

УДК 621.6.001:621.59, 536.242.001.5, 517.958+519.63

Н. М. ЦИРЕЛЬМАН, А. В. ЖИБЕР

ТЕПЛОФИЗИКА ИЗМЕНЕНИЙ
АГРЕГАТНОГО СОСТОЯНИЯ ВОДОРОДА

Изучены процессы фазового превращения водорода с изменением агрегатного состояния. При этом получены зависимости для описания температурных полей в старой и новой фазах и для определения закона движения границы их раздела. Жидкий водород; затвердевание; плавление; фазовое превращение

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время проводятся интенсивные исследования, направленные на получение и применение смеси жидкого водорода с его твердой фазой. Использование такой смеси (шуги) в авиационной и ракетно-космической технике по сравнению с газообразным водородом имеет следующие преимущества [1, 2]:

- повышенную плотность, приводящую к уменьшению объема топливных баков, и связанное с этим уменьшение теплопритоков через тепловую изоляцию в связи с уменьшением площади теплообменной поверхности;

- меньшие потери топлива на испарение при его производстве, хранении и транспортировке, так как пока существует твердый водород, тепло, поступающее извне, расходуется на его плавление;

- существенное повышение безопасности получения, хранения, транспортировки и использования водородного топлива.

В связи с этим мы естественным образом приходим к проблеме исследования теплопереноса при изменяющемся агрегатном состоянии вещества применительно к затвердеванию жидкого водорода и к плавлению твердого водорода.

1. ЗАТВЕРДЕВАНИЕ ЖИДКОГО ВОДОРОДА

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим определение температурного поля в формирующейся твердой фазе при температуре затвердевания жидкой фазы (рис. 1). Математическая модель исследуемого процесса включает в себя:

уравнение теплопроводности в твердом водороде

$$C(p, T) T_t = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda(T) T_x), \quad (1.1)$$

$$0 < x < x(t), \quad t > 0,$$

описание начального распределения температуры в имеющемся слое твердого водорода толщиной δ

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad 0 < x < \delta, \quad x(0) = \delta, \quad (1.2)$$

задание температуры затвердевания на границе раздела новой и старой фаз

$$T(x(t), t) = T_s, \quad t > 0, \quad (1.3)$$

и условия Стефана на ней

$$L \frac{dx(t)}{dt} = \lambda(T) T_x, \quad x = x(t), \quad t > 0, \quad (1.4)$$

задание градиента температуры на наружной (охлаждаемой) поверхности новой фазы

$$-\lambda(T) T_x = f(t) < 0, \quad t > 0, \quad x = 0. \quad (1.5)$$

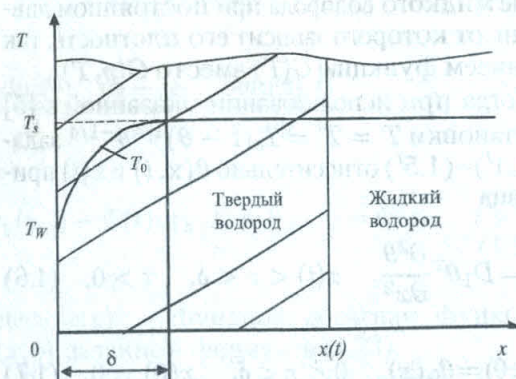


Рис. 1

Преобразование $x' = \delta - x$, $T(x, t) = T'(x', t)$ приводит (1.1)–(1.5) к следующему виду, если в дальнейшем под x понимать x' :

$$C(p, T) T_t = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda(T) T_x), \quad x(t) < x < \delta, \quad t > 0, \quad (1.1')$$

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad 0 < x < \delta, \quad x(0) = 0, \quad (1.2')$$

$$T(x(t), t) = T_s, \quad t > 0, \quad (1.3')$$

$$L \frac{dx(t)}{dt} = \lambda(T) T_x, \quad x = x(t), \quad t > 0, \quad (1.4')$$

$$\lambda(T) T_x = f(t) < 0, \quad x = \delta, \quad t > 0. \quad (1.5')$$

Отсутствие в правой части уравнений (1.1) и (1.1') слагаемого, соответствующего мощности источника объемного тепловыделения, свидетельствует о том, что изучается случай, когда в твердом водороде установилось равновесие между орто- и парасостояниями для заданной концентрации χ ортоводорода при температуре T_e и не наблюдается явления конверсии [3].

Следуя [2, 4], примем теплофизические характеристики твердого водорода равными:

$$\begin{aligned} C(p, T) &= a_1 T^3, \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}); \\ \lambda(T) &= a_2 \chi^{-1} T^3 T_e^{-3} (1 + T^4 T_e^{-4})^{-2}, \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}); \\ a_1 &= 0,531, \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}); \\ a_2 &= 1,94, \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}); \\ T_e &= 6,26 + 6,54 \chi; \\ 0,05 &\leq \chi \leq 0,75. \end{aligned}$$

Полагаем, что рассматривается затвердевание жидкого водорода при постоянном давлении, от которого зависит его плотность, так что имеем функцию $C(T)$ вместо $C(p, T)$.

Тогда при использовании указанной в [5] подстановки $T = T' = T_e(1 - \theta)^{1/4} \theta^{-1/4}$ задача (1.1')–(1.5') относительно $\theta(x, t)$ и $x(t)$ примет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D_1 \theta^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad x(t) < x < \delta, \quad t > 0, \quad (1.6)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad 0 < x < \delta, \quad x(0) = 0, \quad (1.7)$$

$$\theta(x(t), t) = \theta_s, \quad t > 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{D_2} \frac{\partial \theta(x(t), t)}{\partial x}, \quad t > 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \theta(\delta, t)}{\partial x} = F(t), \quad t > 0, \quad (1.10)$$

где

$$\theta_0(x) = [1 + (T_0(x)/T_e)^4]^{-1};$$

$$\theta_s = [1 + (T_s/T_e)^4]^{-1};$$

$$D_1 = 1,49 \cdot 10^{-2} / [\rho \chi (1 + 1,043 \chi)^3], \text{ м}^2/\text{с};$$

$$D_2 = -2,062 \chi L / T_e;$$

$$F(t) = -4f(t) / (a_2 \chi^{-1} T_e).$$

Решение задачи (1.6)–(1.10) основано на преобразовании вида [4, 5]

$$dx = v(y, t) dy + \frac{\partial v(y, t)}{\partial y} dt, \quad (1.11)$$

$$v(y, t) = D_1^{1/2} \theta(x, t),$$

которое нелинейное уравнение (1.6) переводит в линейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (1.12)$$

1.2. Построение решения

Задача (1.6)–(1.10) о нахождении функций $x = x(t)$ и $\theta = \theta(x, t)$ в области $x(t) < x < \delta$, $t > 0$ заменой $u(x, t) = D_1^{1/2} \theta(x, t)$ приводится к следующей:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x(t) < x < \delta, \quad t > 0; \quad (1.13)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < \delta, \quad x(0) = 0; \quad (1.14)$$

$$u(x(t), t) = u_s, \quad t > 0; \quad (1.15)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = u^2 \frac{\partial u(x(t), t)}{\partial x}, \quad t > 0; \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial u(\delta, t)}{\partial x} = \Psi(t), \quad t > 0, \quad (1.17)$$

$$\Psi(t) = F(t)D_1^{1/2} < 0.$$

Будем предполагать, что решение $u(x, t)$ задачи (1.13)–(1.17) и его производная $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ суть непрерывные функции в замкнутой области $x(t) \leq x \leq \delta, 0 \leq t \leq t_1$. Поэтому будем считать, что $u_0(x)$ и $u_1(t)$ — непрерывные функции, для которых, в частности, выполняется условие согласования $u_0(0) = u_1(0)$.

Из формул (1.11) следует, что

$$y = y(x, t) = \int_{\mathfrak{S}} \frac{d\xi}{u(\xi, \tau)} - \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \xi} d\tau. \quad (1.18)$$

Здесь \mathfrak{S} — кривая, соединяющая точки $M_0(x_0, t_0)$ и $M(x, t)$ и лежащая в области $\Omega = \{(x, t) | x(t) < x < \delta, t > 0\}$. Отметим, что интеграл в правой части формулы (1.18) не зависит от пути интегрирования \mathfrak{S} , соединяющего точки $M_0(x_0, t_0)$ и $M(x, t)$.

Положим $x_0 = t_0 = 0$. Тогда при отображении (1.18) прямая $x = \delta$ и кривая $x = x(t)$, находящаяся в плоскости x, t , отобразятся соответственно в кривые

$$y = \int_0^\delta \frac{d\xi}{u_0(\xi)} - \int_0^t \Psi(\tau) d\tau, \quad (1.19)$$

$$y = \int_0^t \frac{(u_2 - u_1) dx(\tau)}{u_1 u_2} d\tau \quad (1.20)$$

на плоскости y, t .

Действительно, пусть \mathfrak{S} — ломаная, соединяющая точки $A(0, 0)$, $B(\delta, 0)$ и $D(\delta, t)$. Тогда из формулы (1.18) следует

$$y(\delta, t) = \int_0^\delta \frac{d\xi}{u(\xi, 0)} - \int_0^t \frac{\partial u(\delta, \tau)}{\partial \xi} d\tau = \Phi(t), \quad (1.21)$$

откуда, учитывая краевые условия (1.14) и (1.17), получаем формулу (1.19). Далее, выбирая в качестве \mathfrak{S} кривую $x = x(t)$, из (1.18) имеем также

$$y(x(t), t) = \int_0^t \left[\frac{1}{u(x(\tau), \tau)} \frac{dx(\tau)}{d\tau} - \frac{\partial u(x(\tau), \tau)}{\partial x} \right] d\tau. \quad (1.22)$$

Совместное рассмотрение (1.22), (1.15) и (1.16) дает формулу (1.20).

Если $u(x, t) > 0$, то уравнение (1.18) определяет однозначную функцию $x = x(y, t)$, так как имеем

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{u(x, t)} > 0.$$

Полагая $t = 0$ в формуле (2.18) и выбирая в качестве \mathfrak{S} отрезок, соединяющий точки $A(0, 0)$ и $E(x, 0)$, получаем сначала

$$y(x, 0) = \int_0^x \frac{d\xi}{u(\xi, 0)},$$

и затем, учитывая начальное условие (1.14), имеем

$$y(x, 0) = \int_0^x \frac{d\xi}{u_0(\xi)}. \quad (1.23)$$

В итоге с использованием преобразования (1.11) и следующих из него формул (1.19), (1.20), (1.23) приходим вместо (1.13)–(1.17) к новой краевой задаче относительно функций $y(t)$ и $v(y, t)$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad y(t) < y < \Phi(t), \quad t > 0, \quad (1.24)$$

$$v(y, 0) = u_0(\varphi(y)), \quad 0 < y < \int_0^\delta \frac{d\xi}{u_0(\xi)}, \quad (1.25)$$

$$v(y(t), t) = u_1, \quad t > 0, \quad (1.26)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{u_2 - u_1}{u_1^2} \cdot \frac{\partial v(y(t), t)}{\partial y}, \quad t > 0, \quad (1.27)$$

$$v_y(y, t) - \Psi(t)v(y, t) = 0, \quad y = \Phi(t), \quad t > 0. \quad (1.28)$$

Здесь $\varphi(y)$ — функция, обратная функции $y(x, 0)$, заданной формулой (1.23).

В итоге решение исходной задачи (1.13)–(1.17) будет вычисляться по формулам

$$u(x, t) = v(y(x, t), t),$$

$$x(y, t) = \int_{(0,0)}^{(y,t)} v(\xi, \tau) d\xi + \frac{\partial v(\xi, \tau)}{\partial \xi} d\tau,$$

$$x(t) = \int_0^t \frac{u_1 u_2}{u_2 - u_1} \frac{dy(\tau)}{d\tau} d\tau,$$

где $v(y, t)$ и $y(t)$ — решение задачи (1.24)–(1.28).

Так как $u_i > 0$, $i = 0, 1$, то из принципа максимума следует, что $v(y, t) > 0$, а следовательно, $u(x, t) > 0$.

Вспомогательная задача (1.24)–(1.27) исследовалась многими авторами, например, [6–8].

2. ПЛАВЛЕНИЕ ТВЕРДОГО ВОДОРОДА

2.1. Плавление пластины

Важная для практических приложений краевая задача о плавлении твердого водорода при постоянном давлении и немедленном уносе образующегося жидкого водорода относительно температуры $T(x, t)$ и местоположения $x(t)$ во времени «плавающейся» поверхности (рис. 2) имеет вид

$$C(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (2.1)$$

$$x(t) < x < \delta, \quad t > 0,$$

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad a < x < \delta, \quad x(0) = a, \quad (2.2)$$

$$T(x(t), t) = T_m, \quad t > 0, \quad (2.3)$$

$$= -\lambda(T) T_x, \quad x = x(t), \quad t > 0, \quad (2.4)$$

при одном из следующих граничных условий на противоположной поверхности:

первого рода:

$$T(x, t) = T_w(t), \quad x = \delta, \quad t > 0, \quad (2.1_1)$$

второго рода:

$$-\lambda(T) T_x = q_w(t), \quad x = \delta, \quad t > 0, \quad (2.1_2)$$

третьего рода:

$$-\lambda(T) T_x = \alpha (T_w(t) - T_f(t)), \quad x = \delta, \quad t > 0. \quad (2.1_3)$$

Здесь $q_w(t) > 0$ и $\alpha > 0$.

На рис. 2 приведена соответствующая графическая интерпретация распределения температуры в плавящемся водороде.

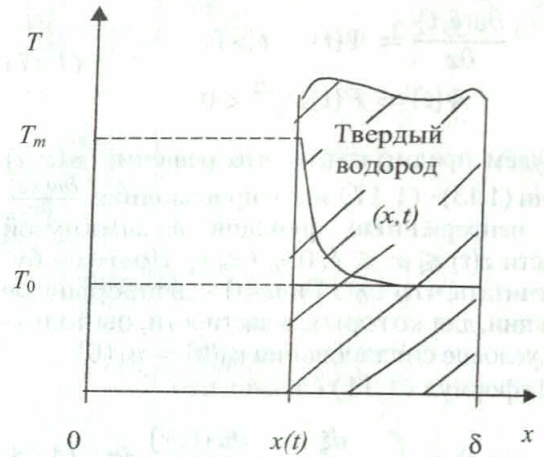


Рис. 2

Замена $x' = \delta - x$, $T(x, t) = T(x', t)$ вместо задачи (2.1)–(2.4), (2.5_i) ($i = 1, 2, 3$), если в дальнейшем вместо x понимать x' , дает

$$C(T) T_t = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda(T) T_x), \quad 0 < x < x(t), \quad t > 0, \quad (2.1')$$

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad t = 0, \quad (2.2')$$

$$0 < x < \delta - a, \quad x(0) = \delta - a,$$

$$T(x(t), t) = T_m, \quad t > 0, \quad (2.3')$$

$$L \frac{dx(t)}{dt} = -\lambda(T) T_x, \quad x = x(t), \quad t > 0, \quad (2.4')$$

$$T(0, t) = T_w(t), \quad t > 0, \quad (2.5'_1)$$

$$-\lambda(T) T_x = q_{w,1}(t), \quad x = 0, \quad (2.5'_2)$$

$$t > 0, \quad q_{w,1}(t) = -q_w(t),$$

$$\lambda(T) T_x = \alpha (T_w(t) - T_f(t)), \quad x = 0, \quad t > 0. \quad (2.5'_3)$$

Задачу (2.1')–(2.5'_i) ($i = 1, 2, 3$) будем рассматривать в предположении

$$T(x(t), t) = T_m = (4L/a_1 - T_e^4)^{1/4}.$$

Нетрудно убедиться, что для любого χ из приведенного диапазона $0,05 \leq \chi \leq 0,75$ температура плавления T_m больше 30 К, что соответствует изменению агрегатного состояния при давлениях выше $0,75 \cdot 10^8$ Па.

Замена

$$T = T_e (\gamma - u)^{1/4} u^{-1/4}, \quad \gamma = a_2 / (a_1 \chi T_e^3)^{1/2}$$

сводит указанные задачи к виду

$$u_t = u^2 u_{xx}, \quad 0 < x < x(t), \quad t > 0, \quad (2.1'')$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < \delta - a = a', \quad (2.2'')$$

$$u(x(t), t) = u_m, \quad t > 0, \quad x(0) = a', \quad (2.3'')$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = u_m u_x(x(t), t), \quad t > 0, \quad (2.4'')$$

$$u(0, t) = u_w(t), \quad t > 0, \quad (2.5_1'')$$

$$u_x(0, t) = \tilde{q}_w, \quad t > 0, \quad (2.5_2'')$$

$$u_x(0, t) = \tilde{\alpha} [(\gamma - u(0, t))^{1/4} u^{-1/4}(0, t) - u_2(t)], \quad t > 0. \quad (2.5_3'')$$

Здесь обозначены:

$$u_0(x) = \gamma T_e^4 [T_0^4(x) + T_e^4]^{-1},$$

$$u_m = T_e^4 (T_e^4 + T_m^4),$$

$$u_2(t) = T_f(t) / T_e,$$

$$u_w(t) = \gamma T_e^4 [T_w^4(t) + T_e^4]^{-1},$$

$$\tilde{q}_w(t) = 4\gamma \chi q_w(t) / (a_1 T_e),$$

$$\tilde{\alpha} = 4\alpha \chi \gamma / a_2.$$

Преобразование вида

$$u(x, t) = v(y((x, t), t)), \quad y_x = \frac{1}{v(y, t)}, \quad y_t = \frac{v_y}{v} \quad (2.6)$$

переводит нелинейное уравнение (2.1'') в линейное уравнение теплопроводности $v_t = v_{yy}$.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$v_t = v_{yy}, \quad y(t) < y < 0, \quad t > 0, \quad (2.7)$$

$$v(0, t) = u_m, \quad t > 0, \quad (2.8)$$

$$v(y, 0) = v_0(y), \quad y(0) = b, \quad b < y < 0, \quad (2.9)$$

$$v_y(y(t), t) = u_1(t), \quad t > 0, \quad (2.10)$$

$$u_1(t) \frac{dy(t)}{dt} = -v_y(y(t), t), \quad t > 0, \quad (2.11)$$

Здесь обозначено $v_0(y) = u_0(\varphi(y))$, где $x = \varphi(y)$ — функция, обратная функции

$$y = b + \int_0^x \frac{1}{u_0(s)} ds, \quad b = \int_{a'}^0 \frac{1}{u_0(s)} ds.$$

Однофазная задача Стефана (2.7)–(2.11) исследовалась многими авторами.

Из принципа максимума следует, что $0 < v(y, t) < \gamma$ при $y(t) \leq y \leq 0, t > 0$.

Как и в разд. 1, будем предполагать, что функции $v_0(y)$ и $u_1(t)$ непрерывно дифференцируемы и выполнены условия согласования $u_m = v_0(0), v_0(b) = u_1(0)$. Тогда нетрудно показать, что решение задачи (2.1'')–(2.5_3'') вычисляется по формулам

$$x(t) = - \int_0^{y(t)} v(y, t) dy, \quad (2.12)$$

$$u(x, t) = v(y(x, t), t),$$

где функция $y = y(x, t)$ определяется из соотношения

$$x = a' + \int_{\mathfrak{S}} v(s, \tau) ds + v_s(s, \tau) d\tau, \quad (2.13)$$

в котором $v(y, t)$ — решение задачи (2.7)–(2.11), а \mathfrak{S} — кривая, соединяющая точки $(0, 0)$ и $M(y, t)$ и лежащая в области $\Omega = \{(y, t), y(t) \leq y \leq 0, t > 0\}$.

Далее, при использовании преобразования (2.6) задаче (2.1'')–(2.5_2'') соответствует краевая задача

$$v_t = v_{yy}, \quad f(t) < y < 0, \quad t > 0, \quad (2.14)$$

$$v(0, t) = u_m, \quad t > 0, \quad (2.15)$$

$$v(0, y) = v_0(y), \quad y(0) = b, \quad b < y < 0, \quad (2.16)$$

$$v_y(f(t), t) = -f'(t)v(f(t), t), \quad t > 0. \quad (2.17)$$

Здесь имеем $f(t) = b - \int_0^t \tilde{q}_w(\tau) d\tau$.

Для практически важного случая при $\tilde{q}_w(\tau) = 0$ имеем $f(t) = b$, и решение задачи (2.14)–(2.17) дается формулой

$$v(y, t) = u_m + \frac{2}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^b [v_0(y) - u_m] \sin\left(\frac{\mu_n y}{b}\right) dy \times \exp\left(-\frac{\mu_n^2 t}{b^2}\right) \sin\left(\frac{\mu_n y}{b}\right), \quad (2.18)$$

где $\mu_n = \pi/2 + n\pi$.

При установленной таким образом функции $v(y, t)$ получаем в явном виде местоположение подвижной границы

$$x(t) = \delta + \int_0^b v(y, t) dy. \quad (2.19)$$

Покажем, что имеет место неравенство $v(y, t) > 0$ в области $f(t) < y < 0$, $0 < t < t_1$. В силу принципа максимума $v(y, t)$ достигает наименьшего значения на границе этой области. Предположим, что $\min v(y, t) = v(f(t_0), t_0)$ и $v(f(t_0), t_0) < 0$. Тогда $v_y(f(t_0), t_0) \geq 0$, а из условия (2.17) следует неравенство $v_y(f(t_0), t_0) < 0$. Полученное противоречие доказывает, что функция $v(y, t)$ положительна в рассматриваемой области.

Далее, метод потенциалов позволяет свести краевую задачу (2.14)–(2.17) к интегральному уравнению

$$v(t) = 2 \int_0^b G(f(t), t; \xi, 0) v_0(\xi) d\xi + 2 \int_0^t [G_\xi(f(t), t; 0, \tau) u_m - G_\xi(f(t), t; f(\tau), \tau) v(\tau)] d\tau \quad (2.20)$$

и при этом искомое решение таково:

$$v(y, t) = \int_0^b G(y, t; \xi, 0) v_0(\xi) d\xi + \int_0^t [G_\xi(y, t; 0, \tau) u_m - G_\xi(y, t; f(\tau), \tau) v(\tau)] d\tau, \quad (2.21)$$

где G — функция Грина, равная

$$G(y, t; \xi, \tau) = 2(\pi(t-\tau))^{-1/2} \times \left\{ \exp\left[-\frac{(y-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right] - \exp\left[-\frac{(y+\xi)^2}{4(t-\tau)}\right] \right\}.$$

Если положить в (2.12), что $y(t) = f(t)$, то непосредственно проверяется, что формулы (2.12), (2.13), (2.20), (2.21) определяют решение задачи (2.1'')–(2.5'').

Пусть, наконец, функции $v(y, t)$ и $y(t)$ удовлетворяют (2.7)–(2.9) и, кроме того, еще и условиям

$$\begin{aligned} v \frac{dy}{dt} &= -v_y, \\ v_y &= \tilde{\alpha} [(\gamma - v)^{1/4} v^{-1/4} - u_2(t)] v \end{aligned} \quad (2.22)$$

при $y = y(t)$ для $t > 0$ и $y(0) = b$.

Положим

$$\begin{aligned} y(t) &= b - \\ &- \tilde{\alpha} \int_0^t [(\gamma - v(\tau))^{1/4} v^{-1/4}(\tau) - u_2(\tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Тогда решение задачи (2.7)–(2.9) и (2.22) со свободной границей вычисляется по формулам (2.21) и (2.23), где функция $v(t)$ — решение интегрального уравнения, полученного из (2.20) заменой функции $f(t)$ на правую часть равенства (2.23). Интегральное уравнение на функцию $v(t)$ разрешимо в малом. При этом найдется такое t_0 , что $0 < v(t) < \gamma$ при $0 < t < t_0$. Из принципа максимума следует, что $0 < v(y, t) < \gamma$ в области $y(t) < y < 0$, $0 < t < t_0$, и нетрудно проверить, что формулы (2.12), (2.13), (2.21) и (2.23) определяют решение задачи (2.1'')–(2.5'') на интервале $(0, t_0)$.

2.2. Плавление полупространства

При немедленном уносе новой фазы (жидкости) имеем краевую задачу

$$C(T)T_t = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda(T)T_x), \quad x(t) < x < +\infty, \quad (2.24)$$

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad 0 < x < \infty, \quad x(0) = 0. \quad (2.25)$$

$$T(x(t), t) = T_m, \quad t > 0, \quad x(0) = 0. \quad (2.26)$$

$$L \frac{dx(t)}{dt} = -\lambda(T) T_x(x(t)), \quad x = x(t), \quad t > 0, \quad (2.27)$$

$$T_x(\infty, t) = 0, \quad t > 0. \quad (2.28)$$

Задача (2.24)–(2.28) аналогично разд. 2.1 приводится к виду

$$u_t = u^2 u_{xx}, \quad x(t) < x < \infty, \quad t > 0, \quad (2.24')$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < \infty, \quad x(0) = 0, \quad (2.25')$$

$$u(x(t), t) = u_1, \quad t > 0, \quad (2.26')$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = u_2 \frac{\partial u(x(t), t)}{\partial x}, \quad t > 0, \quad (2.27')$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty, \quad t > 0. \quad (2.28')$$

Пусть при использовании преобразования (2.6) неизвестная граница $x = x(t)$ и полуось $[0, +\infty)$ плоскости x, t соответственно отображаются в кривую $y = y(t)$ и полуось $[0, +\infty)$ плоскости y, t . Тогда это преобразование задачи (2.24')–(2.28') переводит в задачу для линейного уравнения, имеющую вид

$$v_t = v_{yy}, \quad y(t) < y < \infty, \quad t > 0, \quad (2.29)$$

$$v(y(t), t) = u_1, \quad t > 0, \quad (2.30)$$

$$v(y, 0) = u_0(y), \quad 0 < y < \infty, \quad y(0) = 0, \quad (2.31)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{u_2 - u_1}{u_1^2} \frac{\partial v(y(t), t)}{\partial y}, \quad t > 0, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial v(y, t)}{\partial y} \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow +\infty, \quad t > 0. \quad (2.33)$$

Действительно, условия (2.30), (2.31) и (2.33) следуют из соотношений

$$u(x, t) = v(y, t), \quad u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial v(y, t)}{\partial y}.$$

Далее, из формулы (2.6) в силу вышесказанного получаем

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= v(y(t), t) \frac{\partial y(t)}{\partial t} + \frac{\partial v(y(t), t)}{\partial y}, \\ v(y(t), t) &= u(x(t), t), \\ u(x(t), t) \frac{\partial u(x(t), t)}{\partial x} &= \frac{\partial v(y(t), t)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

И, наконец, из (2.31), (2.32) и (2.34) следует краевое условие (2.32). Решение задачи (2.29)–(2.33) является автомодельным и определяется по формулам (см., например, [9]):

$$\begin{aligned} v(y, t) &= u_0 + \beta \frac{u_1^2}{u_2 - u_1} \exp(\beta^2/4) \times \\ &\times \left[\int_0^{y/(2\sqrt{t})} \exp(-\xi^2) d\xi - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right], \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$y(t) = \beta\sqrt{t}. \quad (2.36)$$

Постоянная β определяется из трансцендентного уравнения

$$\begin{aligned} 2\beta \exp(\beta^2/4) \left[\int_0^{\beta/2} \exp(-\xi^2) d\xi - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right] &= \\ &= \frac{(u_1 - u_0)(u_2 - u_1)}{u_1^2}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Уравнение (2.37) всегда имеет решение и притом единственное.

Далее, используя формулы (2.6), (2.35) и (2.36), нетрудно проверить, что решение задачи (2.24')–(2.28') определяется формулами

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0 - \beta \frac{u_1^2}{u_2 - u_1} \exp(\beta^2/4) \times \\ &\times \int_{y(x,t)/(2\sqrt{t})}^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi, \\ x(t) &= \frac{u_1 u_2}{u_2 - u_1} \beta\sqrt{t}, \end{aligned}$$

где функция $y(x, t)$ задается неявным образом, а именно уравнением

$$x = \left[u_0 - \frac{\beta \sqrt{\pi} u_1^2}{2 u_2 - u_1} \exp(\beta^2/4) \right] y + \beta \frac{u_1^2}{u_2 - u_1} \exp(\beta^2/4) \times \left[\sqrt{t} \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right) + y \int_0^{y/(2\sqrt{t})} \exp(\xi^2) d\xi \right]. \quad (2.38)$$

Уравнение (2.38) определяет однозначную функцию $y = y(x, t)$, так как $\partial x / \partial y = v(y, t) > 0$.

ОБОЗНАЧЕНИЯ:

x и t — координата и время;

$x(t)$ — координата границы раздела фаз;

$T(x, t)$ и T_e , T_m и T_s — текущее значение температуры и температура равновесия между орто- и парасостояниями водорода, температуры плавления и затвердевания;

C и λ — изобарная объемная теплоемкость, Дж/(м³К) и коэффициент теплопроводности твердого водорода, Вт/(м·К);

α — коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²К);

$q_w(t)$ — плотность теплового потока в ограничивающую поверхность тела, Вт/м²;

$T_f(\tau)$ — температура омывающей (замораживающей) среды;

L — объемная теплота затвердевания (плавления), Дж/м³;

χ — массовая концентрация ортоводорода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубовкин Н. Ф., Сапожкова Е. Ф. Развитие идей Ф. А. Цандера по использованию высокоэнергетических топлив // Идеи Ф. А. Цандера и развитие ракетно-космической техники. М.: Наука, 1983. С. 107–111.
2. Водород: свойства, получение, хранение, транспортирование, применение: Справочник

/ Под ред. Д. Ю. Гамбурга, Н. Ф. Дубовкина. М.: Химия, 1989. 672 с.

3. Свойства твердого и жидкого водорода. М.: Изд-во стандартов, 1969. 136 с.
4. Rosen G. Nonlinear heat conduction in solid H₂ // Phys. Rev. B. 1979. V. 19, No 4. P. 2398–2399.
5. Bluman G., Kumei S. On the remarkable nonlinear diffusion equation // J. of Math. Physics. 1980. V. 21, No 5. P. 1019–1023.
6. Рубинштейн Л. И. Проблема Стефана. Рига: Звайгзне, 1967. 457 с.
7. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 425 с.
8. Мейерманов А. М. Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 239 с.
9. Тихонов А. М., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.

ОБАВТОРАХ

Цирельман Наум Моисеевич, проф. каф. теории авиац. и ракетн. двигателей. Дипл. инж.-механик (Одесск. технологич. ин-т пищевой и холодильной пром-ти, 1963). Д-р техн. наук по математич. моделированию (защ. в Казанск. гос. техн. ун-те им. А. Н. Туполева, 1995). Исследования в области численно-аналитических и экспериментальных методов теплопереноса.



Жибер Анатолий Васильевич, профессор, ведущий научный сотрудник ИМ УНЦ РАН. Дипл. математик (Новосиб. гос. ун-т, 1969). Д-р физ.-мат. наук по дифференциальным уравнениям (защ. в ИМиМ УрОРАН, Екб., 1994). Исследования в области современного группового анализа дифференциальных уравнений.

