Функции (2.2) нельзя связать между собой, пользуясь уравнением (2.1) и его дифференциальными следствиями. Поэтому во всех определениях и выкладках они считаются независимыми переменными. Само уравнение (2.1) мы будем записывать в виде

$$D\bar{D}u = a(x, y, u, u_1, \bar{u}_1), \tag{2.3}$$

где D и $\bar{D}$ — операторы полных производных уравнения (2.1). Более формально, D и $\bar{D}$ являются дифференцированиями в пространстве $\mathcal{F}$ локально аналитических функций, каждая из которых зависит от конечного числа переменных (2.2). Эти дифференцирования задаются соотношениями

$$D(u_k) = u_{k+1}, \quad \bar{D}(\bar{u}_k) = \bar{u}_{k+1},$$
$$u_0 = \bar{u}_0 = u, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$
$$[D\bar{D}] = 0, \quad D\bar{D}(u) = a(x, y, u, u_1, \bar{u}_1).$$

Записанные в виде векторных полей, они имеют вид

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=0}^{\infty} u_{i+1}\frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{i=0}^{\infty} \bar{D}^{i-1}(a)\frac{\partial}{\partial \bar{u}_i}, \tag{2.4}$$

$$\bar{D} = \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{i=0}^{\infty} \bar{u}_{i+1}\frac{\partial}{\partial \bar{u}_i} + \sum_{i=0}^{\infty} D^{i-1}(a)\frac{\partial}{\partial u_i}. \tag{2.5}$$

Введем важное понятие (инфинитезимальной) симметрии уравнения (2.3). Помимо того, что с помощью симметрий можно строить точные решения, наличие симметрий у уравнения удобно рассматривать в качестве отличительного признака интегрируемости. В 80-е годы уфимскими математиками был разработан новый подход к проблеме классификации интегрируемых уравнений, основанный на понятии симметрии.

Определение 2.1. *Симметрией уравнения (2.3) порядка (n,m) называется функция* $f = f(x,y,u,u_1,\dots,u_n,\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_m)$, $f_{u_n} \neq 0$, $f_{\bar{u}_m} \neq 0$, *удовлетворяющая уравнению*

$$(D\bar{D} - a_{u_1}D - a_{\bar{u}_1}\bar{D} - a_u)f = 0. \qquad (2.6)$$

Уравнение (2.6) называется *определяющим уравнением*.

Пусть f — симметрия уравнения (2.3), тогда нетрудно показать, что производные f_{u_n} и $f_{\bar{u}_m}$ являются решениями так называемых характеристических уравнений

$$\bar{D}F = 0 \quad \text{и} \quad D\Phi = 0 \qquad (2.7)$$

соответственно.

Решения первого уравнения (2.7) будем называть x-интегралами, а второго — y-интегралами уравнения (2.3).

Определение 2.2. *Уравнение (2.3) называется интегрируемым, если* $\operatorname{Ker} D \neq \{\varphi(y)\}$ *и* $\operatorname{Ker} \bar{D} \neq \{g(x)\}$.

Итак, уравнение является интегрируемым, если у него существуют нетривиальные x- и y-интегралы. Например, волновое уравнение

$$u_{xy} = 0$$

обладает интегралами

$$\omega = u_1, \quad \bar{\omega} = \bar{u}_1,$$

уравнение Эйлера–Пуассона

$$u_{xy} = \frac{1}{x-y}(u_y - u_x)$$

интегралами

$$\omega = \frac{u_2}{x-y}, \quad \bar{\omega} = \frac{\bar{u}_2}{x-y},$$

а интегралами уравнения Лиувилля (1.1) являются

$$\omega = u_2 - \frac{1}{2}u_1^2, \quad \bar{\omega} = \bar{u}_2 - \frac{1}{2}\bar{u}_1^2.$$

Совместно с В. В. Соколовым нами был получен конструктивный критерий интегрируемости уравнений (2.3) в терминах обобщенных инвариантов определяющего уравнения (2.6) (см. [17–20]). Построение этого критерия основано на методе каскадного интегрирования Лапласа линейных гиперболических уравнений (см., например, [4, 5, 17]) применительно к определяющему уравнению (2.6). Отметим, что фигурирующие в (2.6) D и $\bar{D}$ не операторы частных производных $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$, а более сложные дифференцирования (2.4). Некоторые свойства этих дифференцирований оказываются неожиданными. Например, общее решение уравнения $D\bar{D}(f) = 0$ не всегда имеет вид $f = \Phi + \Psi$, $\Phi \in \operatorname{Ker} D$, $\Psi \in \operatorname{Ker} \bar{D}$. Однако вся теория инвариантов и преобразований Лапласа без изменений переносится на уравнения (2.6) по той причине, что при ее построении использовалось фактически только то, что $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ — коммутирующие дифференцирования.

Обозначим через h и k инварианты Лапласа определяющего уравнения (2.6):

$$h = a_{u_1}a_{\bar{u}_1} + a_u - Da_{u_1}, \qquad k = a_{u_1}a_{\bar{u}_1} + a_u - \bar{D}a_{\bar{u}_1}.$$

Далее положим

$$h_{n+1} = 2h_n - h_{n-1} - D\bar{D}\ln h_n, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где $h_0 = h$, $h_{-1} = k$. Ряд Лапласа для уравнения (2.6) имеет вид

$$\dots, (h_{-2}, h_{-3}), (h_{-1}, h_{-2}), (h_0, h_{-1}), (h_1, h_0), (h_2, h_1), \dots \qquad (2.8)$$

Движение вправо осуществляется x-преобразованиями, а движение влево — y-преобразованиями Лапласа; x-преобразование переводит уравнение с инвариантами (h_n, h_{n-1}) в уравнение с инвариантами (h_{n+1}, h_n), а y-преобразование переводит (h_{n+1}, h_n) в (h_n, h_{n-1}) для целого n.

Критерий интегрируемости формулируется следующим образом:

Теорема 2.1. *Пусть уравнение (2.1) интегрируемо* ($\operatorname{Ker}\bar{D} \neq \{f(x)\}$ *и* $\operatorname{Ker} D \neq \{\varphi(y)\}$). *Тогда ряд Лапласа (2.8) определяющего уравнения (2.6) обрывается с двух сторон, т.е. найдутся целые n и m ($n \geq 0$, $m \geq 0$) такие, что $h_n = h_m = 0$. Обратно, если ряд Лапласа обрывается с двух сторон, то уравнение (2.1) обладает нетривиальными интегралами* $\omega = \omega(x,y,u,u_1,\dots,u_p)$ *и* $\bar{\omega} = \bar{\omega}(x,y,u,\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_p)$.

Это утверждение является чрезвычайно важным при решении задачи полной классификации нелинейных гиперболических уравнений.

3. УРАВНЕНИЯ С НУЛЕВЫМ ИНВАРИАНТОМ ЛАПЛАСА И УРАВНЕНИЯ ТИПА ЛИУВИЛЛЯ

В этом пункте мы приведем результат классификации уравнений (1.2) с нулевым инвариантом Лапласа

$$h = a_{u_1}a_{\bar{u}_1} + a_u - Da_{u_1}$$

и уравнений, обладающих x- и y-интегралами второго порядка (см. [21, 22]).

Теорема 3.1. *Пусть уравнение (2.1) интегрируемо. Тогда любое такое уравнение с инвариантом Лапласа $h = 0$ заменой $u \leftrightarrow f(x,y,u)$ приводится к одному из следующих:*

$$u_y = q_0(x,y) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(y)q_i(y,v),\ v_x = 0;$$
$$u_y = \alpha_0(y,v) + \alpha_1(y,v)u + \alpha_2(y,v)u^2,\ v_x = 0,$$

где q_i, α_i — произвольные функции своих аргументов.

Полный список уравнений (2.1), обладающих интегралами второго порядка, т. е. уравнений типа Лиувилля, приводится в следующем утверждении:

Теорема 3.2. *Любое нелинейное уравнение (2.1), для которого существуют интегралы второго порядка, заменой $x \leftrightarrow X(x)$, $y \leftrightarrow Y(y)$, $u \leftrightarrow f(x,y,u)$ сводится к одному из следующих:*

$$u_{xy} = e^u;$$
$$u_{xy} = e^u(u_y^2 - 4)^{1/2};$$
$$u_{xy} = -2(u_xu_y)^{1/2}/(x+y);$$
$$u_{xy} = \psi(u)\beta(u_x)\bar{\beta}(u_y), \qquad (\ln\psi)'' = \psi^2,$$
$$\beta\beta' = -u_x, \qquad \bar{\beta}\bar{\beta}' = -u_y;$$
$$u_{xy} = \frac{1}{u}\beta(u_x)\bar{\beta}(u_y),$$
$$\beta\beta' + c\beta = -u_x, \quad \bar{\beta}\bar{\beta}' + c\bar{\beta} = -u_y;$$
$$u_{xy} = \frac{1}{(x+y)\beta(u_x)\bar{\beta}(u_y)},$$
$$\beta' = \beta^3 + \beta^2, \quad \bar{\beta}' = \bar{\beta}^3 + \bar{\beta}^2;$$
$$u_{xy} = u_xu_y\left(\frac{1}{u-x} + \frac{1}{u-y}\right).$$

4. ВЫСШИЕ ИНВАРИАНТЫ ЛАПЛАСА

Здесь приведен результат исследования структуры высших инвариантов Лапласа определяющего уравнения (2.6) и важные для классификации формулы, связывающие x- и y-интегралы с первыми необходимыми условиями интегрируемости

$$a_{u_1} \in \operatorname{Jm}\bar{D},\ a_{\bar{u}_1} \in \operatorname{Jm}D,\ \chi \in \operatorname{Jm}\bar{D},\ \chi \in \operatorname{Jm}D,$$
$$\chi = a_u + a_{u_1} + a_{u_1}a_{\bar{u}_1}.$$

Обозначим через $\operatorname{ord} f\,(\overline{\operatorname{ord}} f)$ порядок функции f по переменным u, u_1, u_2, … ($\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots$). Не ограничивая общности, можно считать справедливым неравенство

$$\operatorname{ord}\omega \geq \overline{\operatorname{ord}}\,\bar{\omega}.$$

Кроме этого, $\operatorname{ord}\omega \geq 3$, так как случай $\operatorname{ord}\omega < 3$ рассмотрен в предыдущем пункте.

Теорема 4.1. *Для интегрируемых уравнений (2.1) выполняется одна из следующих альтернатив:*

(i) $\operatorname{ord} h_k \leq 1$ *для любого* k;

(ii) $a_{u_1} = \bar{D}\ln(u_r + g)$, $r \geq 2$, $\operatorname{ord} h_k \leq r$ *для любого k. При этом существуют инварианты порядка r, которые задаются формулами $h_k = \alpha_k(u_r + g)$, $\overline{\operatorname{ord}}\,\alpha_k < r$;*

(iii) $\operatorname{ord}\omega = \overline{\operatorname{ord}}\,\bar{\omega}$, $h_0 = \varkappa_0(u_2 + p_1)$, $\operatorname{ord}\varkappa_0 \leq 1$, $h_i = \varkappa_i(u_{i+2} + p_{i+1}/(u_{i+1} + p_i)^2$, $\operatorname{ord}(\varkappa_i, p_i) \leq i$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$, $a_{u_1} \neq \bar{D}\ln(u_i + p_{i-1})$, $i = 2, 3, \ldots, n-1$, $h_{n-2} = \alpha\cdot\omega$, $\operatorname{ord}\alpha < n$.

В случае альтернативы (i) справедливо утверждение:

Теорема 4.2. *Любое интегрируемое уравнение (2.1), для которого выполняется альтернатива (i), есть либо уравнение с нулевым инвариантом ($h\cdot k = 0$), либо уравнение типа Лиувилля.*

Основным моментом, которым мы пользуемся при классификации уравнений (2.1), является утверждение:

Теорема 4.3. *Пусть для интегрируемых уравнений (2.1) выполняется альтернатива (ii) или (iii). Тогда либо*

$$a_{u_1} = \bar{D}f(x,y,u,u_1), \quad a_{\bar{u}_1} = D\bar{f}(x,y,u,\bar{u}_1),$$

либо

$$a_{u_1} = \bar{D}\ln(u_r + g), \qquad a_{\bar{u}_1} = D\ln(\bar{u}_k + g),$$
$$k = r-1, r, \tag{4.1}$$
$$\chi = \bar{D}\psi(x,y,u,u_1), \qquad \chi = D\bar{\psi}(x,y,u,\bar{u}_1), \tag{4.2}$$

$$\omega = D[\ln(u_r + g) + \varphi(x,y,u,u_1)] - \bar{c}\psi,$$
$$\bar{\omega} = \bar{D}[\ln(\bar{u}_k + \bar{g}) + \bar{\varphi}(x,y,u,\bar{u}_1)] - c\bar{\psi},$$
$$a_{u_1} + \bar{D}\varphi = \bar{c}\bar{\psi}, \quad a_{u_1} + D\bar{\varphi} = c\psi,$$

где c, $\bar c$ — постоянные, отличные от нуля, и $r \geq 2$ при $k = r$, а при $k = r - 1$, $r \geq 3$. При $r = 2$, $k = 1$ выполнены формулы (4.1), (4.2), при этом

$$\omega = D[\ln(u_2 + g) + \varphi] + \beta, \quad \bar\omega = \alpha\bar u_2 + \bar\gamma.$$

5. РЕЗУЛЬТАТ КЛАССИФИКАЦИИ

Ниже приводится полный список интегрируемых уравнений (2.1) с точностью до точечных преобразований:

1. $$u_y = q_0(x, y) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) q_i(y, v),$$
$$v_x = 0,$$
$$\bar\omega = \bar\omega(x, y, u_y),$$
$$\omega = u_n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i(x) u_i + \alpha(x, y),$$
где
$$c_i = \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta},$$
$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial^n q_0}{\partial x^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta} \cdot \frac{\partial^i q_0}{\partial x^i} = 0,$$
$$\Delta = \det\left(\alpha_j^{(i)}\right),$$
$$j = 1, 2, \ldots, n, \ i = 0, 1, \ldots, n-1,$$
а Δ_i получается из Δ заменой i-го столбца на столбец $(-\alpha_1^{(n)}, -\alpha_2^{(n)}, \ldots, -\alpha_n^{(n)})^{\mathrm{T}}$;

2. $$u_y = \alpha_0(y, v) + \alpha_1(y, v) u + \alpha_2(y, v) u^2,$$
$$v_x = 0,$$
$$\bar\omega = \bar\omega(y, u, u_y),$$
$$\omega = \frac{u_3}{u_1} - \frac{3}{2}\frac{u_2^2}{u_1^2},$$
где α_0, α_1, α_2 — произвольные функции;

3. $$u_{xy} = e^u,$$
$$\omega = u_2 - \frac{1}{2}u_1^2,$$
$$\bar\omega = \bar u_2 - \frac{1}{2}\bar u_1^2;$$

4. $$u_{xy} = e^u\sqrt{u_y^2 - 4},$$
$$\omega = u_2 - \frac{1}{2}u_1^2 - \frac{1}{2}e^{2u},$$
$$\bar\omega = \frac{\bar u_2 - \bar u_1^2 + 4}{\sqrt{\bar u_1^2 - 4}};$$

5. $$u_{xy} = u_x u_y \left(\frac{1}{u - x} + \frac{1}{u - y}\right),$$
$$\omega = \frac{u_2}{u_1} + \frac{1 - 2u_1}{u - x},$$
$$\bar\omega = \frac{\bar u_2}{\bar u_1} + \frac{1 - 2\bar u_1}{u - y};$$

6. $$u_{xy} = f(u) b(u_x) \bar b(u_y),$$
$$(\ln f)'' - f^2 = 0,$$
$$bb' + u_1 = 0,$$
$$\bar b\bar b' + \bar u_1 = 0,$$
$$\omega = \frac{u_2}{b} + f'\frac{b}{f},$$
$$\bar\omega = \frac{\bar u_2}{\bar b} + f'\frac{\bar b}{f};$$

7. $$u_{xy} = \frac{1}{u} b(u_x) \bar b(u_y),$$
$$bb' + cb + u_1 = 0,$$
$$\bar b\bar b' + c\bar b + \bar u_1 = 0,$$
$$\omega = \frac{u_2}{b} - \frac{b}{u},$$
$$\bar\omega = \frac{\bar u_2}{\bar b} - \frac{\bar b}{u};$$

8. $$u_{xy} = -\frac{2\sqrt{u_x u_y}}{x + y},$$
$$\omega = \frac{u_2}{\sqrt{u_1}} + \frac{2\sqrt{u_1}}{x + y},$$
$$\bar\omega = \frac{\bar u_2}{\sqrt{\bar u_1}} + \frac{2\sqrt{\bar u_1}}{x + y};$$

9. $$u_{xy} = \frac{1}{(x + y) b(u_1) \bar b(\bar u_1)},$$
$$b' = b^3 + b^2,$$
$$\bar b' = \bar b^3 + \bar b^2,$$
$$\omega = b u_2 + \frac{1}{b(x + y)},$$
$$\bar\omega = \bar b\bar u_2 + \frac{1}{\bar b(x + y)}.$$

10. $$u_{xy} = A(x, y)\sqrt{u_x u_y},$$

где $A(x, y)$ — решение уравнения

$$h_{n-1} = 0, \quad n \geq 1,$$

левая часть которого определяется по рекуррентной формуле

$$h_{k+1} = 2h_k - h_{k-1} - D\bar{D} \ln h_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-2,$$

$$h_0 = \frac{1}{4}A^2,$$

$$h_{-1} = \frac{1}{4}A^2 - D\bar{D} \ln A,$$

$$\omega = (1/A)[D - D(\ln h_1 h_2 \cdots h_{n-1})] \times \times [D - D(\ln h_1 h_2 \cdots h_{n-2})] \times \cdots \cdots \times [D - D(\ln h_1)] A\sqrt{u_1},$$

а $\bar{\omega}$ получается из ω заменой D на $\bar{D}$ и u_1 на $\bar{u}_1$;

11. $u_{xy} = \frac{1}{u} b(u_x)\bar{b}(u_y),$

$$bb' + b - 2u_1 = 0,$$

$$\bar{b}\bar{b}' + \bar{b} - 2\bar{u}_1 = 0,$$

$$\omega = \frac{u_3}{b} + \frac{2(b - u_1)}{b^3}u_2^2 + \frac{2(2u_1 + b)}{ub}u_2 + \frac{b(u_1 + b)}{u^2},$$

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{u}_3}{\bar{b}} + \frac{2(\bar{b} - \bar{u}_1)}{\bar{b}^3}\bar{u}_2^2 + \frac{2(2\bar{u}_1 + \bar{b})}{u\bar{b}}\bar{u}_2 + \frac{\bar{b}(\bar{u}_1 + \bar{b})}{u^2};$$

12. $u_{xy} = \frac{1}{A_{u_1}\bar{A}_{\bar{u}_1}}\left[A\bar{A}\left(\frac{1}{6u + x} + \frac{1}{6u + y}\right) - \frac{1}{6u + y}A - \frac{1}{6u + x}\bar{A}\right],$

$$\frac{1}{3}A^3 - \frac{1}{2}A^2 = u_1,$$

$$\frac{1}{3}\bar{A}^3 - \frac{1}{2}\bar{A}^2 = \bar{u}_1,$$

$$\omega = D\left\{\ln\left[u_2 - \frac{A^4(A-1)^2}{6u + y} - \frac{A^2(A-1)^4}{6u + x}\right] - \ln A(A-1)\right\} - \left[\left(\frac{1}{6u + y} + \frac{1}{6u + x}\right)A - \frac{1}{6u + x}\right]A(A-1),$$

$$\bar{\omega} = \bar{D}\left\{\ln\left[\bar{u}_2 - \frac{\bar{A}^4(\bar{A}-1)^2}{6u + x} - \frac{\bar{A}^2(\bar{A}-1)^4}{6u + y}\right] - \ln \bar{A}(\bar{A}-1)\right\} - \left[\left(\frac{1}{6u + y} + \frac{1}{6u + x}\right)A - \frac{1}{6u + x}\right]A(A-1).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Совместно с В. В. Соколовым нами получены явные формулы для высших симметрий (см. [17], [18]), показано, что интегралы уравнений (2.1) задают дифференциальные подстановки типа преобразования Миуры из уравнения Ли–Беклунда в некое эволюционное уравнение, предложен новый метод построения общих решений интегрируемых уравнений.

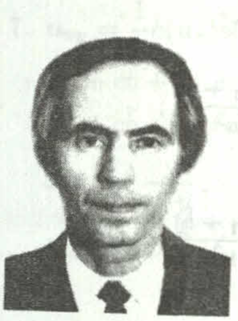
Так, решения уравнений под номерами 11 и 12 пункта 5 приведены в [23, 24].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Darboux G.** Lecons sur la theorie general des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal. Gauthier–Villars, 1896.
2. **Goursat E.** Lecons sur J'integration des equations aux derivees partielles du second ordre a deuc variables independantes. Paris: Hermann, 1896 (Tome I), 1898 (Tome II).
3. **Vessiot E.** Sur les equations aux derivees partielles du second ordre, $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, integrables par la methode de Darboux // J. Math. Pure Appl. 18; 21 (1939; 1942), 1–61; 1–66.
4. **Трикоми Ф.** Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957. 443 с.
5. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
6. **Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.** Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
7. **Шабат А. Б., Ямилов Р. И.** Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана: Препринт. Уфа: БФАН СССР, 1981. 23 с.
8. **Anderson J. M., Kamran N.** The Variational Bicomplex for Second Order Scalar Partial Differential Equations in the Plane. Centre de Recherches Mathematiques, Universite de Montreal, 1994.
9. **Жибер А. В.** Симметрии и интегралы нелинейных дифференциальных уравнений. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Екб.: ИМиМ УрОРАН, 1994. 236 с.
10. **Старцев С. Я.** Инварианты Лапласа интегрируемых гиперболических уравнений и дифференциальные подстановки типа преобразования Миуры. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Уфа: ИМсВЦ УНЦ РАН, 1997. 105 с.
11. **Жибер А. В., Шабат А. Б.** Уравнения Клейна–Гордона с нетривиальной группой // ДАН СССР. 1979. Т. 247, № 5. С. 1103–1107.

12. **Жибер А. В., Шабат А. Б.** Системы уравнений $u_x = p(u, v)$, $v_y = q(u, v)$, обладающие симметрями // ДАН СССР. 1984. Т. 277, № 1. С. 29–33.
13. **Hlavaty L.** On the Painleve classification of partial differential equations // J. of Math. Phys. 1990. V. 31, No 3. P. 605–609.
14. **Rabello M. L., Tenenblat K.** On equation of type $u_{xt} = f(u, u_x)$ which describe pseudospherical surfaces // J. of Math. Phys. 1990. V. 31, No 6. P. 1400–1407.
15. **Звягин М. Ю.** Уравнения второго порядка, приводимые преобразованием Беклунда к $z_{xy} = 0$. // ДАН СССР. 1991. Т. 316, № 1. С. 36–40.
16. **Жибер А. В.** Квазилинейные гиперболические уравнения с бесконечномерной алгеброй симметрий // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 38, № 4. 1994. С. 33–54.
17. **Жибер А. В., Соколов В. В.** Метод каскадного интегрирования Лапласа и уравнения, интегрируемые по Дарбу. Уфа: БГУ, 1996. 56 с.
18. **Жибер А. В., Соколов В. В., Старцев С. Я.** О нелинейных гиперболических уравнениях, интегрируемых по Дарбу // ДАН РАН. Т. 343, № 6. 1995. С. 746–748.
19. **Sokolov V. V., Zhiber A. V.** On the Darboux integrable hyperbolic equation // Physic Letters A. 1995. V. 208. P. 303–308.
20. **Жибер А. В., Соколов В. В.** Преобразования Лапласа в классификации интегрируемых квазилинейных уравнений // Проблемы механики и управления. Уфа: УНЦ РАН, 1996. № 2. С. 111–119.
21. **Жибер А. В.** Интегрируемые нелинейные гиперболические уравнения с нулевым инвариантом Лапласа // Моделирование, вычисление, проектирование в условиях неопределенности – 2000. Уравнения математической физики: Тр. междунар. науч. конф. Уфа, 2000. С. 204–216.
22. **Жибер А. В.** Симметрии и интегралы уравнений типа Лиувилля // Физика конденсированных сред: Тр. Всерос. конф. 1997. Т. 1. С. 45–48.
23. **Жибер А. В., Соколов В. В.** Новый пример гиперболического нелинейного уравнения, обладающего интегралами // ТМФ. Т. 120, № 1. 1999. С. 20–26.
24. **Жибер А. В.** Представление решения уравнения $u_{xy} = \frac{1}{u} b(u_x) b(u_y)$, обладающего интегралами третьего порядка // Симметрия и дифференциальные уравнения: Тр. междунар. конф. Красноярск: СО РАН, ИВМ, 2000. С. 95–97.

ОБ АВТОРЕ



Жибер Анатолий Васильевич, профессор, ведущий научный сотрудник ИМ УНЦ РАН. Дипл. математик (Новосиб. гос. ун-т, 1969). Д-р физ.-мат. наук по дифференциальным уравнениям (защ. в ИМиМ УрОРАН, Екб., 1994). Исследования в области современного группового анализа дифференциальных уравнений.