Уфа: УГАТУ *Вестник УГАТУ* 2001. № 2 (4). С. 45–50

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • ФИЗИКА И МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

# РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ И ФОРМУЛЫ СВЯЗИ ДЛЯ ПЯТОГО ТРАНСЦЕНДЕНТА ПЕНЛЕВЕ

В. Ю. НОВОКШЕНОВ

Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН
Тел: (3472) 22 59 36 E-mail: novik@imat.rb.ru

Формулы связи для пятого трансцендента Пенлеве применяются для вычисления детерминанта Фредгольма для ядра $\sin\pi(x-y)/\pi(x-y)$ на конечном интервале $(t,-t)$. Через детерминант Фредгольма, в свою очередь, выражаются функции распределения гауссовского унитарного ансамбля, возникающие в теории случайных матриц, а также корреляторы одномерной XY-модели Изинга. Асимптотики этих функций при большом $t$ можно получить из некоторого нелинейного ОДУ второго порядка с известными начальными условиями при $t=0$. Преобразованием Беклунда это ОДУ приводится к пятому уравнению Пенлеве (PV), в то время как метод изомонодромных деформаций (IDM) обеспечивает явные формулы связи для решения PV. Результат обобщает известное асимптотическое разложение Ф. Дайсона для одноуровневой функции распределения на случай произвольного числа уровней

*Случайные матрицы; уравнения Пенлеве; корреляционные функции; детерминант Фредгольма; метод изомонодромных деформаций*

## ВВЕДЕНИЕ

С начала 1950-х годов после работ Юджина Вигнера теория случайных матриц служит для вычисления статистики спектров тяжелых атомных ядер и описания хаотических систем в классической механике. В этой теории основным объектом выступает величина $E_\beta(n,t)$ — вероятность того, что случайно выбранный интервал длины $2t$ содержит точно $n$ собственных значений заданного семейства случайных матриц [1]. Здесь $\beta$ нумерует семейство ортогональных, эрмитовых или симплектических случайных матриц, соответствующих значениям 1, 2 и 4. Подход, излагаемый ниже, применим для любого из этих объектов, отличаясь лишь незначительными деталями. Поэтому для краткости сосредоточимся на наиболее интересном случае эрмитовых матриц.

Случайные эрмитовы матрицы определяются как набор всех комплекснозначных $N\times N$-матриц $M$, таких что $M=M^*$ и совместная плотность распределения их матричных элементов имеет вид

$$P(M)\,dM = Z^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}M^2\right)dM,$$

где $Z^{-1}$ — нормировочный множитель, а

$$dM=\prod_{j=1}^{N}dM_{jj}\prod_{j<k}d\operatorname{Re}M_{jk}\,d\operatorname{Im}M_{jk}.$$

Это семейство называется также *гауссовским унитарным ансамблем*, поскольку плотность инвариантна относительно унитарных преобразований: $M\mapsto UMU^*$, $\quad U\in\mathbf{U}(N)$.

Существенный интерес в теории случайных матриц представляет вычисление этих вероятностей, когда $n=N$, интервал имеет вид $(-t,t)$, а его длина стремится к бесконечности. Основным инструментом здесь служит аналитическое представление $E_\beta(n,t)$ в терминах детерминанта Фредгольма [2, 4, 15]. Так, для гауссовского унитарного ансамбля

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 99-01-00431

имеют место формулы:

$$E_2(n,t) = \frac{1}{n!}\left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)^n F(z,t)\big|_{z=1}, \qquad (1)$$

$$F(z,t) = \prod_{i=0}^{\infty}\left[1 - z\lambda_i(t)\right], \qquad (2)$$

где $\lambda_i(t)$ есть собственные значения интегрального уравнения

$$\lambda f(x) = \int_{-t}^{t} K(x,y) f(y)dy \qquad (3)$$

с ядром

$$K(x,y) = \frac{\sin\pi(x-y)}{x-y}. \qquad (4)$$

Удобно (см. [1]) ввести другие два Фредгольмовых детерминанта, $F_{\pm}(z,t)$, соответствующих уравнению (3) с ядрами

$$K_{\pm}(x,y) = \frac{1}{2}\left[K(x,y) \pm K(-x,y)\right], \qquad (5)$$

и перейти от переменных $t$ и $z$ к новым переменным:

$$\tau = \pi t, \qquad \zeta = \frac{2z}{\pi}. \qquad (6)$$

Теперь можно определить главные объекты теории, служащие для вычисления вероятностей $E_2(n,t)$:

$$\mathcal{A}(\zeta,\tau) = -\tfrac{\partial}{\partial\tau}\left\{\log\mathcal{F}_{+}(\zeta,\tau) + \log\mathcal{F}_{-}(\zeta,\tau)\right\},$$
$$\mathcal{B}(\zeta,\tau) = -\tfrac{\partial}{\partial\tau}\left\{\log\mathcal{F}_{+}(\zeta,\tau) - \log\mathcal{F}_{-}(\zeta,\tau)\right\}, \qquad (7)$$

где $\mathcal{F}_{\pm}(\zeta,\tau) = F_{\pm}(z,t)$. Ясно, что

$$E_2(n,t) = \frac{1}{2}[E_{+}(n,t) + E_{-}(n,t)],$$
$$E_{\pm}(n,t) = \frac{1}{n!}\left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)^n F_{\pm}(z,t)\big|_{z=1}.$$

Величины $\mathcal{F}_{\pm}(\zeta,\tau)$ служат производящими функциями также для ортогонального $E_1(n,t)$ и симплектического $E_4(n,t)$ семейств случайных матриц [1]. Например, $E_4(n,t) = \frac{1}{2}[E_{+}(n,2t) + E_{-}(n,2t)]$.

Функции (7) удовлетворяют нелинейным ОДУ второго порядка [4]:

$$(\tau\mathcal{A}_{\tau\tau} + 2\mathcal{A}_{\tau})^2 + 16\tau^2\mathcal{A}_{\tau}^2 - 4\mathcal{A}_{\tau}(\tau\mathcal{A}_{\tau} + \mathcal{A})^2 = 0, \qquad (8)$$

$$(\tau\mathcal{B}_{\tau\tau} + 2\mathcal{B} + 4\tau\mathcal{B})^2 - 4\mathcal{B}^2\left\{(\tau\mathcal{B}_{\tau} + \mathcal{B})^2 + 4\tau^2\mathcal{B}^2\right\} = 0. \qquad (9)$$

Начальные условия при $\tau = 0$ возникают из асимптотик $\mathcal{F}_{\pm}(\zeta,\tau)$ в нуле [1], которые легко получаются из интегрального представления (3)

$$\mathcal{F}_{\pm}(\zeta,\tau) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta\tau)^n}{n!}\sum_{j=1}^{\infty} a_{jn}(-4\tau^2)^j,$$

так что при $\tau \to 0$ имеем

$$\mathcal{A}(\zeta,\tau) = \zeta + \zeta^2\tau + \zeta^3\tau^2 + \left(\zeta^4 - \frac{4}{9}\zeta^2\right)\tau^3 + O(\tau^4), \qquad (10)$$

$$\mathcal{B}(\zeta,\tau) = \zeta + \zeta^2\tau + \left(\zeta^3 - \frac{2}{3}\zeta\right)\tau^2 + \left(\zeta^4 - \frac{4}{9}\zeta^2\right)\tau^3 + O(\tau^4). \qquad (11)$$

Сравнительно давно было замечено (см. [3,12]), что уравнения (8), (9) могут быть преобразованы в уравнения Пенлеве пятого типа (см. ниже п. 1). Этот факт позволяет надеяться вычислить асимптотики $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ при $\tau \to \infty$, используя известные формулы связи для пятого трансцендента Пенлеве [8,10,13]. К сожалению, начальные условия (10), (11) не соответствуют явным формулам связи, известным в теории уравнений Пенлеве. Тем не менее метод изомонодромных деформаций (IDM), развитый в [8], вполне может быть применен и для нашего случая, и асимптотика необходимых трансцендентов Пенлеве будет вычислена в п. 2.

Отметим в заключение некоторые попытки вычисления асимптотик $E_{\beta}(z,t)$, сделанные ранее без использования формул связи для уравнений (8) и (9). Для малых $n$ асимптотика $E_2(z,t)$ была получена в [7] с помощью алгебраических свойств детерминантов Теплица. Тейлоровские разложения в ряд для $\mathcal{A},\mathcal{B}$ по степеням $(\zeta - 2/\pi)e^{2\tau}/\sqrt{\tau}$ были найдены в [5]. Для критического значения $\zeta = 2/\pi$ детерминант Фредгольма возникает в термодинамическом пределе в модели одномерного кулоновского газа. Этот путь привел Ф. Дайсона [6] к замечательной формуле при $\tau \gg 1$:

$$\mathcal{F}_{\pm}\left(\frac{2}{\pi},\tau\right) = -\frac{\tau^2}{4} \mp \frac{\tau}{2} - \frac{1}{8}\log\left(\tau \pm \frac{1}{2}\right) + c_{\pm} + O(\tau^3), \qquad (12)$$

где $c_{\pm} = \left(\frac{1}{24} \pm \frac{1}{4}\right) \log 2 + \frac{3}{2}\zeta'(-1)$, $\zeta(\lambda)$ — дзета-функция Римана.

Подобный результат был получен в [14] для одноточечного коррелятора плотности $\rho(x)$ одномерного Бозе-газа, описываемого квантовым нелинейным уравнением Шредингера при $c = \infty$ (Бозе-газ с твердой сердцевиной):

$$i\phi_t = -\frac{1}{2}\phi_{xx} + c\phi^*\phi^2,$$

$$\rho(x) = \langle \Psi | \phi^*(0)\phi(x) | \Psi \rangle = \rho_0 \exp \int_0^x \frac{\sigma(t)}{t}\, dt.$$

Так как плотность $\sigma(t)$ удовлетворяет уравнению (9), асимптотика $\rho(x)$ для большого $x$ может быть воспроизведена из результатов п. 2.

## 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ К PV И МЕТОД ИЗОМОНОДРОМНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Пусть $y_{\mathcal{A}}(\tau), y_{\mathcal{B}}(\tau)$ — решения пятого уравнения Пенлеве

$$y_{\tau\tau} = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right) y_\tau^2 - \frac{y_\tau}{\tau} + \frac{(y-1)^2}{\tau^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \frac{\gamma y}{\tau} + \frac{\delta y\,(y+1)}{y-1}. \qquad (13)$$

Полагая $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = -4i$, $\delta = 8$ и выполняя преобразование Беклунда (см. [5])

$$\mathcal{A} = -\tau \frac{y_\tau^2 + 16y^2}{4y(y-1)^2}, \qquad (14)$$

получим уравнение (8) на функцию $\mathcal{A}$.

Начальное условие (10) преобразовывается при этом в

$$y_{\mathcal{A}} = 1 - 4i\tau + 4(i\zeta - 2)\tau^2 + O(\tau^3). \qquad (15)$$

Выполняя преобразование Беклунда

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2\sqrt{2\tau}} \frac{y - 1 - 2\tau y_\tau}{y(y-1)}, \qquad (16)$$

получаем уравнение (9) с параметрами $\alpha = 0, \beta = -1/8, \gamma = 1, \delta = 0$. Начальное условие (11) теперь имеет вид

$$y_{\mathcal{B}} = 1 - \frac{\sqrt{2\tau}}{\zeta} + 4\tau - \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\tau^{3/2} + O(\tau^2). \qquad (17)$$

Отметим также автопреобразование Беклунда, действующее на решения $y(\tau|\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ и $\tilde{y}(\tau|\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma},\tilde{\delta})$ уравнения (13) с двумя заданными множествами коэффициентов, $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (0,-1/8,-1,0)$ и $(\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma},\tilde{\delta}) = (0,0,-4i,8)$:

$$y(\sqrt{2\tau}) = \frac{\tilde{y}'(\tau) - 4\sqrt{\tilde{y}(\tau)}(\tilde{y}(\tau)+1)}{\tilde{y}'(\tau) - 8\tilde{y}(\tau)}. \qquad (18)$$

Начальные условия (15) и ( 17) не преобразуются друг в друга отображением (18).

Напомним теперь основные формулы метода изомонодромных деформаций, необходимые для интегрирования уравнения Пенлеве (13). Из-за специального выбора параметров $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$ „уравнение по $\lambda$" пары Лакса для (13) может быть выбрано в более простом по сравнению с общим случаем виде (см. [8, 11])

$$\Psi_\lambda = \left\{ -\frac{i\tau^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 1/4 & B_1 \\ C_1 & -1/4 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda^2}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ B_2 & -A_2 \end{pmatrix} \right\}\Psi, \qquad (19)$$

где

$$A_2 = \frac{i}{8}\frac{1+y}{1-y}, \quad B_2 = \frac{\sqrt{y}}{4(1-y)}, \quad B_1 + C_1 = \frac{i}{2\sqrt{y}}, \quad B_1 - C_1 = \frac{y_\tau}{\sqrt{2y}(y-1)}. \qquad (20)$$

Определим две пары канонических решений, $\Psi_k^\infty$ и $\Psi_k^0$, заданных в полуплоскостях $-2\pi + \pi k < \arg\lambda < \pi k$, $k = 1, 2$ и нормализованных на лучах $\arg\lambda = \pi k$ асимптотиками

$$\Psi_k^\infty(\lambda,\tau) \to \left(-\frac{\tau\lambda}{2}\right)^{\frac{\sigma_3}{4}} \exp\left\{i\tau^2\lambda\sigma_3 + J(\tau)\sigma_3\right\}, \quad \lambda \to \infty, \qquad (21)$$

$$\Psi_k^0(\lambda,\tau) \to \frac{i\sigma_3\sqrt{y} + \sigma_1}{\sqrt{y-1}}\left(-\frac{\tau\lambda}{2}\right)^{\frac{\sigma_3}{4}} \times \exp\left\{\frac{i\sigma_3}{\lambda} - J(\tau)\sigma_3\right\}, \quad \lambda \to 0, \qquad (22)$$

где $\sigma_i$ — матрицы Паули и $J(\tau) = \int_{-\infty}^{-\tau^2/2} (8ty(t))^{-1}\, dt$.

Данные монодромии для уравнения (19) состоят из множителей Стокса $S_k$

$$\begin{aligned}
&\Psi_2^\infty(\lambda,\tau) = \Psi_1^\infty(\lambda,\tau)S_1,\\
&\Psi_1^\infty(\lambda e^{-2\pi i},\tau) = \Psi_2^\infty(\lambda,\tau)iS_2,\\
&\Psi_2^0(\lambda,\tau) = \Psi_1^0(\lambda,\tau)S_3,\\
&\Psi_2^0(\lambda e^{-2\pi i},\tau) = \Psi_1^0(\lambda,\tau)iS_4
\end{aligned} \tag{23}$$

и матриц связи $Q_k$

$$\begin{aligned}
&\Psi_1^\infty(\lambda,\tau) = \Psi_1^0(\lambda,\tau)Q_1,\\
&\Psi_2^\infty(\lambda,\tau) = \Psi_2^0(\lambda,\tau)Q_2.
\end{aligned} \tag{24}$$

Фактически данные монодромии $S_k$, $Q_k$ имеют только два независимых комплекснозначных скалярных параметра, так как справедливы следующие соотношения (детали см. в [8, 11]):

$$S_3Q_2 = Q_1S_1, \quad S_4Q_1 = Q_2S_2.$$

Данные монодромии *постоянны по* $\tau$ тогда и только тогда, когда $y(\tau)$ удовлетворяет уравнению Пенлеве (13), так что нетривиальные параметры $S_k$, $Q_k$ есть *интегралы движения* уравнения (13). Они могут использоваться для подходящей параметризации решения $y(\tau)$ [8].

## 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ТРАНСЦЕНДЕНТОВ ПЕНЛЕВЕ

### 2.1. Формулы связи для $y_{\mathcal{A}}(\tau)$

Сначала мы найдем асимптотику $y_{\mathcal{A}}(\tau)$ при $\tau \to \infty$. Численный анализ показывает, что для большинства $\zeta$ эта асимптотика не отвечает трансцендентам PV общего вида [10], т. е. не стремится к $-1$, но осциллирует с периодом, близким к $4\pi$. Таким образом, решение $y_{\mathcal{A}}(\tau)$ с начальными условиями (15) относится к сепаратрисному подмногообразию решений, подобному рассмотренному ранее Б. И. Сулеймановым [8. Приложение 1]. Будем искать его асимптотику в виде

$$y_{\mathcal{A}}(\tau) = \exp\left\{2i\left(\varphi(\tau) + \frac{\varkappa}{4\tau}\sin\varphi(\tau) + O(\tau^{-1})\right)\right\}, \quad \tau \to +\infty, \tag{25}$$

где $\varphi(\tau) = \pm 2\tau + \varkappa\log(2\tau) + \tau_0$.

Процедура IDM, изложенная выше в п. 1, предполагает вычисление данных монодромии $S_k$, $Q_k$ дважды — по начальному условию (10) и по асимптотике (25). Приравнивая затем полученные выражения нетривиальных данных монодромии, можно найти формулы связи для параметров $\varkappa$, $\tau_0$ и $\zeta$. Все шаги асимптотического анализа „уравнения по $\lambda$“ хорошо известны (см. [8, 10, 11]), поэтому дадим только краткий эскиз этой процедуры.

В пределе $\tau \to 0$ первый член „уравнения по $\lambda$“ (19) исчезает, а оставшаяся часть сводится к специальному случаю гипергеометрического уравнения, так что его решения могут быть выражены через спецфункции (функции Уиттекера):

$$\Psi_k^0(\lambda,\tau) = \frac{i\sigma_3\sqrt{y}+\sigma_1}{\sqrt{y-1}\sqrt{\lambda}} \times \begin{pmatrix} W\left(\frac14,\frac14+\frac{\zeta\tau}{2},-\frac{i}{4\lambda}\right) & \frac{i\zeta\tau}{2}W\left(-\frac14,\frac14+\frac{\zeta\tau}{2},\frac{i}{4\lambda}\right) \\ -\frac{i}{2}W\left(-\frac34,\frac14+\frac{\zeta\tau}{2},-\frac{i}{4\lambda}\right) & W\left(\frac34,\frac14+\frac{\zeta\tau}{2},\frac{i}{4\lambda}\right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1^k & 0 \\ 0 & c_2^k \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$\Psi_k^\infty = \frac{i\sqrt{2}}{\tau\sqrt{\lambda}} \times \begin{pmatrix} W\left(\frac34,\frac14+\frac{\zeta\tau}{2},-i\lambda\tau^2\right) & -\frac{i\zeta\tau}{2}W\left(-\frac34,\frac14+\frac{\zeta\tau}{2},i\lambda\tau^2\right) \\ \frac{i}{2}W\left(-\frac14,\frac14+\frac{\zeta\tau}{2},-i\lambda\tau^2\right) & W\left(\frac14,\frac14+\frac{\zeta\tau}{2},i\lambda\tau^2\right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_1^k & 0 \\ 0 & d_2^k \end{pmatrix}, \tag{27}$$

где константы $c_j^k$, $d_j^k$ выбраны так, чтобы удовлетворить условиям нормировки (22) и (21).

Таким образом, данные монодромии при $\tau \to 0$ могут быть вычислены явно при помощи формул умножения для функций Уиттекера [9]. Нам достаточно здесь проследить за первым столбцом матрицы связи $Q_1$:

$$Q_1^{21} = i2^{-3/4}\sqrt{\frac{\pi\zeta}{2}}, \tag{28}$$

$$Q_1^{11} = 2^{-1/4}e^{-\frac{3\pi i}{4}}\sqrt{\tau}\exp\left\{\frac14\int_{-\infty}^{-\tau^2/2}\frac{dt}{ty(t)}\right\}, \quad \tau \to 0. \tag{29}$$

Теперь оценим матрицу связи в пределе $\tau \to +\infty$. Как известно [11], для этого случая $\Psi$-функции допускают ВКБ-аппроксимацию:

$$\Psi_k^0 = i\sigma_3\hat{\Psi}(\xi,\tau)\exp\left\{\sigma_3\left(\frac{i\pi}{8}+\frac38\log 2\right)\right\} \times (I+o(1)), \quad |\xi|<1, \tag{30}$$

$$\Psi_k^\infty = \hat{\Psi}(\xi,\tau)\exp\left\{\sigma_3\left(J(\tau)-\frac{i\pi}{8}+\frac38\log 2\right)\right\} \times (I+o(1)), \quad |\xi|>1, \tag{31}$$

$$\hat{\Psi}(\xi,\tau) = \\ = \begin{pmatrix} \omega(\xi)e^{i\theta} & \frac{-2i\sqrt{2\varkappa}e^{-i\theta}}{\omega(\xi)(\xi^2-1)\sqrt{2\tau}}\left(\cos\frac{\varphi(\tau)}{2} + i\xi\sin\frac{\varphi(\tau)}{2}\right) \\ \frac{2i\sqrt{2\varkappa}\omega(\xi)e^{i\theta}}{(\xi^2-1)\sqrt{2\tau}}\left(\cos\frac{\varphi(\tau)}{2} - i\xi\sin\frac{\varphi(\tau)}{2}\right) & \omega^{-1}(\xi)e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \quad (32)$$

где $\varkappa \in \mathbb{R}$, $\xi = 2\lambda\tau$, $J(\tau)$ определена формулой (22) и

$$\omega(\xi) = \xi^{1/4}\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{-i\varkappa^2}, \quad \theta = \frac{\tau}{4}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right).$$

Аналитическое продолжение $\Psi^\infty$ в круг $|\xi| < 1$ (или $\Psi^0$ вне круга) выполняется стандартным образом путем сшивки ВКБ-асимптотик (30) и (31) в *точках поворота* $\xi = \pm 1$ (см., например [11]). В результате получаем матрицу связи в виде

$$Q_1^{21} = (2\pi^2)^{1/4}(4\tau)^{\frac{i\varkappa}{2}}\frac{\exp\left(\frac{-i\varphi(\tau)}{2} + i\tau + \frac{\pi\varkappa}{4}\right)}{\sqrt{\varkappa}\Gamma\left(\frac{i\varkappa}{2}\right)}, \\ \tau \to \infty, \quad (33)$$

$$Q_1^{11} = -i\exp\left(\frac{\pi\varkappa}{2}\right). \quad (34)$$

Теперь формулы связи можно получить явно, приравнивая выражения (30), (34) и (28), (32):

$$\varkappa = \frac{1}{\pi}\log\left(1 - \frac{\pi\zeta}{2}\right), \quad \zeta < \frac{2}{\pi}, \\ \tau_0 = -2\arg\Gamma\left(\tfrac{i\varkappa}{2}\right) + \varkappa\log 2 - \pi. \quad (35)$$

Случай $\zeta > 2/\pi$ может быть рассмотрен аналогично (детали см. в [8. Приложение 1]):

$$\varkappa = -\frac{1}{\pi}\log\left(\frac{\pi\zeta}{2} - 1\right), \quad \zeta > \frac{2}{\pi}, \\ \tau_0 = 2\arg\Gamma\left(\frac{i\varkappa}{2} - \frac{1}{2}\right) + \varkappa\log 2 + \frac{\pi}{2}. \quad (36)$$

Нетрудно видеть, что для критического значения $\zeta = 2/\pi$ формулы связи (35), (36) теряют смысл вместе с асимптотикой (25). В этом случае решение $y_{\mathcal{A}}(\tau)$ становится неосциллирующим:

$$y_{\mathcal{A}}(\tau) = -1 + i\tau^{-1} + O(\tau^{-2}), \quad \tau \to \infty. \quad (37)$$

### 2.2. Формулы связи для $y_{\mathcal{B}}(\tau)$

Данные монодромии для $\tau \to 0$ могут быть получены аналогично 2.1, подстановкой анзатца (17) в „уравнение по $\lambda$" (13) и применением снова представления посредством функций Уиттекера (26), (27).

В отличие от $y_{\mathcal{A}}(\tau)$ асимптотическое разложение на бесконечности здесь имеет вид общего решения [10]:

$$y_{\mathcal{B}}(\tau) = \frac{4\varkappa}{\sqrt{2\tau}}\sin\left(2\sqrt{2\tau} + 2\varkappa\log\sqrt{2\tau} + \tau_0\right), \\ \tau \to +\infty. \quad (38)$$

Это дает формулы связи для асимптотик (17) и (38):

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}\log\left|1 - \frac{\pi\zeta}{2}\right|, \quad \zeta \neq \frac{2}{\pi}, \\ \tau_0 = -4\arg\Gamma(i\varkappa) + \pi. \quad (39)$$

Для критического значения $\zeta = 2/\pi$ решение снова $y_{\mathcal{B}}(\tau)$ является неосциллирующим:

$$y_{\mathcal{B}}(\tau) = -1 + \frac{i}{2}\tau^{-1} + O(\tau^{-2}), \quad \tau \to \infty. \quad (40)$$

## 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ФОРМУЛА ДАЙСОНА

Возвращаясь к производящим функциям $\mathcal{A}(\zeta,\tau)$ и $\mathcal{B}(\zeta,\tau)$, подставим асимптотики (25) и (38) в формулы Беклунд-преобразований (14) и (16). Для некритического случая $\zeta \neq 2/\pi$ немедленно получаем

$$\mathcal{A}(\zeta,\tau) = \mp 2\varkappa - \frac{\varkappa^2}{\tau} + O(\tau^{-2}), \quad \zeta \gtrless 2/\pi, \quad (41)$$

$$\mathcal{B}^2(\zeta,\tau) = \frac{2\varkappa^2}{\tau^2} + O(\tau^{-3}) \quad \tau \to +\infty, \quad (42)$$

где $\varkappa$ дается формулами (39).

Для критического значения $\zeta = 2/\pi$ следует использовать асимптотику (37), что дает известные формулы [5, 6], вытекающие из (12):

$$\mathcal{A}\left(\frac{2}{\pi},\tau\right) = \tau + O(\tau^{-1}), \\ \mathcal{B}\left(\frac{2}{\pi},\tau\right) = 1 + O(\tau^{-1}), \\ \tau \to +\infty.$$

Заметим, однако, что нам не удалось воспроизвести саму формулу Дайсона (12), поскольку мы работали с уравнениями по $\tau$, содержащими *производные* от $\mathcal{F}_\pm$. Следовательно, константы $c_\pm$ в (12), содержащие дзета-функцию Римана, ускользают при данном подходе. Появившаяся недавно модификация техники IDM, приспособленная непосредственно к вычислению детерминантов Фредгольма, позволяет надеяться на преодоление этого недостатка [15].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Формулы (41) и (42) в совокупности с (1) и (7) дают ответ для *всех* вероятностей $E_\beta(n,t)$. Дело в том, что асимптотические ряды (41) и (42) легко продолжаются до любой отрицательной степени $\tau$ по начальным членам и уравнениям (8) и (9). Этим наш подход отличается от вычислений $E_2(n,t)$ при малых $n$, выполненных ранее в [14] для температурного автокоррелятора XY-модели Изинга.

Строгое доказательства формулы Дайсона и ее обобщений было предпринято в [15], где вычислялись вероятности попадания собственных значений гауссовского унитарного ансамбля в набор $N$ непересекающихся интервалов $(a_k, b_k)$ полной длины $t$. При этом асимптотика величины вида $E_2(0,t)$ оказалась достаточно сложной, в частности, квазипериодической по $\tau$. Для нее найдено явное выражение в терминах тета-функций Римана, определенных на римановой поверхности с разрезами по отрезкам $(a_k, b_k)$. В случае только одного интервала эти формулы воспроизводят три первых растущих по $\tau$ члена формулы (12), однако конечные константы $c_\pm$ авторам [15] также найти не удалось.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Mehta M. L.** Random Matrices. Second edition. New York: Academic Press, 1990.
2. **Dietz B., Haake F.** Taylor and Pade analysis of the level spacing distributions of random matrix ensembles // Z. Physik. 1990. B 80. P. 153–158.
3. **Jimbo M., Miwa T., Mori Y., Sato M.** Density matrix of an impenetrable Bose gas and the fifth Painleve transcendent // Physica. 1980. D. V. 1. P. 80–158.
4. **Mehta M. L.** A non-linear differential equation and a Fredholm determinant // J. de Phys. I France. 1992. 2. P. 1721–1729.
5. **Mahoux G., Mehta M. L.** Preprint Saclay SPh-T/92-107. 1992.
6. **Dyson F. J.** Fredholm determinants and inverse scattering problems // Comm. Math. Phys. 1976. 47. P. 171–183.
7. **Basor E., Tracy C. A., Widom H.** Asymptotics of level spacing distributions for random matrices // Phys. Rev. Letters. 1992. V. 69. P. 5–8.
8. **Its A. R., Novokshenov V. Yu.** The isomonodromic deformation method in the theory of Painlevé equations // Lect. Notes in Math / B. I. Suleimanov, ibid. Berlin: Springer, 1986. V. 1191. P. 230–260.
9. **Bateman H., Erdélyi A.** Higher Transcendental Functions. NY: McGraw–Hill. V. 2. 1953.
10. **Andreev F. N., Kitaev A. V.** Connection Formulas for Asymptotics of the Fifth Painlevé Transcendent on the Real Axis. Preprint No 277 SFB-288. 1997.
11. **Kitaev A. V.** The method of isomonodromy deformations and the asymptotics of solutions of the “complete” third Painlevé equations // Math. USSR Sbornik. 1989. V. 62. P. 421–444.
12. **McCoy B. M., Perk J. H., Shrock R. E.** Time dependent correlation functions of the transverse Ising chain at the critical magnetic field // Nucl.Phys. 1983. B220. P. 35–47.
13. **McCoy B. M., Tang S.** Connection formulae for Painleve (V) functions // Physica. 1986. 18D. P. 190–196; 1986. 19D. P. 42–72.
14. **Vaidya H. G., Tracy C. A.** One particle reduced density matrix of impenetrable bosons in one dimension at zero temperature // J. Math. Phys. 1979. 20. P. 2291–2312.
15. **Deift P. A., Its A. R., Zhou X.** A Riemann–Hilbert approach to asymptotic problems arising in the theory of random matrix models, and also in the theory of integrable statistical mechanics // Ann. Math. 1997. V. 146. P. 149–235.


## ОБ АВТОРЕ

**Новокшенов Виктор Юрьевич,** профессор, зав. отделом математической физики ИМ УНЦ РАН, профессор кафедры специальных глав математики УГАТУ. Дипл. математик (Уральский гос. ун-т, 1974). Д-р физ.-мат. наук по диф. уравнениям (защ. в Ленингр. отд. МИ им. В. А. Стеклова, 1988). Исследования в области интегрируемых нелинейных уравнений математической физики.