Уфа: УГАТУ, 2002 Вестник УГАТУ Т. 3, № 2. С. 83–90

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • МАТЕМАТИКА

УДК 517.958

В. А. БАЙКОВ, Р. К. ГАЗИЗОВ

ПРИБЛИЖЕННЫЕ СИММЕТРИИ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЗИКЕ

Методы классического группового анализа позволяют выделить среди всех уравнений математической физики уравнения, замечательные по своим свойствам симметрии. Однако учет «малых» поправок в дифференциальном уравнении обычно разрушает допускаемую группу «точного» уравнения, что во многом снижает эффективность теоретико-групповых методов. Введение концепции приближенных групп преобразований позволяет устранить эту проблему. В последние годы нами в УГАТУ систематически развивалась теория приближенных групп преобразований и рассматривались ее многочисленные приложения к конкретным уравнениям, возникающим в задачах математического моделирования. В статье излагаются основные положения теории приближенных групп преобразований и ее алгоритмы, которые иллюстрируются примерами приближенных симметрий и решений дифференциальных уравнений с малым параметром, возникающих в нелинейной физике. *Приближенные группы преобразований; приближенные симметрии дифференциальных уравнений; инвариантные решения*

ВВЕДЕНИЕ

Среди большого числа методов аналитического решения дифференциальных уравнений особое место занимают методы, использующие симметрийные свойства исследуемых уравнений. Основы соответствующей математической дисциплины, называемой сегодня *групповым анализом дифференциальных уравнений*, были заложены в трудах знаменитого норвежского математика Софуса Ли (1862–1899). Одним из впечатляющих достижений С. Ли явилось открытие, что большинство известных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, казавшихся ранее искусственными и лишенными внутренней связи, могут быть выведены единообразно из теории групп преобразований, или, другими словами, из их симметрийных свойств. И хотя подход С. Ли использовался его последователями и даже упоминался во многих классических учебниках по дифференциальным уравнениям, научные исследования в этом направлении приостановились на долгие годы.

Новый этап в развитии группового анализа начался с работ российского математика и механика академика РАН Л. В. Овсянникова, показавшего в своих исследованиях, что знание допускаемой группы дифференциальных уравнений механики и математической физики позволяет проводить их качественное исследование и строить широкие классы точных решений (см., например, [1, 2]). Под его руководством в Новосибирске образовалась школа группового анализа дифференциальных уравнений, из которой вышли многие известные в России и за рубежом математики и механики.

В Уфимском государственном авиационном техническом университете (тогда еще Уфимском авиационном институте) исследования в области симметрийных свойств дифференциальных уравнений начались с приходом в 70-е годы на кафедру высшей математики двух молодых преподавателей, доцентов А. В. Жибера и С. В. Хабирова (в настоящее время оба являются докторами наук, профессорами, широко известными в России и за рубежом математиками). Выходцы из стен Новосибирского государственного университета, яркие представители Новосибирской научной школы группового анализа, они, будучи преподавателями УАИ, не только сами проводили глубокие исследования в этой области, но и внедряли свои методы в научные разработки, проводимые в то время в институте.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01-01-00931).

Новый этап начался с приходом в институт другого представителя Новосибирской школы, одного из ближайших учеников и сотрудников Л. В. Овсянникова профессора Н. Х. Ибрагимова. Будучи заведующим кафедрой прикладной математики (1984–1987), он собрал в УАИ группу молодых исследователей, которые начали работы по развитию новых методов группового анализа дифференциальных уравнений. Под его непосредственным руководством и при его участии развивались такие новые направления, как теория групп Ли–Беклунда и теория нелокальных симметрий дифференциальных уравнений, а в 1987 году начались исследования по теории приближенных симметрий дифференциальных уравнений с малым параметром. В настоящее время приближенные группы преобразований стали хорошо зарекомендовавшим себя аппаратом современнного группового анализа, широко используемым специалистами в области математической физики, механики и прикладной физики.

Сегодня УГАТУ является одним из центров группового анализа, признанным в России и за рубежом. Поэтому не удивительно, что дважды за последние годы (в 1991 и в 2000 годах) регулярные международные конференции MOGRAN (Modern Group Analysis) проводились в Уфе на базе нашего университета. В университете работает Международная лаборатория «Современный групповой анализ», являющаяся филиалом Международного института математического моделирования и группового анализа (директор института и научный руководитель лаборатории лауреат Государственной премии СССР, д-р физ.-мат. наук, проф. Н. Х. Ибрагимов). Сотрудники лаборатории поддерживают тесные научные контакты с учеными университетов Швеции, ЮАР, других стран, которые регулярно приезжают в УГАТУ для совместной научной работы.

В этой статье простейшими примерами иллюстрируются основные положения теории приближенных групп преобразований. Приведены некоторые новые результаты, полученные недавно нами и нашими коллегами в УГАТУ. Изложение проводится с первым порядком точности по малому параметру. Используются обозначения из [3–5]. В частности, приближенное равенство $f \approx g$ означает, что $f = g + o(\varepsilon)$.

1. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Исследование различных физических процессов в первом приближении может проводиться на базе математических моделей, представляющих собой либо линейные, либо простейшие нелинейные дифференциальные уравнения. Как правило, такие уравнения обычно обладают широким классом симметрий, что связано с тем, что эти модели строятся на базе естественных законов сохранения, а законы сохранения, согласно утверждениям типа теоремы Э. Нетер, являются на самом деле другим способом выражения свойств симметрии уравнения. Вместе с тем такие «рафинированные» модели описывают реальный физический процесс лишь в первом приближении. Учет в модели дополнительных факторов (обычно малых) приводит, как правило, к уравнению с худшими симметрийными свойствами (с точки зрения классических симметрий Ли — Ли–Беклунда), что во многом снижает эффективность групповых методов. На актуальность задачи разработки методов группового анализа, позволяющих строить симметрии, устойчивые относительно малых возмущений дифференциальных уравнений, неоднократно указывал Л. В. Овсянников.

Введение в рассмотрение приближенных групп преобразований привело к одному из возможных решений этой задачи.

Методы теории приближенных групп преобразований представляют собой синтез методов классического группового анализа с методами теории возмущений. В отличие от классического группового анализа, где рассматриваются преобразования (или, другими слова, замены переменных), в точности сохраняющие вид уравнения, для уравнений с малым параметром мы дополнительно рассматриваем преобразования, зависящие от малого параметра, и такие, что они сохраняют вид уравнения с точностью, с которой рассматриваемое уравнение описывает изучаемый процесс.

Проиллюстрируем сказанное на простом примере обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = 1 + \varepsilon w^2 \qquad (1)$$

на функцию $w = w(\theta)$ с малым параметром ε, описывающего движение спутника в экваториальной плоскости планеты Земля.

Можно показать, что это уравнение допускает однопараметрическое семейство точечных преобразований вида $\bar\theta = \theta + a$, $\bar w = w$, образующих так называемую группу преобразований переноса относительно параметра a. Наличие такого преобразования позволяет свести уравнение (1) к уравнению первого порядка, которое в данном частном случае оказывается интегрируемым. Вместе с тем в общей ситуации, согласно теории С. Ли, для полного интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка необходимо наличие хотя бы двухпараметрической группы точечных преобразований (или двух точечных симметрий).

Если рассматривать приближенные преобразования, то появляется десять новых приближенных точечных симметрий. В частности, приближенное преобразование

$$\bar\theta \approx \theta + \frac{4}{3}\varepsilon a \sin\theta,$$

$$\bar w \approx w + a\cos\theta + \varepsilon\left[-\frac{1}{6}a^2 + a\theta\sin\theta + \right. \qquad (2)$$

$$\left. +\frac{2}{3}aw\cos\theta - \frac{2}{3}a\cos\theta + \frac{1}{2}a^2\cos 2\theta\right],$$

зависящее от произвольного параметра a, преобразует уравнение (1) в уравнение вида

$$\frac{d^2\bar w}{d\bar\theta^2} + \bar w = 1 + \varepsilon \bar w^2 + o(\varepsilon),$$

т. е. в уравнение, совпадающее с исходным в членах нулевого и первого порядков по ε. В приближенном преобразовании (2) параметр a в действительности является групповым параметром с точки зрения однопараметрических приближенных групп преобразований в том смысле, что групповой закон композиции таких преобразований выполняется приближенно, а именно в нулевом и первом порядке по ε.

Как и в классической теории С. Ли, такие преобразования могут быть использованы, например, для размножения решений. Действительно, уравнение (1) имеет тривиальное (постоянное) приближенное решение

$$w \approx 1 + \varepsilon.$$

После действия преобразования (2) это решение переходит в однопараметрическое семейство приближенных решений

$$\bar w \approx 1 + a\cos\bar\theta +$$

$$+\varepsilon\left[1 + a\bar\theta\sin\bar\theta + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a^2\cos 2\bar\theta\right].$$

Для того чтобы из этого решения получить четырехпараметрическое семейство решений уравнения (1) (общее приближенное решение), следует далее использовать еще три семейства преобразований: точное преобразование переноса $\bar\theta = \theta + \theta_0$, $\bar w = w$ и приближенные преобразования $\bar\theta = \theta$, $\bar w \approx w + \varepsilon b\cos\theta$ и $\bar\theta = \theta$, $\bar w \approx w + \varepsilon c\sin\theta$ с подходящим образом выбранными постоянными θ_0, b и c.

В общем случае в основе классической теории С. Ли лежит рассмотрение *непрерывных групп преобразований*, называемых в настоящее время *группами Ли преобразований*. Такие преобразования определяются как семейства преобразований

$$\bar z^i = f^i(z^1, \ldots, z^N, a^1, \ldots, a^r) \equiv f^i(z, a), \qquad (3)$$

в N-мерном пространстве $\mathbb{R}^N$ точек $z = (z^1, \ldots, z^N) \in \mathbb{R}^N$ в $\bar z = (\bar z^1, \ldots, \bar z^N) \in \mathbb{R}^N$, зависящих от параметров $a = (a^1, \ldots, a^r) \in \mathbb{R}^r$. Эти преобразования определены в окрестности нуля и удовлетворяют следующим аксиомам:

1^0) значению параметра $a = 0$ соответствует тождественное преобразование;

2^0) композиция (произведение) преобразований семейства принадлежит указанному семейству, т. е. существует набор функций $\phi^\alpha(a, b), \alpha = 1, \ldots, r$, таких, что $f^i(f(z, a), b) = f^i(z, \phi(a, b))$.

Функции $\phi^\alpha(a, b)$ задают закон композиции в группе и определяют так называемую *параметрическую группу* в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^r$. Поэтому классические группы Ли преобразований можно интерпретировать как реализацию *локальных параметрических групп Ли* точечными преобразованиями в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^N$, называемом пространством реализации группы.

В теории приближенных групп преобразований мы рассматриваем другую реализацию локальных групп Ли, а именно, *приближенными преобразованиями* в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^N$, т. е. в этом случае рассматриваются семейства приближенных преобразований

$$T_a: \quad \bar z^i \approx f^i(z, a, \varepsilon) \equiv$$

$$\equiv f^i_{(0)}(z, a) + \varepsilon f^i_{(1)}(z, a) + o(\varepsilon) \qquad (4)$$

в $\mathbb{R}^N$, зависящие от конечного числа параметров $a \in \mathbb{R}^r$ и от малого параметра ε, а аксиомы 1^0–2^0 выполняются приближенно.

Основным методом исследования в классической теории групп Ли является инфинитезимальный метод, созданный С. Ли. Этот метод позволяет в значительной мере редуцировать изучение такого сложного объекта, как группа Ли, к изучению чисто алгебраического объекта — алгебры Ли. Аналогичная ситуация имеет место в теории приближенных групп преобразований с заменой обычных алгебр Ли на *приближенные алгебры Ли операторов*. В рассматриваемом случае приближенная группа преобразований определяется r операторами

$$
\begin{aligned}
&X_{\alpha_0} \approx X_{\alpha_0,(0)} + \varepsilon X_{\alpha_0,(1)}, \quad \alpha_0 = 1, \dots, r_0,\\
&X_{\alpha_1} \approx \varepsilon X_{\alpha_1,(0)}, \qquad\qquad \alpha_1 = r_0+1, \dots, r,
\end{aligned} \tag{5}
$$

...азующими базис приближенной алгебры ... Здесь $X_{\alpha,(q)} = \xi^i_{\alpha,(q)}(z)\partial_{z^i}$, $q = 0, 1$. На ...га теоремы Ли для приближен... развито инфинитезимальное ...п е... лиженных одно- и многопара... ических групп преобразований.

...Одним из важных объектов группового ...ализа являются *инварианты* группы преоб...азований. В отличие от классических групп преобразований, для приближенных групп наличие генераторов (5) разных порядков по ε осложняет задачу вычисления общего числа независимых инвариантов и построения формулы общего инварианта. Соответствующие процедуры принимают следующий вид.

Рассмотрим матрицу $\left\|\xi^i_{\alpha_0,(0)}(z)\right\|$, составленную из координат операторов $X_{1,(0)}, \dots, X_{r_0,(0)}$. Будем считать, что ее ранг равен R_0 и базисный минор матрицы образуют первые R_0 строк. Тогда

$$
X_{\beta,(0)} = \sum_{\gamma=1}^{R_0} \omega^\gamma_\beta(z) X_{\gamma,(0)}, \quad \beta = R_0+1, \dots, r_0.
$$

Инварианты $I(z,\varepsilon) \approx I_{(0)}(z) + \varepsilon I_{(1)}(z)$ приближенной группы $\widetilde{G}_r$ определяются как решения системы $X_\alpha I(z,\varepsilon) \approx 0$ уравнений, которая после расщепления по ε приводится к системе

$$
\Omega_{(0)}: \quad X_{\alpha,(0)} I_{(0)}(z) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, r, \tag{6}
$$

однородных уравнений в частных производных первого порядка на функцию $I_{(0)}(z)$ и системе

$$
\begin{aligned}
\Omega_{(1)}: X_{\alpha_0,(0)} I_{(1)}(z) + X_{\alpha_0,(1)} I_{(0)}(z) = 0,\\
\alpha_0 = 1, \dots, r_0,
\end{aligned} \tag{7}
$$

неоднородных уравнений на функцию $I_{(1)}(z)$. В общем случае из условия того, что операторы (5) образуют приближенную алгебру Ли, следует лишь условие полноты системы (7), а система (6) может оказаться не полна и система (7) — несовместна. Выполнение условия совместности системы (6) достигается добавлением к системе $\Omega_{(0)}$ уравнений вида (5) на функцию $I_{(0)}$ с операторами

$$
\begin{aligned}
X_{r+\beta-R_0,(0)} = X_{\beta,(1)} - \omega^\gamma_\beta(z) X_{\gamma,(1)},\\
\beta = R_0+1, \dots, r_0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Пусть проверка полноты полученной системы $\Omega_{(0)}$ приводит к системе $\widetilde{\Omega}_{(0)}$, содержащей r_* уравнений, и ранг матрицы $\left\|\xi^i_{\alpha,(0)}(z)\right\|$, $\alpha = 1, \dots, r_*$, равен R. Тогда приближенная группа $\widetilde{G}_r$ имеет $N-R_0$ функционально независимых инвариантов, причем $N-R$ из них имеют «нулевой» порядок по ε:

$$
\begin{gathered}
I^{k_0}(z,\varepsilon) = I^{k_0}_{(0)}(z) + \varepsilon I^{k_0}_{(1)}(z) + o(\varepsilon),\\
k_0 = 1, \dots, N-R,
\end{gathered}
$$

а остальные — «первый» порядок по ε:

$$
\begin{gathered}
I^{k_1}(z,\varepsilon) = \varepsilon I^{k_1}_{(0)}(z) + o(\varepsilon),\\
k_1 = N-R+1, \dots, N-R_0.
\end{gathered}
$$

Здесь $I^{k_0}_{(0)}(z)$ — независимые частные решения системы $\widetilde{\Omega}_{(0)}$, $I^{k_0}_{(1)}(z)$ — частное решение системы (4) с $I_{(0)}(z) = I^{k_0}_{(0)}(z)$; $I^{k_1}_{(0)}(z)$ — независимые решения однородной системы, соответствующей системе $\Omega_{(1)}$, не являющиеся решениями системы $\widetilde{\Omega}_{(0)}$.

В соответствии с теоремой об общем инварианте приближенной группы преобразований [7] любой инвариант группы $\widetilde{G}_r$ представим в виде

$$
\begin{aligned}
I(z,\varepsilon) = \varphi_{(0)}\left(I^1, \dots, I^{N-R}\right) +\\
+ \varepsilon\varphi_{(1)}\left(I^1_{(0)}, \dots, I^{N-R_0}_{(0)}\right) + o(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

с некоторыми функциями $\varphi_{(0)}$, $\varphi_{(1)}$.

2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Исторически теория групп преобразований разрабатывалась для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, и поэтому по-прежнему одним из основных ее приложений является построение решений дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных. Соответствующие алгоритмы начали разрабатываться еще С. Ли. Краткое введение в современные методы, а также сводка основных результатов по групповому анализу дифференциальных уравнений даны в «Справочнике по групповому анализу дифференциальных уравнений» [6].

Основные методы интегрирования дифференциальных уравнений с использованием допускаемой группы G_r преобразований базируются на теореме об инвариантном представлении уравнений (см., например, [1, 2]). Согласно этой теореме, исследуемые уравнения могут быть записаны в эквивалентной форме, определяемой инвариантными функциями группы G_r.

Недавно аналогичное утверждение было доказано для приближенных групп преобразований (частный случай этой теоремы опубликован в [8]).

Теорема 1. *Пусть уравнения*

$$F^\nu(z,\varepsilon)\equiv F^\nu_{(0)}(z)+\varepsilon F^\nu_{(1)}(z)=o(\varepsilon),\quad \nu=1,\dots,m, \tag{9}$$

инвариантны относительно r-параметрической приближенной группы $\widetilde{G}_r$ преобразований, порождаемой операторами (5), т. е. справедливы соотношения

$$X_\alpha F^\nu(z,\varepsilon)\big|_{(9)}\approx 0,\quad \alpha=1,\dots,r,\quad \nu=1,\dots,m.$$

Если соответствующие невозмущенные уравнения

$$F^\nu_{(0)}(z)=0,\quad \nu=1,\dots,m, \tag{10}$$

определяют регулярно заданное многообразие, являющееся неособым для (точной) группы G_{r_0}, порождаемой операторами $X_{1,(0)},\dots,X_{r_0,(0)}$, т. е. выполняются условия

$$\operatorname{rank}\left\|\partial F^\nu_{(0)}(z)\big/\partial z^i\right\|\Big|_{(10)}=m,\qquad \operatorname{rank}\left\|\xi^i_{\alpha_0,(0)}(z)\right\|\Big|_{(10)}=R_0, \tag{11}$$

то существует система уравнений

$$\Phi^\nu(I,\varepsilon)\equiv \equiv\Phi^\nu_{(0)}\left(I^1(z,\varepsilon),\dots,I^{N-R}(z,\varepsilon)\right)+ +\varepsilon\Phi^\nu_{(1)}\left(I^1_{(0)}(z),\dots,I^{N-R_0}_{(0)}(z)\right)=o(\varepsilon),\quad \nu=1,\dots,m, \tag{12}$$

связывающая инварианты группы $\widetilde{G}_r$, множество решений которой (с точностью $o(\varepsilon)$) совпадает с множеством решений уравнений (9).

Сформулированная теорема может быть использована для обоснования метода построения приближенно инвариантных решений дифференциальных уравнений с малым параметром. Оказывается, при этом происходит редукция размерности пространства независимых переменных задачи.

Для простоты ограничимся рассмотрением системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$F^\nu(x,u,p,\varepsilon)\equiv F^\nu_{(0)}(x,u,p)+ +\varepsilon F^\nu_{(1)}(x,u,p)=o(\varepsilon),\quad \nu=1,\dots,m. \tag{13}$$

Здесь $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^m$, $p^k_i=\partial u^k/\partial x^i$, $N=n+ +m$. Для этой системы опишем алгоритм построения приближенно инвариантных решений. Мы говорим, что решение

$$u^\sigma=\varphi^\sigma_{(0)}(x)+\varepsilon\varphi^\sigma_{(1)}(x)+o(\varepsilon),\quad \sigma=1,\dots,m, \tag{14}$$

является приближенно инвариантным относительно группы $\widetilde{G}_r$, если уравнения (14) приближенно инвариантны относительно этой группы [4].

Пусть система (13) допускает r-параметрическую приближенную группу $\widetilde{G}_r$ преобразований, порождаемую операторами

$$X_{\alpha_0}\approx\left(\xi^i_{\alpha_0,(0)}(x,u)+\varepsilon\xi^i_{\alpha_0,(1)}(x,u)\right)\frac{\partial}{\partial x^i}+ +\left(\eta^\sigma_{\alpha_0,(0)}(x,u)+\varepsilon\eta^\sigma_{\alpha_0,(1)}(x,u)\right)\frac{\partial}{\partial u^k},$$

$$X_{\alpha_1}\approx\varepsilon\xi^i_{\alpha_1,(0)}(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i}+\varepsilon\eta^\sigma_{\alpha_1,(0)}(x,u)\frac{\partial}{\partial u^k},$$

$\alpha_0=1,\dots,r_0$, $\alpha_1=r_0+1,\dots,r$, образующими базис приближенной алгебры Ли, причем

$\operatorname{rank}\left\|\xi^i_{\alpha_0,(0)}\ \eta^\sigma_{\alpha_0,(0)}\right\| = R_0$. Тогда $\widetilde{G}_r$ имеет $N-$ $-R_0$ функционально независимых инвариантов вида

$$I^{k_0}(x,u,\varepsilon) = I^{k_0}_{(0)}(x,u) + \varepsilon I^{k_0}_{(1)}(x,u) + o(\varepsilon),$$
$$k_0 = 1, \ldots, N-R,$$
$$I^{k_1}(x,u,\varepsilon) = \varepsilon I^{k_1}_{(0)}(x,u) + o(\varepsilon),$$
$$k_1 = N-R+1, \ldots, N-R_0. \tag{15}$$

Неособые инвариантные решения системы (13) в соответствии с общей формулой (12) ищутся в виде

$$\Phi^\nu(I,\varepsilon) \equiv$$
$$\equiv \Phi^\nu_{(0)}\left(I^1(x,u,\varepsilon), \ldots, I^{N-R}(x,u,\varepsilon)\right) +$$
$$+\varepsilon\Phi^\nu_{(1)}\left(I^1_{(0)}(x,u), \ldots, I^{N-R_0}_{(0)}(x,u)\right) = o(\varepsilon),$$
$$\nu = 1, \ldots, m, \tag{16}$$

где

$$\operatorname{rank}\left\|\partial\Phi^\nu_{(0)}\Big/\partial I^{k_0}_{(0)}\right\| = m. \tag{17}$$

Для того чтобы из этой системы могли определяться u^σ как функции от $x^1, \ldots, x^n, \varepsilon$, необходимо выполнение условия

$$\operatorname{rank}\left\|\partial I^{k_0}_{(0)}\Big/\partial u^\sigma\right\| = m. \tag{18}$$

Тогда в силу условий (17) и (18) из уравнений

$$D_i\Phi^\nu \approx \sum_{k_0=1}^{N-R}\frac{\partial\Phi^\nu}{\partial I^{k_0}}\left(\frac{\partial I^{k_0}}{\partial x^i} + p^\sigma_i\frac{\partial I^{k_0}}{\partial u^\sigma}\right) +$$
$$+\,\varepsilon\sum_{k_1=N-R+1}^{N-R_0}\frac{\partial\Phi^\nu_{(1)}}{\partial I^{k_1}_{(0)}}\left(\frac{\partial I^{k_1}_{(0)}}{\partial x^i} + p^\sigma_i\frac{\partial I^{k_1}_{(0)}}{\partial u^\sigma}\right) = o(\varepsilon),$$

$i = 1, \ldots, n$, $\nu = 1, \ldots, m$, можно найти выражения для всех производных p^σ_i.

Уравнения (13) инвариантны относительно действия один раз продолженной группы $\widetilde{G}_r$, действующей в пространстве $\widetilde{N} = n+m+$ $+nm$ переменных $x^i, u^\sigma, p^\sigma_i$ и имеющей $\widetilde{N}-$ $-R_0$ функционально независимых дифференциальных инвариантов $\tilde{I}^k(x,u,p,\varepsilon)$. Поэтому в силу теоремы 1 существует эквивалентная (13) система вида

$$\Psi^\nu\left(I^1(x,u,\varepsilon), \ldots, \tilde{I}^{\tilde{N}-R_0}(x,u,p,\varepsilon),\varepsilon\right) = o(\varepsilon),$$
$$\nu = 1, \ldots, m, \tag{19}$$

связывающая дифференциальные инварианты первого порядка группы $\widetilde{G}_r$.

Как и в [1], можно показать, что подстановка найденных p^σ_i в дифференциальный инвариант группы $\widetilde{G}_r$ превращает его в некоторый инвариант группы $\widetilde{G}_r$. Так как система $D_i\Phi^\nu \approx 0$ содержит частные производные Φ^ν по I, то подстановка p^σ_i в уравнения (19) превращает их в систему вида

$$\Omega^\nu(I, \Phi, \partial\Phi/\partial I, \varepsilon) \equiv$$
$$\equiv \Omega^\nu_{(0)}\left(I^{k_0}, \Phi^\sigma, \partial\Phi^\sigma/\partial I^{k_0}\right) +$$
$$+\varepsilon\Omega^\nu_{(1)}\left(I^k_{(0)}, \Phi^\sigma_{(0)}, \partial\Phi^\sigma_{(0)}\Big/\partial I^{k_0}, \partial\Phi^\sigma_{(1)}\Big/\partial I^{k_1}_{(0)}\right) =$$
$$= o(\varepsilon), \qquad \nu = 1, \ldots, m, \tag{20}$$

связывающую инварианты $I^k(x,u,\varepsilon)$, $k = 1, \ldots, N-R_0$, функции инвариантов $\Phi^\sigma(I,\varepsilon)$ и их производные по I (индекс k при переменной I означает зависимость от всех инвариантов (15), индекс k_0 указывает на инварианты нулевого, а k_1 – первого порядка). Кроме того, из способа построения p^σ_i ясно, что производные $\partial\Phi^\sigma_{(1)}\Big/\partial I^{k_1}_{(0)}$ войдут, и притом линейно, только в функции $\Omega^\nu_{(1)}$. Можно показать, что если какое-либо решение (16) системы (20) удовлетворяет условию (17), то функции (14), получаемые решением (16) относительно u, являются решением системы (13), инвариантным относительно группы $\widetilde{G}_r$.

Отметим, что система (20) принимает более простой вид, если функции Φ^ν в (16) записать в виде, разрешенном относительно m функций I^{k_0}. В этом случае искомые функции в нулевом порядке по ε будут зависеть только от $n-R$ независимых переменных, а в первом порядке – от $n-R_0$ независимых переменных, т.е. происходит редукция числа независимых переменных.

3. ПРИМЕРЫ ПРИБЛИЖЕННО ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ

Проиллюстрируем изложенное в предыдущем разделе следующими примерами.

3.1. Рассмотрим нелинейное диффузионное уравнение

$$u_t \approx (\mathrm{e}^u)_{xx} + (\mathrm{e}^u)_{yy} + \varepsilon \mathrm{e}^u (u_x + u_y), \qquad (21)$$

допускающее операторы

$$X_1 \approx t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_2 \approx \left(y + \frac{\varepsilon}{8}(x^2 - y^2 2xy) \right)\frac{\partial}{\partial x} +$$

$$+ \left(-x + \frac{\varepsilon}{8}(x^2 - y^2 + 2xy) \right)\frac{\partial}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2}(x - y)\frac{\partial}{\partial u},$$

которые порождают двухмерную приближенную алгебру Ли. Используя инварианты

$$I^1 \approx (x^2 + y^2)\left(1 + \frac{\varepsilon}{4}(x + y) \right),$$

$$I^2 \approx u + \ln t + \frac{\varepsilon}{2}(x + y)$$

соответствующей группы преобразований, будем искать решение (21) в виде

$$I^2_{(0)} + \varepsilon I^2_{(1)} \approx \Phi_{(0)}\left(I^1_{(0)} + \varepsilon I^1_{(1)} \right) + \varepsilon \Phi_{(1)}\left(I^1_{(0)} \right),$$

откуда, с точностью $o(\varepsilon)$, имеем

$$u \approx -\ln t + \Phi_{(0)}(z) + \varepsilon\left(-\frac{1}{2}(x + y) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}(x + y) z \Phi'_{(0)}(z) + \Phi_{(1)}(z) \right),$$

$z = I^1_{(0)} = x^2 + y^2$. Здесь $R = R_0 = 2$ и, значит, на функции $\Phi_{(0)}(z)$ и $\Phi_{(1)}(z)$ получаем обыкновенные дифференциальные уравнения

$$4\left(z(\mathrm{e}^{\Phi_{(0)}})'\right)' + 1 = 0,$$

$$\left(z(\mathrm{e}^{\Phi_{(0)}}\Phi_{(1)})'\right)' = 0.$$

3.2. Нелинейное диффузионное уравнение

$$u_t \approx (\mathrm{e}^u)_{xx} + (\mathrm{e}^u)_{yy} + \varepsilon \mathrm{e}^u u (u_x + u_y) \qquad (22)$$

допускает операторы

$$X_1 \approx \varepsilon\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \right),$$

$$X_2 \approx t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{8}\left(x^2 + 2xy - y^2\right)\frac{\partial}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{8}\left(y^2 + 2xy - x^2\right)\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\varepsilon}{2}(x + y) - 1 \right)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Выбирая в качестве инвариантов соответствующей приближенной группы преобразований приближенные функции

$$I^1 \approx u + \ln t\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}(x + y) \right),$$

$$I^2 \approx \sqrt{x^2 + y^2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{8}(x + y)\ln t \right),$$

$$I^3 \approx \varepsilon \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

получаем следующий вид:

$$u \approx -\ln t + \Phi_{(0)}(r) + \varepsilon\left(\frac{1}{2}(x + y) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{8}(x + y) r \ln t \Phi'_{(0)}(r) + \Phi_{(1)}(r, \theta) \right),$$

приближенно инвариантного решения уравнения (22), где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. Здесь $R_0 = 1$, $R = 2$ и, значит, на $\Phi_{(0)}(r)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$1 + \mathrm{e}^{\Phi_{(0)}}\left(\frac{1}{r}\Phi'_{(0)} + \Phi''_{(0)} + \Phi'^2_{(0)} \right) = 0$$

и на функцию $\Phi_{(1)}(r, \theta)$ линейное уравнение

$$\mathrm{e}^{\Phi_{(0)}}\left(\Phi_{(1)rr} + \frac{1}{r^2}\Phi_{(1)\theta\theta} + \frac{1}{r}\Phi_{(1)r} + \right.$$

$$\left. + 2\Phi'_{(0)}\Phi_{(1)r} + (\sin\theta + \cos\theta)\Phi_{(0)}\Phi'_{(0)} \right) -$$

$$- \Phi_{(1)} - \frac{r}{2}(\sin\theta + \cos\theta) +$$

$$+ \frac{r^2}{8}(\sin\theta + \cos\theta)\Phi'_{(0)} = 0$$

в частных производных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Овсянников Л. В.** Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд. СО АН СССР, 1962. 240 с.
2. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
3. **Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.** Приближенные симметрии // Матем. сб. 1988. Т. 136, вып. 4. С. 435–45-.
4. **Baikov V. A., Gazizov R. K., Ibragimov N. H.** Approximate transformation groups and deformations of symmetry Lie algebras: Chapter 2 // CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 3. New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods / Edited by N. H. Ibragimov. Boca Raton, Florida: CRC Press, 1996. P. 31–67.
5. **Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.** Приближенные группы преобразований уравнений с малым параметром // Вестник УГАТУ. 2000. № 1. С. 45–52.
6. **CRC** Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations / Ed. N. H. Ibragimov. Boca Raton, Florida, USA: CRC Press, 1994. Vol. 1. Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws; 1995. Vol. 2. Applications in Engineering and Physical Sciences; 1996. Vol. 3. New Trends in Theoretical Development and Computational Methods.
7. **Gazizov R. K.** Representation of General Invariants for Approximate Transformation Groups // J. Math. Analysis and Appl. 1997. Vol. 213. P. 202–228.
8. **Багдерина Ю. Ю., Газизов Р. К.** Инвариантное представление уравнений с малым параметром: случай алгебры симметрий максимального ранга // Акт. проблемы математики. Математические модели современного естествознания: Межвуз. науч. сб. Уфа: УГАТУ, 2001. С. 13–20.

ОБ АВТОРАХ

Байков Виталий Анварович, профессор, зав. кафедрой математики УГАТУ. Дипл. физик (БГУ, 1977). Д-р физ.-мат. наук в области математической физики (ИПМ им. М. В. Келдыша, 1991). Исследования в групповом анализе, нелинейной физике.

Газизов Рафаил Кавыевич, профессор, зав. каф. высокопроизводит. вычислит. технологий и систем УГАТУ. Дипл. математик (БГУ, 1983). Д-р физ.-мат. наук в области дифференциальных уравнений (ИММ Уральск. отд. РАН, 1999). Исследования в групповом анализе дифференциальных уравнений.