Уфа: УГАТУ, 2002 Вестник УГАТУ Т. 3, № 2. С. 91–98

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • МАТЕМАТИКА

УДК 517.5, 519.21

Ф. С. НАСЫРОВ

ЛОКАЛЬНЫЕ ВРЕМЕНА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКОМ И ВЕЩЕСТВЕННОМ АНАЛИЗЕ

Построены симметричные интегралы Стильтьеса по произвольным непрерывным функциям неограниченной вариации, при этом для случайного процесса броуновского движения потраекторные симметричные интегралы совпадают со стохастическими интегралами Стратоновича. Показано, что симметричный интеграл может быть продолжен как интеграл по определенного вида заряду. *Симметричный интеграл; локальное время; стохастический интеграл Стратоновича*

1. ЛОКАЛЬНЫЕ ВРЕМЕНА ФУНКЦИЙ И СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Настоящая статья посвящена построению интегралов типа Стильтьеса по непрерывным функциям неограниченной вариации. В работе, во-первых, для произвольной непрерывной функции, вообще говоря, неограниченной вариации $X(s)$, $s \in [0,+\infty)$, построены симметричные интегралы типа Стильтьеса $\int_0^t f(s,X(s)) * dX(s)$ для определенного класса подынтегральных функций $f(s,u)$, во-вторых, для непрерывных функций $X(s)$ с непрерывными по временному параметру локальными временами построены расширенные симметричные интегралы $\int_0^t f(s) * dX(s)$ как определенного вида продолжение симметричных интегралов.

Тематика статьи восходит к работе Янга [7], где впервые были построены интегралы типа Стильтьеса по функциям неограниченной вариации. В работах [2, 4] исследованы различные варианты такого вида интегралов. В то же время в стохастическом анализе хорошо известны стохастические интегралы Стратоновича, которые не имеют своего «потраекторного» аналога.

В разд. 2 для произвольных непрерывных функций $X(s)$, $s \in [0,1]$, для достаточно узкого класса интеграндов дается определение *симметричного интеграла*, доказываются некоторые варианты формул замены переменных для такого интеграла.

В разд. 3 предложен другой подход к построению симметричного интеграла для непрерывных функций $X(s)$, $s \in [0,+\infty)$, с непрерывными по временному параметру локальными временами $\alpha(t,u)$, $t \in [0,+\infty)$, $u \in R$. Построены *расширенные симметричные интегралы* как определенного вида продолжение симметричных интегралов. Конструкция такого интеграла основана на представлении $f(s) = f^+{}_t(\xi(s),X(s))$, где $\xi(s) = \alpha(s,X(s))$, произвольной суммируемой функции $f(s)$, $s \in [0,t]$, в виде функции двух переменных.

Следует подчеркнуть, что симметричный и расширенный симметричный интегралы — это два разных интеграла (уместно в данной ситуации вспомнить о связи между интегралами Римана и Лебега) и они не всегда обязаны совпадать.

В случае винеровского случайного процесса $X(s) = X(s,\omega)$ симметричный интеграл и стохастический интеграл Стратоновича с вероятностью 1 равны в случае существования обоих интегралов. При этом расширение стохастического интеграла Стратоновича совпадает с расширенным симметричным интегралом.

В настоящем разделе приводится ряд необходимых сведений о локальных временах и непрерывных функциях. Множества $R, [0,t], t > 0$, предполагаются наделенными σ-алгебрами борелевских множеств, которые соответственно обозначаются $B, B_t, t > 0$; на этих подмножествах считается заданной мера Лебега $\lambda(.)$.

Для непрерывной функции $X(s)$, $s \in [0,+\infty)$, положим

$$M(t) = \max\{X(s) : s\in[0,t]\},$$
$$m(t) = \min\{X(s) : s\in[0,t]\},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 01-01-00870.

$$M^{-1}(u) = \inf\{s : M(s) > u\},$$
$$m^{-1}(u) = \inf\{s : m(s) < u\}.$$

Обозначим через $\mathrm{sgn}\,(x)$ знак вещественного числа x, а через $\mathbf{1}(A)$ – индикатор множества A, т.е. функцию, равную 1 на A и 0 вне A; далее всюду $a \wedge b = \min(a,b), a \vee b = \max(a,b)$.

Пусть $X(s)$, $s \in [0,1]$, – борелевская вещественнозначная функция; $\tau(.)$ — мера на σ-алгебре B_1 борелевских множеств отрезка $[0,1]$. Введем меры $\nu_t(\Gamma) = \int_0^t \mathbf{1}(X(s) \in \Gamma)ds$, $\Gamma \in B$, $t \in [0,1]$, тогда $\nu_t(\Gamma)$ есть «количество времени», проводимое функцией $X(s)$, $s \in [0,t]$, в множестве Г. Производная Радона–Никодима $\alpha(t,u) \equiv \alpha_t(x) = \frac{d\nu_t}{d\lambda}(u)$, $u \in R$, если она существует, называется *локальным временем* функции $X(s)$. Оказывается (см. [5]), можно всегда считать, что локальное время измеримо как функция двух переменных и является при каждом x неубывающей непрерывной справа функцией по t; меру на B_1, которую она порождает, мы будем обозначать $\alpha(ds,x)$. Из определения локального времени следует (см. [5]), что для любой ограниченной (или знакопостоянной) борелевской функции $f(s,u)$ справедливо равенство

$$\int_0^t f(s,X(s))\,ds = \int_R \int_0^t f(s,u)\alpha(ds,u)\,du. \quad (1.1)$$

Говорят, что случайный процесс обладает локальным временем, если почти все его траектории имеют локальное время.

Будем говорить, что функция удовлетворяет *«условию* (С)*»*, если *локальное время* $\alpha(t,u)$ *для функции* $X(s)$ *существует и непрерывно по* t *при п. в.* u.

Заметим (см. [1, 3, 5, 6]), что класс функций, обладающих свойством (С), включает в себя типичные траектории определенного класса диффузионныхпроцессов, устойчивых процессов, гауссовских недифференцируемых процессов и, в частности, траектории винеровского процесса.Именно этим обстоятельством объясняется интерес к исследованию функций со свойством (С) с точки зрения теории случайных процессов. Следует отметить тот факт, что локальные времена играют важную роль в теории случайных процессов, ряд сведений о локальных временах можно найти в работах [1, 3, 5, 6].

Приведем ряд сведений о функциях $X(s)$ со свойством (С), которые показывают, что эти функции во многом подобны типичным траекториям винеровского процесса:

а) *при п. в.* τ *множества уровня* $\{s : X(s) = X(\tau)\}$ *несчетны* (см. [5]);

б) *при п. в.* τ $ap - \lim\limits_{s\to\tau} \left|\frac{X(s)-X(\tau)}{s-\tau}\right| = +\infty$, где через $ap - \lim\limits_{s\to\tau}...$ обозначается аппроксимативный предел функции при $s \to \tau$ (см. [5]);

в) *почти все точки* s *не являются точками роста функции* $X(s)$ (см. [5]). Введем функцию $F_U(t,x) = \int_U \mathbf{1}(\alpha(t,u) > x)du$, $t \in [0,1]$, $x \in (0,+\infty)$, $U \in B$, $F(t,x) = F_R(t,x)$, которая является при фиксированных t и U *распределением локального времени*, тогда функция $\alpha^*(t,v) = \inf\{z : F(t,z) \le v\}$ называется *неубывающей перестановкой* локального времени. Пусть $\xi(s) = \alpha(s,X(s)), s \in [0,1]$, – *локальное время вдоль траектории процесса* $X(s), s \in [0,1]$;

г) *распределение локального времени* $F(t,z), t \ge 0, z \ge 0$, *и монотонная перестановка локального времени* $\alpha^*(t,v), t \ge 0, z \ge 0$, *являются локальными временами для функций* $\xi(s) = \alpha(s,X(s))$, *и* $\xi^*(s) = F(s,\xi(s))$ *соответственно. При этом функции* $\xi(s)$ *и* $\xi^*(s)$ *обладают свойством* (С) (см. [3]).

В частности, для $z \ge 0$ справедливо соотношение

$$\int_0^t f(X(s))F(ds,z) = \int_R f(u)\mathbf{1}\big(\alpha(t,u) > z\big)\,du \quad (1.2)$$

для любой суммируемой функции $f(u)$.

2. СИММЕТРИЧНЫЙ ИНТЕГРАЛ КАК ОБОБЩЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ РИМАНА–СТИЛЬТЬЕСА

Пусть $X(s)$, $s \in [0,1]$, — произвольная непрерывная функция. Рассмотрим разбиения T_n, $n \in N$, отрезка $[0,1]$: $T_n = \{t_k^{(n)}\}$, $0 = t_0^{(n)} \le t_1^{(n)} \le ... \le t_k^{(n)} \le ... \le t_{m_n}^{(n)} = 1$, $n \in N$, такие, что $T_n \subset T_{n+1}$, $n \in N$ и $\lambda_n = \max\limits_k \left|t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}\right| \to 0$ при $n \to \infty$. Через $X^{(n)}(s), s \in [0,1]$, обозначим ломаную, отвечающую разбиению T_n. Введем следующие обозначения: $\Delta t_k^{(n)} = t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}$, $\left[\Delta t_k^{(n)}\right] = \left[t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}\right]$, $\Delta X_k^{(n)} = X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)})$.

Определение. *Симметричным интегралом* для функций вида $f(s,X(s))$, где $f(s,u)$ является функцией ограниченной вариации по

s при фиксированных u, и ее полное изменение $|f|(u)$ на $[0,1]$ суммируемо по переменной $u \in R$, называется

$$\int_0^t f(s,X(s)) * dX(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_k \frac{1}{\Delta t_k^{(n)}} \times$$
$$\times \int_{[\Delta t_k^{(n)}]} f(s, X^{(n)}(s))\, ds\, \mathbf{1}(t_k^{(n)} \le t)\, \Delta X_k^{(n)},$$

если предел в правой части равенства существует и не зависит от выбора последовательности разбиений $T_n, n \in N$.

Класс функций, для которых симметричный интеграл существует, определяется в следующей теореме.

Теорема 1.

а) *Пусть* $X(s)$, $s \in [0,1]$, *– произвольная непрерывная функция,* $f(u)$, $u \in R$, *– суммируемая функция,* $h(s)$, $s \in [0,1]$, $h(0) = 0$, *– непрерывная справа функция ограниченной вариации. Тогда симметричный интеграл* $\int_0^t f(X(s))h(s) * dX(s)$ *существует и справедлива формула*

$$\int_0^t f(X(s))h(s) * dX(s) = h(t) \int_{X(0)}^{X(t)} f(v)\, dv -$$
$$- \int_0^t \int_{X(0)}^{X(s)} f(v)\, dv\, h(ds). \quad (2.1)$$

b) *Пусть непрерывная функция* $X(s)$, $s \in [0,1]$, *обладает локальным временем* $\alpha(s,u)$, *непрерывным по переменной* s *при п.в.* u. *Пусть* $f(u,v,x)$, $u,v \in R, x > 0$, *– суммируемая по переменным* $u,v \in R$, $x > 0$ *функция. Тогда симметричный интеграл* $\int_0^t \int_0^s f(X(s), X(p), \xi(p))\, dp * dX(s)$ *существует и справедлива формула*

$$\int_0^t \int_0^s f\big(X(s), X(p), \xi(p)\big)\, dp * dX(s) =$$
$$= \int_0^t \int_{X(0)}^{X(t)} f\big(u, X(p), \xi(p)\big)\, du\, dp -$$
$$- \int_0^t \int_{X(0)}^{X(p)} f\big(u, X(p), \xi(p)\big)\, du\, dp, \quad (2.2)$$

где $\xi(p) = \alpha(p, X(p))$.

Доказательство.

а) Пусть $f(u), u \in [m(1), M(1)]$, – суммируемая функция. Покажем, что симметричный интеграл $\int_0^t f(X(s)) * dX(s)$ существует и для него справедлива формула замены переменных

$$\int_0^t f(X(s)) * dX(s) = \int_{X(0)}^{X(t)} f(u)\, du. \quad (2.3)$$

Докажем соотношение (2.3) при $t \in \bigcup_n T_n$, оно доказывается аналогично при любых t. Итак, обозначая через $S^{(n)}(f, X, t)$ интегральную сумму симметричного интеграла, при достаточно больших n имеем:

$$S^{(n)}(f, X, t) = \int_0^t f\left(X^{(n)}(s)\right) \times$$
$$\times \operatorname{sgn}\left((X^{(n)})'(s)\right) \left|(X^{(n)})'(s)\right| ds =$$
$$= \int_R f(u) \int_0^t \operatorname{sgn}\left((X^{(n)})'(s)\right) N^{(n)}(ds, u)\, du, \quad (2.4)$$

где $N^{(n)}(t, u)$ – индикатриса Банаха ломаной $X^{(n)}(s)$. Но

$$\int_0^t \operatorname{sgn}\left((X^{(n)})'(s)\right) N^{(n)}(ds, u) =$$
$$= \operatorname{sgn}(X(t) - X(0)) \times$$
$$\times \mathbf{1}\left(u \in \left(X(0) \wedge X^{(n)}(t), X(0) \vee X^{(n)}(t)\right)\right), \quad (2.5)$$

поскольку знаки производных в интервале по индикатрисе Банаха чередуются и $N^{(n)}(t,u)$ – нечетное число только если u лежит между $X(0)$ и $X^{(n)}(t)$. Подставляя выражение (2.5) в формулу (2.4), получим формулу (2.3). Заметим, что

$$\int_0^t f(X(s))h(s) * dX(s) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^t \int_0^t \mathbf{1}(\tau < s) h(d\tau) \times$$
$$\times \operatorname{sgn}\left((X^{(n)})'(s)\right) N^{(n)}(ds, u)\, du. \quad (2.6)$$

Ввиду формулы (2.5) получим, что правая часть соотношения (2.6) равна

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t\int_R f(u)\int_\tau^t \operatorname{sgn}\left(\left(X^{(n)}\right)'(s)\right)\times$$
$$\times N^{(n)}(ds,u)\,du\,h(d\tau),$$

откуда в силу формулы (2.5) следует соотношение (2.1).

В дальнейшем нам будет необходим частный случай формулы (2.1):

$$\int_0^t f\big(X(s)\big)\,\mathbf{1}\big(h(s)>x\big)*dX(s)=$$
$$=\mathbf{1}\big(h(t)>x\big)\times$$
$$\times\left[\int_{X(0)}^{X(t)} f(v)\,dv-\int_{X(0)}^{X(t^+)} f(v)\,dv\right]. \quad (2.7)$$

b) Возьмем в формуле (2.7) вместо функции $f(v)$ суммируемую по всем переменным функцию $f(v,u,x)$, $v,u\in R$, $x>0$, а в качестве функции $h(t)$ – локальное время $\alpha_\tau(t,u)$. Проинтегрировав полученное равенство по переменным $(u,x)\in[m(t),M(t)]\times\times[0,+\infty)$, поменяем местами симметричный и лебеговский интегралы, что в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла допустимо, поскольку абсолютная величина частичных сумм симметричного интеграла ввиду формул (2.4) и (2.5) не превосходит $\int_{m(t)}^{M(t)}\left|f(v,u,x)\right|dv$. Далее, в силу непрерывности $\alpha_\tau(s,u)$ по s и формулы (1.1), имеем

$$\int_0^t\int_{m(t)}^{M(t)}\int_0^{\alpha(s,u)} f\big(X(s),u,x\big)\,dx\,du*dX(s)=$$
$$=\int_0^t\int_{m(s)}^{M(s)}\int_0^s f\big(X(s),X(\tau),\xi(\tau)\big)\alpha(d\tau,u)\,du*dX(s)=$$
$$=\int_{X(0)}^{X(t)}\int_{m(t)}^{M(t)}\int_0^{\alpha(t,u)} f(v,u,x)\,dx\,du\,dv-$$
$$-\int_{m(t)}^{M(t)}\int_0^{\alpha(t,u)}\int_{X(0)}^{X(\gamma(x,u))} f(v,u,x)\,dv\,dx\,du,$$

где $\gamma(x,u)=\inf\{s:\alpha(s,u)>x\}\mathbf{1}(\alpha(t,u)>x)$. Заметим, что в последнем интеграле $X(\gamma(x,u))=u$. Действительно, в силу формулы (1.1) получим

$$\int_R\int_0^{\alpha(t,u)}\mathbf{1}\big(X(\gamma(x,u))\neq u\big)\,dx\,du=$$
$$=\int_R\int_0^t\mathbf{1}\big(X(s)\neq u\big)\,\alpha(ds,u)\,du=$$
$$=\int_0^t\mathbf{1}\big(X(s)\neq X(s)\big)\,ds. \quad (2.8)$$

Следствие. *Пусть $X(s)$ $s\in[0,1]$ – функция со свойством (С), а $B(u)$, $u\in R$, – ограниченная борелевская функция. Тогда для $x>0$ справедлива формула*

$$\int_0^t B(X(s))\,\mathbf{1}(\xi(s)>x)*dX(s)=$$
$$=\int_{X(0)}^{X(t)} B(u)\,\mathbf{1}\big(\alpha(t,u)>x\big)\,du-$$
$$-\frac{1}{2}\int_R B(u)\operatorname{sgn}\big(u-X(0)\big)\,\mathbf{1}\big(\alpha(t,u)>x\big)\,du, \quad (2.9)$$

где симметричный интеграл в левой части равенства (2.9) есть несобственный интеграл

$$\int_0^t B(X(s))\,\mathbf{1}(\xi(s)\ge x)*dX(s)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^t B(X(s))\frac{1}{2\varepsilon}\times$$
$$\times\int_{X(s)-\varepsilon}^{X(s)+\varepsilon}\mathbf{1}\big(\alpha(s,u)\ge x\big)\,du*dX(s).$$

Замечание. Пусть $x=0$ в равенстве (2.9), тогда получим

$$\int_0^t B(X(s))\mathbf{1}(\xi(s)>0)*dX(s)=$$

$$= \int_{X(0)}^{X(t)} B(u)\mathbf{1}(\alpha(t,u) > 0)\,du -$$

$$-\frac{1}{2}\int_R B(u)\,\mathrm{sgn}\,(u - X(0))\mathbf{1}(\alpha(t,u) > 0)\,du. \tag{2.10}$$

Значит, ввиду формул (2.3) и (2.10), имеем

$$\int_0^t B(X(s))\mathbf{1}(\xi(s) = 0) * dX(s) =$$

$$= \int_{X(0)}^{X(t)} B(u)\mathbf{1}(\alpha(t,u) = 0)\,du +$$

$$+\frac{1}{2}\int_R B(u)\,\mathrm{sgn}\,(u - X(0))\mathbf{1}(\alpha(t,u) > 0)\,du. \tag{2.11}$$

Соотношения (2.10) и (2.11) будут необходимы в следующем параграфе.

3. РАСШИРЕННЫЙ СИММЕТРИЧНЫЙ ИНТЕГРАЛ И СТОХАСТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ СТРАТОНОВИЧА

В дальнейшем всюду, если не оговорено противное, фиксируется непрерывная функция $X(s), s \in [0, +\infty)$, со свойством (C). Конструкция расширенного симметричного интеграла опирается на следующее утверждение:

Лемма 3.1. *Пусть* $X(s)$, $s \in [0, +\infty)$, *— непрерывная функция с локальным временем* $\alpha(s,u)$, *а* $f(s)$, $s \in [0, +\infty)$, *— суммируемая функция. Тогда* $f(s) = f^{+}{}_t(\xi(s), X(s))$ *при п.в.* $s \in [0,t]$, *где* $f^{+}{}_t(x,u) = f(\gamma(x,u))\mathbf{1}(\alpha(t,u) \geq x)$, $\gamma(z,u) = \inf\{s : \alpha(s,u) > z\}$, $\xi(s) = \alpha(s, X(s))$.

Доказательство. Ввиду формулы (1.1) и того факта, что при фиксированном u справедливо равенство $\gamma(\alpha(s,u),u) = s$ в точках роста справа s функции $\alpha(s,u)$, при любом $\tau \in [0,t]$ имеем

$$\int_0^\tau f_t^+(\xi(s), X(s))\,ds =$$

$$= \int_R \int_0^\tau f(\gamma(\alpha(s,u),u))\,\alpha(ds,u)\,du =$$

$$= \int_R \int_0^\tau f(s)\,\alpha(ds,u)\,du = \int_0^\tau f(s)\,ds, \tag{3.1}$$

откуда, ввиду произвольности τ , вытекает утверждение леммы.

Определение. Функцию $f^{+}{}_t(x,u)$ мы будем называть *представлением функции* $f(s)$ на отрезке $[0,t]$.

Переход от исходной функции $f(s)$ к ее представлению $f^{+}{}_t(x,u)$ кажется несколько искуственным, однако, как показано ниже в примере, классические интегралы Лебега по функции $f(s)$ совпадают с интегралами по представлению $f^{+}{}_t(x,u)$.

Пример 3.1. (*Интеграл Лебега*). Пусть $f(s)$, $s \in [0, +\infty)$, — суммируемая функция, а $X(s)$, $s \in [0, +\infty)$, – непрерывная функция с локальным временем $\alpha(t,u)$. Тогда в силу соотношения (1.1) и формулы замены переменных в интеграле Лебега имеем

$$\int_0^t f(s)\,ds = \int_R \int_0^t f(s)\,\alpha(ds,u)\,du =$$

$$= \int_R \int_0^\infty f^{+}{}_t(x,u)\,dx\,du. \tag{3.2}$$

Расширенный симметричный интеграл будет построен для определенного класса интеграндов вида $f(\xi(s), X(s))$ и приведенная выше лемма 3.1 показывает, что класс интеграндов достаточно широк в том смысле, что для каждой суммируемой на $[0,t]$ функции $f(s)$ существует представление $f^{+}{}_t(\xi(s), X(s))$, для которого расширенный симметричный интеграл будет определен.

Мы хотим доказать следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть* $X(s), s \in [0, +\infty)$, *— непрерывная функция со свойством* (C). *При каждом фиксированном* t *симметричный интеграл* $\int_0^t f(s) * dX(s)$ *может быть продолжен* *как интеграл по заряду:*

$$\int_0^t f(s) * dX(s) \equiv$$

$$\equiv \int_0^t f^+{}_t(\xi(s), X(s)) * dX(s) =$$

$$= \int_{R^+\times R} f_t^+(x,u) G_t(dx\,du),$$

где $G_t(dx\,du)$ — заряд, однозначно определяющийся своими значениями на «прямоугольниках» $A\times B$:

$$G_t(A\times B) \equiv \int_{X(0)}^{X(t)} \mathbf{1}((\alpha(t,u),u)\in A\times B)\,du -$$

$$-\frac{1}{2}\int_R \mathbf{1}((\alpha(t,u),u)\in (A\setminus\{0\})\times B)\times$$

$$\times \operatorname{sgn}(u - X(0))\,du +$$

$$+\frac{1}{2}\int_R \mathbf{1}(u\in B, \alpha(t,u)>0)\times$$

$$\times \operatorname{sgn}(u - X(0))\,du \mathbf{1}(0\in A). \quad (3.3)$$

Доказательство. Разобьем доказательство на шаги.

Шаг 1. Рассмотрим на $B(R^+\times R)$ семейство зарядов $G_t(.), t\in(0,+\infty)$. Заряды $G_t(.), t\in(0,+\infty)$, определены таким образом, чтобы они были согласованы с формулами (2.3), (2.9) и (2.11). При этом формула (3.3), определяющая заряд $G_t(.)$, является линейной комбинацией распределений локальных времен, то есть функций вида

$$F_B(t,A) \equiv F_t(A\times B) = \int_B \mathbf{1}(\alpha(t,u)\in A)\,du.$$

Шаг 2. Пусть $f^{(n)}(x,u)$ – простая функция вида (3.1), тогда *расширенным симметричным интегралом* (в дальнейшем, если это не приводит к двусмысленности: *симметричным интегралом*) от простой функции $f^{(n)}(x,u)$ назовем величину

$$\int_0^t f^{(n)}(\xi(s), X(s)) * dX(s) \equiv$$

$$\equiv \sum_k d_k G_t(C_k) = \int_{R^+\times R} f^{(n)}(x,u)\, G_t(dx\,du). \quad (3.4)$$

Шаг 3. Пусть $f(s), s\in[0,+\infty)$, — борелевская функция, $f_t^+(x,u)$ — ее представление, удовлетворяющие условиям

$$\int_{R^+\times R} \left|f_t^+(x,u)\right| |G_t|(dx\,du) < +\infty,$$

$$\int_0^t |f(s)|\alpha(ds,u) < +\infty \quad \text{при п. в. } u, \quad (3.5)$$

где $|G_t|$ есть полная вариация заряда G_t. Рассмотрим последовательность простых функций $f^{(n)}(x,u)$, сходящихся к $f_t^+(x,u)$ в том смысле, что

$$\int_{R^+\times R} \left|f^{(n)}(x,u) - f_t^+(x,u)\right| |G_t|(dx\,du) \to 0$$

$$\text{при } n\to\infty. \quad (3.6)$$

Расширенный симметричный интеграл $\int_0^t f(s) * dX(s)$, $t\in[0,+\infty)$, определяется как предел

$$\int_0^t f(s) * dX(s) \equiv$$

$$\equiv \lim_{n\to\infty} \int_0^t f^{(n)}(\xi(s), X(s)) * dX(s) =$$

$$= \int_{R^+\times R} f_t^+(x,u) G_t(dx\,du). \quad (3.7)$$

Итак, расширенный симметричный интеграл построен.

Выделим некоторые свойства расширенного симметричного интеграла.

1) В силу формул (3.3), (3.4) и (3.7) для расширенного симметричного интеграла справедлива формула

$$\int_0^t f(s) * dX(s) = \int_{X(0)}^{X(t)} f_t^+(\alpha(t,u),u)\,du -$$

$$-\frac{1}{2}\int_R f_t^+(\alpha(t,u),u)\mathbf{1}(\alpha(t,u)>0)\times$$
$$\times\operatorname{sgn}(u-X(0))\,du+$$
$$+\frac{1}{2}\int_R f_t^+(0,u)\mathbf{1}(\alpha(t,u)>0)\times$$
$$\times\operatorname{sgn}(u-X(0))\,du. \quad (3.8)$$

Действительно, справедливость формулы (3.8) последовательно проверяется для функций вида $f_t^+(\xi(s), X(s)) = \mathbf{1}(\xi(s)\in A, X(s)\in B)$, затем для простых функций, откуда следует общий результат.

2) Соотношение (3.8), ввиду формулы (1.1), может быть переписано в виде

$$\int_0^t f(s)*dX(s)=$$
$$=\int_{X(0)}^{X(t)} f_t^+(0,u)\mathbf{1}(\alpha(t,u)=0)\,du+$$
$$+\operatorname{sgn}(X(t)-X(0))\times$$
$$\times\int_0^t f_t^+(\alpha(t,X(s)),X(s))[\alpha(t,X(s))]^{-1}\times$$
$$\times\mathbf{1}(X(s)\in[X(0)\wedge X(t),X(0)\vee X(t)])\,ds-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t f_t^+(\alpha(t,X(s)),X(s))[\alpha(t,X(s))]^{-1}\times$$
$$\times\operatorname{sgn}(X(s)-X(0))\,ds+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t f_t^+(0,X(s))[\alpha(t,X(s))]^{-1}\times$$
$$\times\operatorname{sgn}(X(s)-X(0))\,ds. \quad (3.9)$$

Пусть $X(s)=X(s,\omega)$, $s\in[0,+\infty)$, — непрерывный с вероятностью 1 винеровский процесс, заданный на вероятностном пространстве (Ω,F,P), с непрерывным с вероятностью 1 по (s,u) вариантом локального времени $\alpha(s,u)$.

Стохастический интеграл Стратоновича $\int_0^t f(X(s))\cdot dX(s)$, где $f(u)$, $u\in R$, — детерминированная непрерывно дифференцируемая функция, определяется как предел по вероятности частичных сумм вида

$$\sum_k f_k^{(n)}\mathbf{1}(t_k^{(n)}\le t)\Delta X_k^{(n)},$$

где $f_k^{(n)} = \frac{1}{2}[f(X(t_{k-1}^{(n)})) + f(X(t_k^{(n)}))]$, при этом для интеграла Стратоновича справедлива формула замены переменных

$$\int_0^t f(X(s))\cdot dX(s)=\int_{X(0)}^{X(t)} f(u)\,du.$$

Определение стохастического интеграла Стратоновича для интеграндов более общего вида и ряд сведений об интегралах Стратоновича приведены в работе [1].

Покажем, что симметричные интегралы являются потраекторными аналогами стохастических интегралов Стратоновича. Для этого заметим, что в случае непрерывно дифференцируемой функции $f(u)$ в силу формулы Ито и свойств локальных времен при фиксированном $x\ge 0$ с вероятностью 1 справедливо (см. [1]) равенство

$$\int_R\int_0^t f(X(s))\mathbf{1}(\alpha(s,u)>x)\cdot dX(s)\,du=$$
$$=\int_R\int_{\gamma(x,u)}^t f(X(s))\cdot dX(s)\mathbf{1}(\alpha(t,u)>x)\,du=$$
$$=\int_R\int_{X(0)}^{X(t)} f(v)\,dv\,\mathbf{1}(\alpha(t,u)>x)\,du-$$
$$-\int_R\int_{X(0)}^{u} f(v)\,dv\,\mathbf{1}(\alpha(t,u)>x)\,du,$$

где $\gamma(x,u)=\inf\{s:\alpha(s,u)>x\}$. В силу формул (1.2) и (2.1) правая часть последнего соотношения равна

$$F(t,x)\int_{X(0)}^{X(t)} f(v)\,dv-\int_0^t\int_{X(0)}^{X(s)} f(v)\,dv\,F(ds,x)=$$
$$=\int_0^t f(X(s))F(s,x)\cdot dX(s),$$

где $F(t,x)=\int_R \mathbf{1}(\alpha(t,u)>0)\,du$. Таким образом, мы пришли к соотношению: при каждом $x\ge 0$ с вероятностью 1

$$\int_R\int_0^t f(X(s))\mathbf{1}(\alpha(s,u)>x)\cdot dX(s)\,du=$$

$$= \int_0^t \int_R f(X(s)) \mathbf{1}(\alpha(s,u) > x)\, du \cdot dX(s).$$

Положив в последней формуле $f_v(u) = B(u)\delta_n(u-v)$, где $B(u)$-непрерывно дифференцируемая функция, а $\delta_n(u)$ – «δ-образная» последовательность гладких функций, сходящихся к δ-функции Дирака, и переходя к пределу при $n \to \infty$, ввиду формулы (2.10), с вероятностью 1 при любых фиксированных u и x получим

$$\int_0^t \mathbf{1}(X(s) \geq u, \xi(s) > x) \cdot dX(s) =$$

$$= \int_0^t \mathbf{1}(X(s) \geq u, \xi(s) > x) * dX(s).$$

Так как непрерывные справа функции с конечным изменением полностью определяются своими значениями на счетном всюду плотном множестве, то с помощью стандартных рассуждений из последнего соотношения получаем, что существует версия стохастического интеграла Стратоновича такая, что последнее равенство при каждом t будет справедливо с вероятностью 1 одновременно для всех x и u. Но тогда для интеграла Стратоновича возможна процедура расширения, построенная выше для симметричного интеграла. Значит, *для винеровского процесса $X(s)$ расширенный стохастический интеграл Стратоновича с вероятностью 1 совпадает с соответствующим потраекторным расширенным симметричным интегралом.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ватанабе С., Икеда Н.** Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986. 448 с.
2. **Дьячков А. М.** О существовании интеграла Стильтьеса // ДАН. 1996. Т. 350, № 2. С. 156–161.
3. **Насыров Ф. С.** О локальных временах для функций и случайных процессов. 1 // Теория вероятн. и ее примен. 1995. Т. 40, вып. 4. С. 798–812.
4. **Терехин А. П.** Приближение функций ограниченной p-вариации // Изв. вузов. 1965. Т. 2 (45). С. 171–187.
5. **Geman D., Horowitz J.** Occupation densities // Ann. Probab. 1980. V. 8. P. 1–67.
6. **Nasyrov F. S.** On continuous local times for continuous functions and stochastic processes // J. of Math. Sciences. 1997. V. 84, No 3. P. 1128–1137.
7. **Young L. C.** An inequality of the Holder type, connected with Stjieltjes integration // Acta Mathem. 1936. V. 67. P. 251–282.

ОБ АВТОРЕ

Насыров Фарит Сагитович, профессор кафедры математики УГАТУ. Дипл. математик (ЛГУ, 1976). Д-р физ.-мат. наук по теории вероятностей и математической статистике и по математическому анализу (защ. в ИМ им. Соболева, Новосибирск, 2002). Исследования в области теории случайных процессов, теории функций, финансовой математики.

К юбилею университета

Продолжение со с. 72

СТРАНИЦЫ ИСТОРИИ УГАТУ

В 50-е годы активно осуществлялось послевоенное восстановление вуза. В этот период коллектив института подготовил 1599 молодых специалистов, в том числе 871 по авиационным двигателям и 728 технологов для машиностроительной промышленности. С 1959 года, согласно решению коллектива института, был принят курс на широкое развертывание научно-исследовательских работ для предприятий. Такая политика была реализована в основном в 60-е годы. В это время не только преподаватели, но и две трети студентов дневной формы обучения занимались научно-исследовательской работой. В эти же годы генеральной целью стало развитие высшего образования и науки в вузе на основе его расширения и реконструкции:

– были открыты новые специальности (авиационное приборостроение, машины и обработка металлов давлением, оборудование и технология сварочного производства, промышленная электроника, автоматизация и комплексная механизация машиностроения, экономика и организация машиностроительной промышленности, двигатели внутреннего сгорания, авиационное и автотракторное оборудование);

– вуз в эти годы получил ряд зданий в центре города, эти корпуса были реконструированы для ведения учебного процесса и выполнения научно-исследовательских работ. Таким образом, была сформирована основная часть генерального плана института в центре города.

[*Уфимскому ордена Ленина авиационному институту имени Серго Орджоникидзе – 50 лет. Очерк истории. Уфа: Башкирск. книжн. изд-во, 1982. 256 с.*]

Продолжение на с. 118