Уфа: УГАТУ, 2002 Вестник УГАТУ Т. 3, № 1. С. 53–59

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

А. С. КРИВОШЕЕВ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ИЗ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

Получен критерий аналитического продолжения функций из инвариантных подпространств в выпуклых областях комплексной плоскости. *Аналитическое продолжение; инвариантное подпространство; оператор свертки; целая функция*

Пусть D – выпуклая область в $\mathbf{C}$; $H(D)$ — пространство функций, аналитических в D, с топологией равномерной сходимости на компактах; $H^*(D)$ — пространство аналитических функционалов в D. Известно, что преобразование Лапласа функционалов $\mu \in H^*(D)$, задаваемое по формуле $f(z) = (\mu, \exp z\lambda)$, устанавливает изоморфизм между $H^*(D)$ и подпространством целых функций экспоненциального типа P_D, которое представляет из себя индуктивный предел банаховых пространств:

$$\mathrm{P}_D = \lim_{m\to\infty} ind\, \mathrm{B}_m,$$

$$\mathrm{B}_m = \left\{ g \in H(C) : \sup_{z\in C} |g(z)| \exp\left[-H_{K_m}(z)\right] < \infty \right\}.$$

Здесь $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ — последовательность выпуклых компактов из D такая, что $K_m \subset \operatorname{int} K_{m+1}$, $m = 1, 2, \dots$, и $\bigcup_m K_m = D$; $\operatorname{int} M$ обозначает внутренность множества M и

$$H_M(z) = \sup_{y\in M} \operatorname{Re} zy$$

— опорная функция M (точнее, комплексно сопряженного к M множества).

Для целой функции $f(z)$ экспоненциального типа через $h_f(z)$ и $\underline{h}_f(z)$ обозначим соответственно ее верхний и нижний индикаторы, т. е.

$$h_f(z) = \varlimsup_{t\to+\infty} \ln|f(tz)|/t,$$

$$\underline{h}_f(z) = \lim_{\delta\to 0} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{\pi\delta^2} \int\limits_{B(z,\delta)} \frac{\ln|f(ty)|}{t}\, d\sigma(y).$$

Из определений индикаторов легко следует, что они положительно однородны порядка один и выполнено неравенство $\underline{h}_f(z) \leqslant h_f(z)$, $z \in \mathbf{C}$. Если же в некоторой точке $z \in \mathbf{C}$ выполнено равенство $\underline{h}_f(z) = h_f(z)$, то говорят, что f имеет (вполне) регулярный рост на луче tz, $t > 0$. Отметим, что если $f \in P_D$, то из определений $h_f(z)$ и P_D сразу следует, что для некоторого $m \geqslant 1$ будет выполнено неравенство

$$h_f(z) \leqslant H_{K_m}(z) < H_D(z), \quad \forall z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}.$$

Обратно, если $h_f(z) < H_D(z)$, $\forall z$, то для некоторого $m \geqslant 1$ верна оценка $h_f(z) \leqslant H_{K_m}(z)$, $\forall z$. Тогда из теоремы Хартогса о верхнем пределе для семейств субгармонических функций нетрудно получить также оценку

$$|f(z)| \leqslant C \exp H_{K_{m+1}}(z), \quad \forall z \in \mathbf{C},$$

(где C – некоторая положительная постоянная), которая означает, что $f \in P_D$. Таким образом, необходимым и достаточным условием принадлежности целой функции f пространству P_D является неравенство

$$h_f(z) < H_D(z), \quad \forall z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}.$$

Пусть W — нетривиальное ($W \neq \{0\}$, $H(D)$) замкнутое подпространство в $H(D)$, инвариантное относительно оператора дифференцирования, т. е. вместе с каждой функцией оно содержит также и ее производную. Примером такого инвариантного подпространства может служить пространство

Работа подготовлена при поддержке гранта Президента РФ № 00-15-99283 и гранта РФФИ № 99-01-00655

решений из $H(D)$ системы однородных сверточных уравнений

$$\mathrm{M}_{\mu_i}[\varphi](z) = (\mu_i, \varphi(z+y)) \equiv 0, \quad \mu_i \in H^*(D), \quad i = 1, ..., n. \tag{1}$$

Пусть $f_1, ..., f_n$ обозначают соответственно преобразования Лапласа функционалов $\mu, ..., \mu_n$. Функции $f_1, ..., f_n$ называются характеристическими функциями операторов $\mathrm{M}_{\mu_1}, ..., \mathrm{M}_{\mu_n}$. Пусть $\lambda_j, j = 1, 2, ...$, — все общие нули функций $f_1, ..., f_n$ и $m_j, j = 1, 2, ...,$ их кратности, т. е. для каждого $j = 1, 2, ...$ имеют место равенства

$$\frac{d^k f_i(\lambda_j)}{dz^k} = 0, \quad i = 1, ..., n, \quad k = 0, ...m_j - 1$$

и существует номер i (зависящий от j) такой, что $d^{m_j} f_i(\lambda_j)/dz^{m_j} \neq 0$. Рассмотрим систему функций

$$\left\{ z^k \exp(\lambda_j z) \right\}_{j=1, k=0}^{\infty, m_j - 1}. \tag{2}$$

В силу выбора показателей λ_j и определения преобразования Лапласа легко показать (простым дифференцированием равенств (1)), что каждая функция из системы (2) является решением (1). Решения вида (2) называются элементарными решениями системы (1). Известно [1], что ядро оператора свертки, т. е. пространство W решений одного однородного сверточного уравнения, всегда допускает спектральный синтез. Другими словами, линейная оболочка функций из системы (2) (где роль последовательности $\{\lambda_j, m_j\}$ играет последовательность нулей и их кратностей характеристической функции оператора свертки) плотна в W. Пространства решений систем однородных уравнений свертки уже не всегда допускают спектральный синтез. Однако и в этом случае имеются простые достаточные условия и критерий допустимости спектрального синтеза, найденные в работах [2] и [3]. В этих же работах получен критерий допустимости спектрального синтеза и в более общем случае — для произвольных нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств W. Поясним, что здесь имеется в виду. Пусть $\mathrm{ort}\, W$ обозначает подпространство в $H^*(D)$, состоящее из всех функционалов, обращающихся в нуль на каждом элементе из W. Если W — не тривиально, то не тривиально также и $\mathrm{ort}\, W$. Символом $I_W(D)$ обозначим подпространство в P_D, состоящее из преобразований Лапласа всех функционалов из $\mathrm{ort}\, W$. Пусть $\{\lambda_j, m_j\}$ — последовательность всех общих нулей и их кратностей функций из $I_W(D)$, т. е. для каждого $j = 1, 2, ...$ имеют место равенства

$$\frac{d^k f(\lambda_j)}{dz^k} = 0, \quad f \in I_W(D), \quad k = 0, ...m_j - 1$$

и существует $f \in I_W(D)$ (зависящая от j) такая, что $d^{m_j} f_i(\lambda_j)/dz^{m_j} \neq 0$.

По последовательности $\{\lambda_j, m_j\}$ построим систему (2). Как и в случае систем уравнений свертки, говорят, что подпространство W допускает спектральный синтез, если линейная оболочка системы (2) плотна в W. Отметим, что если W допускает спектральный синтез, то множество $I_W(D)$ состоит из тех и только тех функций $f \in P_D$, которые обращаются в нуль в точках λ_j с кратностью, не меньшей, чем m_j. Действительно, если $f \in I_W(D)$, то по определению $I_W(D)$ верно включение $f \in P_D$, а по определению последовательности $\{\lambda_j, m_j\}$ функция f обращается в нуль в точках λ_j с кратностью, не меньшей, чем m_j. Обратно если функция f принадлежит P_D, то она является преобразованием Лапласа некоторого функционала $\mu \in H^*(D)$. Если, к тому же, f обращается в нуль в точках λ_j с кратностью, не меньшей, чем m_j, то из определения преобразования Лапласа легко следует, что функционал μ обращается в нуль на всех элементах системы (2). Пространство W допускает спектральный синтез, т. е. система (2) полна в W. Следовательно, μ будет обращаться в нуль на всем пространстве W, а потому μ принадлежит $\mathrm{ort}\, W$, а его преобразование Лапласа f принадлежит $I_W(D)$.

Уже давно было замечено, что функции, аналитические в выпуклой области и аппроксимируемые там экспоненциальными многочленами (т. е. линейными комбинациями функций вида (2)), могут аналитически продолжаться в более широкую выпуклую область. В связи с этим, естественно, возникла следующая проблема. Пусть $W \subset H(D)$ — инвариантное подпространство, допускающее спектральный синтез. При каких условиях каждая функция из W продолжается в некоторую выпуклую область $G \supset D$?

Первым результатом в этом направлении был, по-видимому, следующий результат А. Ф. Леонтьева, полученный им в работе [4]. Пусть φ — функция, аналитическая в окрестности отрезка мнимой оси $[-i\sigma\pi, i\sigma\pi]$ и являющаяся решением однородного уравнения свертки $\mathrm{M}_\mu[\varphi] = 0$ с характеристической функцией $f(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-(\lambda/\lambda_k)^2\right)$, где $k/\lambda_k \to \sigma \geqslant 0$. Тогда φ аналитически продолжается в некоторую вертикальную полосу, содержащую этот отрезок. Этот результат стимулировал целый ряд исследований по проблеме продолжения решений однородных сверточных уравнений. Отметим в этой связи работы Ж. П. Кахана [5], А. Ф. Леонтьева [6], А. Байле [7], И. Ф. Красичкова-Терновского [8]. Они посвящены различным частным случаям сверточных уравнений. В то же время легко прослеживаются моменты, присущие всем этим работам. Прежде всего, в них было замечено, что область, в которую продолжаются решения, зависит от углового распределения нулей характеристической функции оператора свертки. Кроме того, было замечено также, что продолжение можно осуществить, если потребовать выполнения подходящих оценок снизу на характеристическую функцию.

Общий случай инвариантных подпространств был впервые детально изучен в 1973 г. в работе И. Ф. Красичкова-Терновского [9]. Здесь были найдены различные достаточные условия продолжения. В частности, был получен следующий результат. Пусть $W \subset H(D)$ – нетривиальное инвариантное подпространство, допускающее спектральный синтез. Предположим, что в множестве $I_W(D)$ найдется функция f, которая имеет регулярный рост всюду в комплексной плоскости и такая, что для некоторой выпуклой области Ω верно равенство $D = \Omega + K$, где K — сопряженная диаграмма функции f, т. е. выпуклый компакт, опорная функция которого совпадает с индикатором $h_f(z)$. Тогда каждая функция из W аналитически продолжается в выпуклую область

$$D(W) = \{z \in C : \operatorname{Re} z\xi < H_D(\xi), \xi \in \Delta_f\}, \quad (3)$$

где Δ_f – подмножество единичной окружности $\mathbf{S}$ (с центром в начале координат), состоящее из предельных точек последовательности $\{\lambda_k/|\lambda_k|\}$ и $\{\lambda_k\}$ – все нули функции f.

Этот результат, по-видимому, казался на тот период неулучшаемым. В течение долгого времени не удавалось получить ничего более сильного, и внимание исследователей сосредоточилось на многомерном случае. В ряде работ были предприняты попытки перенести результаты из одной переменной на частный случай инвариантных подпространств функций многих переменных – пространства решений однородных сверточных уравнений. В этой связи отметим работы К. О. Киселмана [10], А. Себбара [11], А. Мерила и Д. К. Струппы [12], А. С. Кривошеева и В. В. Напалкова [13], Р. Ишимуры и Окада [14]. Наиболее общий результат для пространств решений однородных уравнений свертки был получен в работе [15]. Этот результат в отличие от результатов предыдущих работ оказался новым не только для многомерного, но и для одномерного случая. Общие инвариантные подпространства функций многих переменных были впервые рассмотрены в работе [16].

Здесь получены достаточные условия продолжения, которые на данный момент являются наиболее общими из всех известных как в случае многих, так и в случае одной переменной. Здесь также впервые получены необходимые условия продолжения, которые вместе с достаточными составляют критерий аналитического продолжения функций из инвариантных подпространств в гладких выпуклых областях комплексной плоскости. Отметим еще, что ранее во всех работах по нашей проблеме рассматривалась задача продолжения в максимально возможную выпуклую область $D(W)$, которая строится по исходной области D так же, как это сделано в (3). Однако, вообще говоря, возможна ситуация, когда функции из W не продолжаются в максимальную область, но все же продолжаются в некоторую большую, чем D, выпуклую область (лежащую, конечно, в $D(W)$). В связи с этим в работе [16] рассмотрена более общая задача продолжения в какую-либо фиксированную область G, содержащую D и содержащуюся в $D(W)$.

В данной работе мы ослабляем достаточные условия продолжения, полученные в [16] для случая одной переменной, и показываем, что они являются и необходимыми. Таким образом, мы получаем критерий аналитического продолжения функций из произвольных нетривиальных инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, в произвольных выпуклых областях комплексной плоскости. Кроме того, как и в [16], мы решаем более общую задачу продолжения в произвольную область G, содержащую D и содержащуюся в $D(W)$.

Прежде всего сформулируем результат, в котором описывается максимальная выпуклая область, в которую можно осуществить продолжение. Для этого введем еще некоторые обозначения. Пусть $W \subset H(D)$ – инвариантное подпространство. Через $\Lambda(W) = \{\lambda_j, m_j\}$ обозначим последовательность всех общих нулей функций из W и их кратностей, а через $E(W)$ — семейство функций вида (2), построенное по последовательности $\Lambda(W)$. Для выпуклой области D положим

$$D(W) = \{z \in C : \operatorname{Re} z\xi < H_D(\xi), \xi \in \Delta(W)\},$$

где $\Delta(W)$ — подмножество единичной окружности $\mathbf{S}$, состоящее из пределов всевозможных сходящихся подпоследовательностей последовательности $\{\lambda_j/|\lambda_j|\}$. Очевидно, что $\Delta(W)$ — замкнутое множество. Если $\Delta(W)$ совпадает с окружностью $\mathbf{S}$, то область $D(W)$ совпадает с D. В общем случае имеет место вложение $D \subseteq D(W)$, которое следует из представления

$$D = \{z \in C : \operatorname{Re} z\xi < H_D(\xi), \xi \in S\}.$$

Поэтому всегда выполнено неравенство

$$H_D(\xi) \leqslant H_{D(W)}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbf{C}.$$

С другой стороны, из определения $D(W)$ легко получаем

$$H_{D(W)}(\xi) \leqslant H_D(\xi), \quad \forall \xi \in \Delta(W).$$

Таким образом, имеет место равенство

$$H_{D(W)}(\xi) = H_D(\xi), \quad \forall \xi \in \Delta(W).$$

Предложение 1. *Пусть D — выпуклая область в C, $W \subset H(D)$ — нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство, допускающее спектральный синтез. Предположим, что все функции из W аналитически продолжаются в выпуклую область $G \supset D$ и аппроксимируются там линейными комбинациями элементов из $E(W)$. Тогда верно включение $G \subseteq D(W)$.*

Следующий результат сводит решение проблемы продолжения к решению эквивалентной задачи из теории целых функций.

Предложение 2. *Пусть D, G — выпуклые области, $D \subset G$; $W \subset H(D)$ — нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство, допускающее спектральный синтез. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1) Каждая функция из W аналитически продолжается в область G и аппроксимируется там линейными комбинациями элементов из $E(W)$.

2) Для любой функции $F \in P_G$ существуют функции $f \in I_W(G)$ и $g \in P_D$ такие, что верно равенство $F = f + g$.

Для формулировки основных результатов нам необходимо ввести еще некоторые обозначения.

Пусть ξ — точка $\mathbf{S}$ и $\delta > 0$. Через $\Pi(\xi,\delta)$ обозначим совокупность всех последовательностей $\{z_k\}$, обладающих следующими свойствами:

1) для каждого $k \geqslant 1$ точка z_k лежит на луче $\{t\xi, t > 0\}$;

2) $|z_k|$, монотонно возрастая, стремится к $+\infty$;

3) для каждого $k \geqslant 1$ выполнено неравенство $|z_{k+1}|/|z_k| \leqslant 1 + \delta$.

Открытый круг с центром в точке z и радиуса $r > 0$ обозначим $B(z,r)$.

Для выпуклой области $D \subset \mathbf{C}$ положим

$$\Theta_D = \{z \in \mathbf{C} : H_D(z) = +\infty\}.$$

Если D ограничена, то Θ_D — пустое множество. В противном случае Θ_D является углом с вершиной в начале координат, что вытекает из однородности H_D. Этот угол имеет раствор не меньше π, поскольку дополнительный угол $\mathbf{C}\backslash\Theta_D$ в силу выпуклости H_D является выпуклым, т. е. совпадает со всей плоскостью (когда D ограничена) или имеет раствор не больше π.

Пусть $G \subset \mathbf{C}$ — выпуклая область, содержащая D. Тогда выполнено неравенство $H_D(\xi) \leqslant H_G(\xi), \forall \xi \in \mathbf{C}$. Рассмотрим множество

$$J(D,G) = \{\xi \in \mathbf{S} : H_D(\xi) < H_G(\xi)\}.$$

Это множество не пересекается с углом Θ_D и, вообще говоря, не является ни открытым, ни замкнутым (в топологии единичной окружности $\mathbf{S}$). Если D ограничено, то $J(D,G)$ открыто. В общем случае каждая точка из $J(D,G)$, лежащая во внутренности множества $\mathbf{C}\backslash\Theta_D$, входит в $J(D,G)$ вместе с некоторой своей окрестностью (в топологии $\mathbf{S}$). Это сразу следует из определения $J(D,G)$, полунепрерывности снизу H_G и непрерывности H_D на множестве $\operatorname{int}(\mathbf{C}\backslash\Theta_D)$. Указанным свойством не обладают самое большее две точки (если они есть) из $J(D,G)$, которые лежат на границе $\partial\Theta_D$, но не принадлежат Θ_D. Если такие точки изъять из $J(D,G)$, то оставшееся множество будет открытым на $\mathbf{S}$ и его можно представить в следующих формах: $J(D,G)\backslash(\partial\Theta_D\backslash\Theta_D)$ или $J(D,G)\backslash\partial J(D,G)$.

Пусть Y^σ обозначает σ-вздутие Y.

Если $\mathbf{S}\backslash(J(D,G) \cup \operatorname{int}\Theta_D) = \varnothing$ (т.е. Θ_D является открытым и $J(D,G)$ совпадает с $\mathbf{S}\backslash\Theta_D$), то множество $J(D,G)\backslash\partial J(D,G)$ —

связно. Пусть $\mathbf{S}\setminus(J(D,G)\cup \operatorname{int}\Theta_D)$ – не пусто. Для каждого $\sigma>0$ из всех связных компонент множества $J(D,G)\setminus\partial J(D,G)$ выберем лишь те, которые не лежат целиком в $[\,\mathbf{S}\setminus(J(D,G)\cup \operatorname{int}\Theta_D)\,]^{\sigma}$. Объединение всех таких компонент обозначим J_σ. Множество J_σ состоит из конечного числа компонент. Это следует из того факта, что для каждой связной компоненты $U\subset J_\sigma$ расстояние между ее граничными точками превышает σ, поскольку в противном случае U целиком принадлежала бы кругу $B(\varsigma,\sigma)$, где ς – граничная точка U, которая лежит на множестве $\mathbf{S}\setminus(J(D,G)\cup \operatorname{int}\Theta_D)$. Такая граничная точка есть у любой компоненты $U\subset J_\sigma$. Лишь в одном случае, когда $\mathbf{S}\setminus(J(D,G)\cup \operatorname{int}\Theta_D)=\varnothing$ и который мы исключили, множество $J(D,G)\setminus\partial J(D,G)$ состоит из одной компоненты, обе граничные точки которой не принадлежат, естественно, пустому множеству $\mathbf{S}\setminus(J(D,G)\cup \operatorname{int}\Theta_D)$. Пронумеруем все компоненты J_σ в том порядке, в котором они встречаются при движении по окружности $\mathbf{S}$ против часовой стрелки. Соответственно этой нумерации обозначим их через $U_m(\sigma)$, $m=1,...,m(\sigma)$. При этом если область D ограничена, то в качестве $U_1(\sigma)$ возьмем любую компоненту. Если же D не является ограниченной, то в качестве $U_1(\sigma)$ возьмем ту компоненту, которая встречается первой при движении по $\mathbf{S}$ против часовой стрелки, начиная с какой-либо точки, лежащей в угле Θ_D. Для единообразия в случае, когда $\mathbf{S}\setminus(J(D,G)\cup \operatorname{int}\Theta_D)=\varnothing$, через $U_1(\sigma)$ для любого $\sigma>0$ обозначим множество $J(D,G)\setminus\partial J(D,G)$, состоящее из одной компоненты.

У нас все готово для формулировки достаточных условий продолжения.

Теорема 1. *Пусть D, G – выпуклые области, $D\subset G$, W – нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство в $H(D)$, допускающее спектральный синтез, и верно вложение $G\subseteq D(W)$. Предположим, что для любых $\sigma,\varepsilon,\delta>0$ найдется $\varphi\in I_W(D)$ такая, что для $m=1,...,m(4\sigma)$ и каждого $\varsigma\in\partial U_m(4\sigma)\setminus J(D,G)$ найдется $\xi\in[B(\varsigma,3\sigma)\setminus B(\varsigma,2\sigma)]\cap U_m(4\sigma)$ и последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}\in\Pi(\xi,\delta)$ такие, что*

$$\varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln|\varphi(z_k)|}{|z_k|}\geqslant H_D(\xi)-\varepsilon. \qquad (4)$$

Тогда каждая функция из W аналитически продолжается в область G и аппроксимируется там линейными комбинациями элементов из $E(W)$.

Замечание. Если $\mathbf{S}\setminus(J(D,G)\cup \operatorname{int}\Theta_D)=\varnothing$, то формулировка теоремы не содержит никаких условий, поскольку в этом случае точек $\varsigma\in\partial U_1(4\sigma)\setminus J(D,G)$ не существует.

Замечание. Сравним результат из теоремы 1 и соответствующий результат из теоремы 4 в работе [16]. Главным отличием этих результатов является оценка снизу на функцию $\varphi\in I_W(D)$. В теореме 1 в качестве такой оценки выступает неравенство (4), а в теореме 4 из [16] – следующее неравенство:

$$\underline{h}_\varphi(\xi)\geqslant H_D(\xi)-H_{G_0}(\xi)-\varepsilon, \qquad (5)$$

где G_0 – максимальная выпуклая область, такая, что

$$h_\varphi(z)+H_{G_0}(z)\leqslant H_D(z),\quad \forall z\in\mathbf{C}.$$

Заменяя, если это необходимо, функцию $\varphi\in I_W(D)$ на $\varphi\psi\in I_W(D)$, где $\psi\in P_{G_0}$ имеет регулярный рост во всей плоскости и индикатор h_ψ, мало отличающийся от функции H_{G_0} (такая ψ всегда существует), можно добиться того, чтобы неравенство (5) влекло за собой следующую оценку:

$$\underline{h}_\varphi(\xi)\geqslant H_D(\xi)-2\varepsilon.$$

Из нее следует, что для некоторой последовательности $\{z_k\}$, лежащей на луче $\{t\xi, t>0\}$ и такой, что $|z_k|\to+\infty$, имеет место неравенство

$$\varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln|\varphi(z_k)|}{|z_k|}\geqslant H_D(\xi)-c\varepsilon,$$

где $c>0$ не зависит от $\varepsilon>0$. Причем точки z_k, $k=1,2,...$, удовлетворяют условию $\varliminf\limits_{k\to\infty}\frac{|z_{k+1}|}{|z_k|}=1$. Последняя оценка означает, что выполнено (4). Однако в (4) на $\{z_k\}$ наложено более слабое ограничение $\frac{|z_{k+1}|}{|z_k|}\leqslant 1+\delta$. Таким образом, условие (5) влечет за собой (4). Обратное, вообще говоря, неверно. Даже если (4) выполнено, может оказаться, что $\underline{h}_\varphi(\xi)=-\infty$.

Сформулируем теперь необходимые условия продолжения.

Теорема 2. *Пусть D, G – выпуклые области, $D\subset G$, W – нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство в $H(D)$, допускающее спектральный синтез. Предположим, что каждая функция из W аналитически продолжается в область G и аппроксимируется там линейными комбинациями элементов из $E(W)$. Тогда имеет место вложение*

$G \subseteq D(W)$ и для любых $\sigma, \varepsilon, \delta > 0$ найдется $\varphi \in I_W(D)$ такая, что для $m = 1, ..., m(4\sigma)$ и каждого $\varsigma \in \partial U_m(4\sigma) \backslash J(D, G)$ найдется $\xi \in [B(\varsigma, 3\sigma) \backslash B(\varsigma, 2\sigma)] \cap U_m(4\sigma)$ и последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Pi(\xi, \delta)$ такие, что

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln|\varphi(x_k)|}{|x_k|} \geqslant H_D(\xi) - \varepsilon. \qquad (6)$$

Предположим дополнительно, что в множестве $I_W(D)$ существует функция φ_1 такая, что $\underline{h}_{\varphi_1}(\eta) \neq -\infty, \forall \eta \in J(D, G)$. Тогда вместо (6) имеет место более сильное неравенство

$$\underline{h}_{\varphi}(\xi) \geqslant H_D(\xi) - \varepsilon.$$

Из теорем 1 и 2 получаем следующий критерий аналитического продолжения функций из инвариантных подпространств в выпуклых областях из $\mathbf{C}$.

Теорема 3. *Пусть D, G — выпуклые области, $D \subset G$, W — нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство в $H(D)$, допускающее спектральный синтез. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) Каждая функция из W аналитически продолжается в область G и аппроксимируется там линейными комбинациями элементов из $E(W)$.

2) Имеет место вложение $G \subseteq D(W)$ и для любых $\sigma, \varepsilon, \delta > 0$ найдется функция $\varphi \in I_W(D)$ такая, что для каждого $m = 1, ..., m(4\sigma)$ и каждой точки $\varsigma \in \partial U_m(4\sigma) \backslash J(D, G)$ найдется $\xi \in [B(\varsigma, 3\sigma) \backslash B(\varsigma, 2\sigma)] \cap U_m(4\sigma)$ и последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Pi(\xi, \delta)$ такие, что

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln|\varphi(x_k)|}{|x_k|} \geqslant H_D(\xi) - \varepsilon.$$

Замечание. Последнее неравенство можно заменить на более сильное неравенство: $\underline{h}_{\varphi}(\xi) \geqslant H_D(\xi) - \varepsilon$, если в дополнение к условиям теоремы предположить, что $\underline{h}_{\varphi_1}(\eta) \neq -\infty$, $\forall \eta \in J(D, G)$, для некоторой функции $\varphi_1 \in I_W(D)$.

В случае ограниченных областей можно привести более простой по форме критерий продолжения.

Теорема 4. *Пусть D, G — выпуклые области в $\mathbf{C}$, $D \subset G$ и D ограничена. Пусть далее W — нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство в $H(D)$, допускающее спектральный синтез. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) Каждая функция из W аналитически продолжается в область G и аппроксимируется там линейными комбинациями элементов из $E(W)$.

2) Верно вложение $G \subseteq D(W)$ и существует функция φ такая, что

a) φ обращается в нуль в точках λ_j с кратностью, не меньшей, чем m_j;

b) $h_{\varphi}(\xi) \leqslant H_D(\xi), \quad \forall \xi$;

c) $\underline{h}_{\varphi}(\xi) = H_D(\xi), \quad \xi \in J(D, G)$.

Приведем еще один результат о принудительном аналитическом продолжении, в котором утверждается, что если функции из $W \subset H(D)$ продолжаются в выпуклую область G, то они автоматически продолжаются в некоторую максимальную выпуклую область, построенную по D и G.

Пусть D, G — выпуклые области и $D \subset G$. Положим

$$G(D) = \{z : \operatorname{Re}(z\xi) < H_D(\xi), \xi \in \mathbf{S} \backslash J(D, G)\}.$$

Очевидно, $G(D)$ является выпуклой областью.

Лемма 1. *Пусть D, G — выпуклые области и $D \subset G$. Тогда $G \subset G(D)$ и имеет место равенство: $J(D, G) = J(D, G(D))$.*

Теорема 5. *Пусть D, G — выпуклые области в $\mathbf{C}$, $D \subset G$. Пусть далее W — нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство в $H(D)$, допускающее спектральный синтез. Предположим, что каждая функция из W аналитически продолжается в область G и аппроксимируется там линейными комбинациями элементов из $E(W)$. Тогда каждая функция из W аналитически продолжается в область $G(D)$ и аппроксимируется там линейными комбинациями элементов из $E(W)$.*

Доказательство. Если условия теоремы выполнены, то будет иметь место утверждение теоремы 2. По лемме 1 $J(D, D(G)) = J(D, G)$. Поэтому будут выполнены условия теоремы 1, где в качестве области G нужно взять $G(D)$. Тогда будет иметь место и утверждение теоремы 1, что завершает наше доказательство.

Замечание. Область $G(D)$, вообще говоря, не совпадает с областью G. К примеру, рассмотрим какой-нибудь треугольник. В качестве D возьмем круг, вписанный в треугольник, а в качестве G — произвольную выпуклую область, содержащую D и содержащуюся в треугольнике, и граница которой пересекается с границей круга лишь в точках касания последнего с границей треугольника. Областью $G(D)$ в этом случае будет сам треугольник, который, безусловно, не обязан совпадать с G.

В заключение приведем результат, в котором описывается случай, когда функции из W продолжаются до целых.

Теорема 6. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, такая, что Θ_D — открытое множество. Пусть далее W — нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство в $H(D)$, допускающее спектральный синтез. Для того чтобы каждая функция из W была целой, необходимо и достаточно, чтобы имело место вложение $\Delta(W) \subset \Theta_D$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красичков-Терновский И. Ф.** Однородное уравнение типа свертки на выпуклых областях // ДАН СССР. 1971. Т. 197, № 1. С. 29–31.
2. **Красичков-Терновский И. Ф.** Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный анализ на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 87(129), № 4. С. 459–489.
3. **Красичков-Терновский И. Ф.** Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 88(130), № 1. С. 3–30.
4. **Леонтьев А. Ф.** Ряды полиномов Дирихле и их обобщения // Тр. МИАН. 1951. Т. 39. С. 1–215.
5. **Kahane J. P.** Sur quelques problemes d'unicite et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles // Ann. Inst. Fourier. 1953–1954. V. 5. P. 39–130.
6. **Леонтьев А. Ф.** О сходимости последовательности полиномов Дирихле // ДАН СССР. 1956. Т. 108, № 1. С. 23–26.
7. **Baillette A.** Approximation de fonctions par des sommes d'exponentielles // C. R. Acad. Sci. Paris, 1959. V. 249. P. 2470–2471.
8. **Красичков-Терновский И. Ф.** Сходимость полиномов Дирихле // Сиб. матем. журн. 1966. Т. 7. С. 1039–1058.
9. **Красичков-Терновский И. Ф.** Инвариантные подпространства аналитических функций. Аналитическое продолжение // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37, № 4. С. 933–947.
10. **Kiselman C. O.** Prolongement des solutions d'une equation aux derivees partielles a coefficients constants // Bull. Soc. Math. France. 1969. V. 97. P. 329–354.
11. **Sebbar A.** Prolongements des solutions holomorphes de certains operateurs differentiel d'ordre infini a coefficients constants // Lect. Not. in Math. 1980. V. 822. P. 199–220.
12. **Meril A., Struppa D. C.** Convolutors of holomorphic functions // Lect. Not. in Math. 1987. V. 1276. P. 253–275.
13. **Кривошеев А. С., Напалков В. В.** Комплексный анализ и операторы свертки // Усп. матем. наук. 1992. Т. 47, вып. 6 (288). С. 3–58.
14. **Ishimura R., Okada Y.** The existence and the continuation of holomorphic solutions for convolution equations in tube domains // Bull. Soc. Math. France, 1994. V. 122. P. 413–433; Матем. сб. 1993. Т. 184, № 8. С. 81–108.
15. **Кривошеев А. С.** Об индикаторах целых функций и продолжении решений однородного уравнения свертки // Матем. сб. 1993. Т. 184, № 8. С. 81–108.
16. **Кривошеев А. С.** Аналитическое продолжение функций из инвариантных подпространств в выпуклых областях комплексного пространства // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62, № 2. С. 75–102.

ОБ АВТОРЕ

Кривошеев Александр Сергеевич, профессор, гл. науч. сотр. Ин-та математики с ВЦ Уфимск. науч. центра РАН, профессор кафедры спецглав математики УГАТУ. Дипл. математик (БГУ, 1986), д-р физ.-мат. наук по матанализу (Екатеринбург, 1994). Исследования в области теории функций, функционального анализа.