Уфа: УГАТУ, 2002 Вестник УГАТУ Т. 3, № 1. С. 65–72

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

А. М. ГАЙСИН, Т. И. БЕЛОУС

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЯДОВ ДИРИХЛЕ С ЛАКУНАМИ ФЕЙЕРА

Изучается связь между ростом ряда Дирихле с лакунами Фейера и его убыванием на кривых, приближающихся к границе области сходимости. В самой общей ситуации установлены неулучшаемые оценки. *Ряды Дирихле; лакуны Фейера; максимальный член*

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{p_n\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}<\infty. \tag{1}$$

В этом случае говорят, что последовательность $\{p_n\}$ имеет лакуны Фейера. Аналогично, целая функция

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n \tag{2}$$

имеет лакуны Фейера, если последовательность $S(f)=\{n\geq 1 : c_n\neq 0\}$ имеет лакуны Фейера. В этом случае ряд (2) есть лакунарный степенной ряд вида

$$f(z)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^{p_n}\quad (a_n=c_{p_n}\neq 0). \tag{3}$$

Хорошо известно, что целая функция с лакунами Фейера принимает каждое комплексное значение бесконечно много раз [1]. Этот замечательный факт и другие соображения наводят на мысль о наличии у целых функций $f(z)$, заданных рядами (3), хороших асимптотических свойств. Это подтверждается многочисленными исследованиями, которые проводились специалистами по теории функций в течение многих лет (обзор литературы см., например, в [2]). В большинстве работ указаны достаточные условия, при выполнении которых справедливо утверждение: для любой кривой γ, уходящей в бесконечность, существует последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n\in\gamma$, $\xi_n\to\infty$, такая, что при $\xi_n\to\infty$

$$\ln M(|\xi_n|;f)=(1+o(1))\ln|f(\xi_n)|,$$

где $M(r;f)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$.

Впервые эта задача была сформулирована Полиа в работе [3] и решена для одного класса целых функций $f(z)$ вида (3), имеющих конечный порядок. В случае, когда функция $f(z)$ имеет конечный порядок или конечный нижний порядок, в последние годы получены окончательные результаты [17–19] (в [18, 19] соответствующие результаты установлены для более общих рядов — рядов Дирихле). Когда же целая функция $f(z)$ (даже имеющая лакуны Фейера) имеет произвольный рост, возникают существенные трудности, связанные с нерегулярным распределением точек последовательности $\{p_n\}$, и поэтому полученные до сих пор результаты были далеки от окончательных.

Сделаем краткий обзор результатов, имеющих непосредственное отношение к обсуждаемой здесь задаче. Прежде всего отметим следующий факт, установленный в работе [4]: для того чтобы любая целая функция вида (3) не была ограниченной на луче $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (1). Аналогичное утверждение имеет место и для рядов Дирихле [5]. Замена в этом утверждении луча $\mathbb{R}_+$ на произвольную кривую γ, уходящую в бесконечность, приводит к так называемой проблеме Макинтайра [4]. Поскольку мы преследуем другие цели, эта проблема нас здесь интересовать не будет.

Через L обозначим класс всех непрерывных, неограниченных, возрастающих на $[0,\infty)$ функций. Пусть

$$W=\{w : w\in L,\ \int_1^{\infty}\frac{w(x)}{x^2}dx<\infty\},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 99-01-00655.

$$\Omega = \{w \in W : \frac{w(x)}{x} \downarrow 0, x \to \infty\}.$$

Последовательность $\{p_n\}$ называется интерполяционной, если найдется функция $w \in \Omega$, зависящая только от последовательности $\{p_n\}$ и такая, что для любой последовательности $\{b_n\} \subset \mathbb{C}$, $|b_n| \leq 1$, существует целая функция экспоненциального типа $\varphi(z)$, обладающая свойствами

$$\varphi(p_n) = b_n \quad (n \geq 1),$$
$$\max_{|z|=r} |\varphi(z)| = M(r; \varphi) \leq e^{w(r)}.$$

Это определение дано в работе [6], хотя интерполяционный метод был использован А. И. Павловым еще в работе [7], где он показал, что если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty; \quad \frac{n}{p_n} \downarrow, \tag{4}$$

то

$$d(f; \gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \varliminf_{\substack{z \in \gamma \\ z \to \infty}} \frac{\ln |f(z)|}{\ln M(|z|; f)} = 1, \tag{5}$$

где $f(z)$ – целая функция, заданная рядом (3), а γ – любая кривая, уходящая в бесконечность. Отметим, что в этой теореме равенство (5) получено без каких-либо ограничений на рост функции $f(z)$. Ранее равенство (5) было установлено Т. Ковари для последовательностей $\{p_n\}$, таких, что [8]

$$p_n > n(\ln n)^{1+\epsilon} \quad (n \geq n_0, \epsilon > 0).$$

В [6] показано, что последовательности $\{p_n\}$, удовлетворяющие условиям (4), а также последовательности $\{p_n\}$, удовлетворяющие условию $p_n > cn \ln n [\ln \ln n]^{2+\eta}$ $(n \geq n_1, c > 0, \eta > 0)$, являются интерполяционными. Последовательности $\{p_n\}$, $p_n > cn \ln n [\ln \ln n]^2$, вообще говоря, не интерполяционные [9].

Таким образом, никак не связанные на первый взгляд условия Павлова и Ковари означают не что иное, как условие интерполяционности в смысле Коревара и Диксона.

Что же на самом деле означает условие интерполяционности?

В работе [9] установлен следующий критерий: для того чтобы последовательность $\{p_n\}$ была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $w \in \Omega$ такая, что:

$$n(t) \leq w(t), \quad n(t) = \sum_{p_n < t} 1;$$

$$-\ln \prod_{p_n/2 < p_k < 2p_n} \left| 1 - \frac{p_n}{p_k} \right| \leq w(p_n) \quad (n \geq 1).$$

В статье [10] понятие интерполяционных последовательностей распространяется на произвольные вещественные последовательности $\{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ и для таких последовательностей аналог равенства (5) доказывается для более общих рядов — рядов Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \tag{6}$$

сходящихся во всей плоскости.

Для интерполяционных последовательностей $\{\lambda_n\}$ автоматически выполняется условие [9, 10]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty. \tag{7}$$

Однако для интерполяционности последовательности $\{\lambda_n\}$ только этого условия недостаточно. При условии (7) ряды (6) будем называть рядами Дирихле с лакунами Фейера.

Пусть $0 < \lambda_n \uparrow \infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty,$$

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right), \tag{8}$$

$$q(\lambda_n) = -\ln |Q'(\lambda_n)|.$$

Справедлива следующая теорема [2].

Теорема А. *Пусть выполнено условие* (7) *и* $\alpha(t) = \max_{\lambda_n \leq t} q(\lambda_n)$. *Если*

$$\int_1^{\infty} \frac{\alpha(t)}{t^2} dt < \infty, \tag{9}$$

то

$$d(F; \gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \varliminf_{\substack{s \in \gamma \\ s \to \infty}} \frac{\ln |F(s)|}{\ln M(\operatorname{Re} s)} = 1, \tag{10}$$

где $M(\sigma) = \sup_{|t| < \infty} |F(\sigma + it)|$, *а* γ — *любая кривая, уходящая в бесконечность так, что если* $s \in \gamma$ *и* $s \to \infty$, *то* $\operatorname{Re} s \to +\infty$.

Условия (7), (9) означают следующее: существует функция $w \in W$, такая, что

1) $n(t) \le w(t)$;

2) $q(\lambda_n) \le w(\lambda_n)$ $(n \ge 1)$.

Эти же оценки следуют и из критерия интерполяционности работы [9], но с функцией $w \in \Omega$. Так что условия теоремы А менее ограничительны, чем условия интерполяционности. Действительно, пусть $\Delta_j = \left[2^{j^2} - [2^{j^2}/j^2], 2^{j^2}\right]$ ($[a]$ — целая часть a), а $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — возрастающая последовательность всех натуральных чисел из $\bigcup\limits_j \Delta_j$. В [11] показано, что для этой последовательности условия (7) и (9) выполнены, хотя она не интерполяционная. Видим, что условия теоремы А более слабые, чем условия интерполяционности. Но для справедливости теоремы А условие (7) необходимо: для любой последовательности $\{\lambda_n\}$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty,$$

существует целая функция $F(s)$ вида (6), для которой $d(F;\mathbb{R}_+) \le 0$ [4, 5].

До настоящего времени оставался открытым вопрос о том, каковы минимальные ограничения на последовательность $\{\lambda_n\}$, при которых для любой целой функции $F(s)$, заданной рядом (6) и имеющей произвольный рост, было бы справедливо равенство $\inf\limits_{\gamma\in\Gamma} d(F;\gamma) = 1$. Здесь $\Gamma = \{\gamma\}$ — семейство всех кривых γ, удовлетворяющих условиям теоремы А. Еще в работе [12] было высказано предположение о справедливости равенства $d(f;\mathbb{R}_+) = 1$ для любой целой функции с вещественными коэффициентами Тейлора, последовательность $\{p_n\}$ перемен знаков коэффициентов которой удовлетворяет лишь условию (1). В [12] было даже приведено доказательство этого сильного утверждения. Позднее обнаружилось,что в доказательстве есть серьёзный пробел, который М. Н. Шеремета не смог устранить, и гипотезу из [12] он сформулировал как открытую проблему. До сих пор существовала аналогичная гипотеза М. Н. Шереметы о справедливости равенства $d(f;\mathbb{R}_+) = 1$ или более общего равенства $\inf\limits_{\gamma} d(f;\gamma) = 1$ для произвольных целых функций (3), имеющих лакуны Фейера. Однако до последнего времени не был известен ответ ни на одну из этих гипотез, формулировки которых в той или иной форме неоднократно приводились в разделах открытых проблем ряда выпусков журнала «Математичні студії» (Львов) последних лет. Следует отметить, что обе гипотезы, по сути, сводятся к одной и той же задаче из теории целых функций [13]. Положительный ответ на последнюю гипотезу полностью разрешил бы проблему Макинтайра, в которой утверждается,что при условии (1) любая целая функция (3) не имеет конечных асимптотических значений. Но в работе [14] возникла новая гипотеза о том, что условие (9) теоремы А не может быть ослаблено: если интеграл (9) расходится, то существует целая функция $f(z)$ с лакунами Фейера, для которой $\inf\limits_{\gamma} d(f;\gamma) < 1$. Однако построение соответствующего примера даже для какой-то специальной последовательности $\{p_n\}$ оказалось весьма нелёгким делом.

В работе [2] построен следующий пример: для любой последовательности $\{p_n\}$ с лакунами Фейера, но для которой интеграл (9) расходится, имеется функция $f(z)$ вида (3), такая, что $d(f;\mathbb{R}_+) = 0$.

В общей ситуации, т. е. когда выполняется только условие (1), можно лишь утверждать, что $0 \le \inf\limits_{\gamma} d(f;\gamma) \le 1$ (см. следствие из теоремы 2), причём обе оценки точные. Таким образом, в статье [2] даётся отрицательный ответ на гипотезу М. Н. Шереметы и получено окончательное решение задачи Полиа из [3].

Аналогичную задачу можно рассматривать и для рядов (3), сходящихся лишь в единичном круге. Перейдем к конкретным формулировкам наших результатов.

1. РЯДЫ ДИРИХЛЕ, СХОДЯЩИЕСЯ ВО ВСЕЙ ПЛОСКОСТИ

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, удовлетворяющая условию

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln \lambda_n} = a < \infty, \tag{11}$$

$D_c(\Lambda)$ — класс всех функций F, представимых в полуплоскости $\Pi_c = \{s : \operatorname{Re} s < c\}$ $(-\infty < c \le \infty)$ рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \qquad (s = \sigma + it), \tag{12}$$

сходящимися лишь в данной полуплоскости. Пусть $F \in D_\infty(\Lambda)$. Из условия (11) следует, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0,$$

так что ряд вида (12) сходится во всей плоскости абсолютно и равномерно, а его сумма $F(s)$ – целая функция [15]. Наряду с рядом (12) введем в рассмотрение и ряд

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n e^{\lambda_n s}, \qquad (13)$$

где последовательность $\{b_n\}$ комплексных чисел b_n ($b_n \neq 0$ при $n \geq N$) удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \ln(|b_n| + |b_n|^{-1}) < \infty. \qquad (14)$$

Тогда ряд (13) также сходится во всей плоскости, причем абсолютно и равномерно, а $F^*(s)$ – целая функция.

Пусть $\mu(\sigma)$ и $\mu^*(\sigma)$ – максимальные члены рядов (12) и (13) соответственно, т. е

$$\mu(\sigma) = \max_{n\geq 1} \left\{ |a_n| e^{\lambda_n \sigma} \right\},$$

$$\mu^*(\sigma) = \max_{n\geq 1} \left\{ |a_n||b_n| e^{\lambda_n \sigma} \right\}.$$

В данном разделе считаем, что все исключительные множества, вне которых будут получены наши асимптотические оценки, представляют собой объединение конечного или бесконечного числа отрезков вида $[a_n, a_n']$, где $0 < a_1 < a_1' < a_2 < a_2' < \ldots < a_n < a_n' \ldots$. При этом исключительное множество имеет конечную меру, если $\sum_n (a_n' - a_n) < \infty$, и конечную логарифмическую меру, если $\sum_n \ln(a_n'/a_n) < \infty$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\{b_n\}$ – некоторая последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию (14). Для того чтобы для любой функции $F \in D_\infty(\Lambda)$ при $\sigma \to +\infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ конечной меры имело место асимптотическое равенство*

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma), \qquad (15)$$

необходимо и достаточно, чтобы для некоторой функции $w \in W$ выполнялись оценки

$$|b_n| + \frac{1}{|b_n|} \leq e^{w(\lambda_n)} (n \geq N). \qquad (16)$$

Эта теорема, хотя и представляет самостоятельный интерес, носит вспомогательный характер.

Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ имеет конечную верхнюю плотность D и конечный индекс конденсации δ, где

$$D = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n}, \quad \delta = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|Q'(\lambda_n)|}. \qquad (17)$$

Соответствующий класс целых функций $F(s)$, представимых во всей плоскости рядами Дирихле (12), будем обозначать через $B(\Lambda)$.

Отметим, что если, например, $\inf_n(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \tau > 0$, то $\delta < \infty$ (см., например, в [16]).

Введем в рассмотрение ряд Дирихле

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q'(\lambda_n) e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \qquad (18)$$

где a_n — коэффициенты ряда (12), а $Q(z)$ – функция, определенная формулами (8). Если последовательность Λ имеет нулевую плотность, то $Q(z)$, следовательно и $Q'(z)$, растет не быстрее целой функции первого порядка и минимального типа, так что ряд (18), по крайней мере, сходится (причем абсолютно и равномерно) в той же полуплоскости Π_c, $-\infty < c \leq \infty$, что и ряд (12). Если и индекс конденсации δ (17) последовательности Λ равен нулю, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln |Q'(\lambda_n)|}{\lambda_n} = 0$$

и области сходимости рядов (12), (18) равны Π_c [15]. Если $F \in D_\infty(\Lambda)$, то измененный ряд Дирихле вида (18) сходится во всей плоскости абсолютно и равномерно.

Пусть выполняется условие (7). Тогда функции $N(t)$ и $\ln M(t; Q)$ принадлежат W [16], где

$$N(t) = \int_0^t \frac{n(x)}{x} dx, \quad n(x) = \sum_{\lambda_j \leq t} 1,$$

$$M(t, Q) = \max_{|z|=t} |Q(z)|.$$

Введем следующее определение. Пусть $u \in L$, а $h = h(\sigma)$ – некоторая непрерывная на $[0, \infty)$ функция, $h(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to \infty$. Если $E_\beta \subset [0, \infty)$ – исключительное множество, вне которого при $\sigma \to \infty$ выполняется асимптотическое равенство

$$u(\sigma + (1 + \beta^{-1}) h(\sigma)) = u(\sigma) + o(1)$$

($0 < \beta < \infty$), то множество $[0, \infty) \setminus E_\beta$ будем называть β-асимптотическим множеством для пары функций (u, h). Через $\{e_\alpha(\beta)\}$

обозначим β-асимптотическое семейство для этой пары функций, состоящее из всех ее β-асимптотических множеств $e_\alpha(\beta)$.

Пусть $w(x) = \ln M(x \cdot e; Q)$. Тогда существует функция $w^* \in W$ такая, что $w^*(t) = \beta(t)w(t)$, $0 < \beta(t) \uparrow \infty$ [19]. Через $v = v(\sigma)$ обозначим решение уравнения

$$3\ln\mu(\sigma) = w^*(v). \qquad (19)$$

Пусть $k(\sigma)$, $\mu^*(\sigma)$ — центральный индекс и максимальный член ряда (18). Через $e_\beta = \{e_\alpha(\beta)\}$ обозначим такое β- асимптотическое семейство для пары функций (u,h), $u(\sigma) = \ln 3 + \ln\ln\mu(\sigma)$, $h = h(\sigma) = w^*(v(\sigma))/v(\sigma)$, что если $\sigma \in e_\alpha(\beta)$ и $e_\alpha(\beta) \in e_\beta$, то $\lambda_{k(\sigma)} \leq v(\sigma)$.

Пусть $\Gamma = \{\gamma\}$ — семейство всех кривых γ, удовлетворяющих условиям теоремы А. В этих обозначениях связь роста и убывания суммы ряда (12) устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть выполняется условие* (7), $\gamma \in \Gamma$. *Тогда для любой функции* $F \in D_\infty(\Lambda)$ *справедлива оценка*

$$q(F) \leq d(F), \qquad (20)$$

где

$$d(F) = \inf_{\gamma\in\Gamma} d(F;\gamma);$$

$$q(F) = \inf_{0<\beta\leq\frac{1}{5}} \sup_{\alpha} \varlimsup_{\substack{\sigma\in e_\alpha(\beta)\\ \sigma\to\infty}} \frac{\ln\mu^*(\sigma)}{\ln\mu(\sigma)};$$

$d(F;\gamma)$ — *величина, определенная формулой* (10); $e_\alpha(\beta) \in e_\beta$.

Замечание. *В условиях теоремы 2 семейство* $e_\beta = \{e_\alpha(\beta)\}$ *для каждого* β $(0 < \beta < \infty)$ *не пусто. При этом каждое* $e_\alpha(\beta)$ *получается исключением из* $[0,\infty)$ *некоторого множества* E_β *конечной меры.*

Следствие. *Для любой целой функции* $F \in D_\infty(\Lambda)$, *имеющей лакуны Фейера, имеют место оценки*

$$0 \leq \inf_{\gamma\in\Gamma} d(F;\gamma) \leq 1. \qquad (21)$$

Оценки (21) неулучшаемы. Действительно, точность правой границы следует из теоремы А. С другой стороны, для любой последовательности $\{\lambda_n\}$, удовлетворяющей условию (7), но для которой условие (9) не выполняется, существует функция $F \in B(\Lambda)$, такая, что $d(F;\mathbb{R}_+) = 0$. Это устанавливается нами при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 3. *Для того чтобы для любой функции* $F \in B(\Lambda)$ *с лакунами Фейера было справедливо равенство* $d(F) = 1$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (9).

Оценки (21) устанавливают связь между ростом и убыванием целой функции $F(s)$ на каждой кривой $\gamma \in \Gamma$. Действительно, из оценки $0 \leq d(F;\gamma)$ следует, что существует функция $\epsilon(r)$, $\epsilon(r) \downarrow 0$ при $r \to \infty$, существует последовательность $\{\xi_n\}, \xi_n \in \gamma$, такая, что при $\xi_n \to \infty$

$$\ln|F(\xi_n)| > -\epsilon(|(\xi_n)|)\ln M(Re\xi_n). \qquad (22)$$

Отметим, что аналогичная оценка для произвольных целых функций на фиксированном луче была установлена Берлингом в работе [20]: для любых $\epsilon > 0, \theta \in [0,2\pi)$ (θ — фиксировано) множество

$$\{r \in \mathbb{R}_+ : \ln|f(re^{i\theta})| > -(1+\epsilon)\ln M(r;f)\}$$

неограниченное.

Хейманом в работе [21] рассмотрена аналогичная задача в случае, когда вместо луча берется произвольная кривая, уходящая в бесконечность. Он показал, что если нижний порядок целой функции $f(z)$ конечен, то на всякой кривой γ, уходящей в бесконечность, для любого $\epsilon > 0$ существует последовательность $\{z_n\}, z_n \in \gamma, z_n \to \infty$, такая, что [21]

$$\ln|f(z_n)| > -(1+\epsilon)\ln M(|z_n|;f).$$

Там же утверждается, что эта оценка справедлива и для целых функций произвольного порядка.

Видим, что оценка (21) лучше соответствующих оценок Берлинга и Хеймана. Это объясняется тем, что в теореме 2 функция $F(s)$ имеет специальный вид, а именно является суммой ряда Дирихле с лакунами Фейера. Смысл оценки (21) в том, что при полнении условия (7) сумма целого ря рихле (12) не может сколь угодно убывать на любой последовательности то чек $\{\xi_n\}$, стремящейся к бесконечности вдоль кривой γ.

Таким образом, если из теоремы 2 вытекают неулучшаемые оценки для произвольных целых функций с лакунами Фейера на кривых, определенным образом уходящих в бесконечность, то теорема 3 дает полный ответ на поставленную в работе [3] проблему.

2. РЯДЫ ДИРИХЛЕ, СХОДЯЩИЕСЯ ЛИШЬ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Пусть

$$\underline{W}_\varphi = \{w \in W : \varliminf_{t\to\infty} \varphi(t)J(t;w) = 0\},$$

где $\varphi \in L$, а $J(t;w) = \int\limits_t^\infty \frac{w(x)}{x^2}dx$. Введем также множество $W_\varphi \subset \underline{W}_\varphi$:

$$W_\varphi = \{w \in W : \lim_{t\to\infty} \varphi(t)J(t;w) = 0\}.$$

Будем говорить, что две функции φ и w из класса L согласованы, если $\varphi(x)w(x) = o(x)$ при $x \to \infty$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ – последовательность, имеющая нулевую верхнюю плотность D и нулевой индекс конденсации (17).

Пусть функция F принадлежит классу $D_o(\Lambda)$. Как было отмечено в разд. 1, в этом случае $F^* \in D_o(\Lambda)$. Наша цель – перенести результаты разд. 1 на этот случай. Но при изучении асимптотических свойств рядов вида (12), (18), сходящихся лишь в полуплоскости, возникают специфические трудности, связанные с оценкой размеров исключительных множеств $e \subset [-1,0)$. Поэтому в случае полуплоскости поступают следующим образом. Фиксируется некоторая функция $\Phi \in L$ и выделяется некоторый подкласс функций $F \in D_o(\Lambda)$, удовлетворяющих, например, условию [22]:

$$\varliminf_{\sigma\to 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)} > 0,$$

(здесь $\mu(\sigma)$ – максимальный член ряда (12)). Тогда переменная относительная плотность

$$\Delta(\sigma) = \frac{m(e \cap [\sigma, 0))}{\sigma}$$

исключительного множества $e \subset [-1,0)$, вне которого для функции F справедливы интересующие нас оценки, зависит только от поведения величины

$$\varphi(t)\int\limits_t^\infty \frac{w(x)}{x^2}dx,$$

где φ – функция, обратная к Φ, а $w = w(x)$ – некоторая функция распределения последовательности Λ [22]. Если, например, $w \in \underline{W}_\varphi$ и $\varphi(x)w(x) = o(x)$ при $x \to \infty$, то, оказывается, нижняя плотность de множества e равна нулю (если $w \in W_\varphi$, то плотность De равна нулю) [22].

Далее, следуя работе [2], введем определение. Пусть $u = u(\sigma)$ – непрерывная, неубывающая на $[-1,0)$ функция, $u(\sigma) \to \infty$ при $\sigma \to 0-$, а $h = h(\sigma)$ – некоторая неотрицательная и непрерывная на $[-1,0)$ функция, такая, что $h(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to 0-$, причем $\sigma^{-1}h(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to 0-$. Если $E_\beta \subset [-1,0)$ – исключительное множество, вне которого при $\sigma \to 0-$ выполняется асимптотическое равенство

$$u(\sigma + (1+\beta^{-1})h(\sigma)) = u(\sigma) + o(1)$$

$(0 < \beta < \infty)$, то множество $[-1,0) \setminus E_\beta$ будем называть β-асимптотическим множеством для пары функций (u,h). Через $\{e_\alpha(\beta)\}$ обозначим β-асимптотическое семейство для этой пары функций, состоящее из всех ее β-асимптотических множеств $e_\alpha(\beta)$.

Пусть $\varphi \in L$, а последовательность Λ такова, что функция $w(x) = N(ex)$ принадлежит классу $\underline{W}_\varphi$. Если функции φ и w согласованы, то существует функция $w^* \in \underline{W}_\varphi$, также согласованная с φ, причем такая, что $w^*(t) = \beta(t)w(t)$, $0 < \beta(t) \uparrow \infty$ [22]. Поскольку $\underline{W}_\varphi \subset W$, то для принадлежности функции $N(ex)$ классу $\underline{W}_\varphi$ выполнение условия (7) необходимо [15].

Через $v = v(\sigma)$ обозначим решение уравнения

$$3\ln \mu(\sigma) = w^*(v), \tag{23}$$

где $\mu(\sigma)$ – максимальный член ряда (12). Пусть $\nu(\sigma)$ – центральный индекс ряда (12), а $k(\sigma)$, $\mu^*(\sigma)$ – центральный индекс и максимальный член измененного ряда Дирихле. Через $e_\beta = \{e_\alpha(\beta)\}$ обозначим такое β-асимптотическое семейство для пары функций (u,h), $u(\sigma) = \ln 3 + \ln\ln \mu(\sigma)$, $h = h(\sigma) = \frac{w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)}$ ($v = v(\sigma)$ – решение уравнения (23)), что если $e_\alpha(\beta) \in e_\beta$ и $\sigma \in e_\beta$, то $\lambda_{k(\sigma)} \le \lambda_{\nu(\sigma)}$. Через $\Gamma = \{\gamma\}$ обозначим семейство всех кривых γ из полуплоскости Π_o, предельные точки которых принадлежат мнимой оси. Будем считать, что Γ содержит и те кривые γ, которые обладают свойством: если $s \in \gamma$ и $Res \to 0-$, то $|s| \to \infty$.

В этих обозначениях имеет место

Теорема 4. *Пусть $\varphi \in L$, $w \in \underline{W}_\varphi$, где $w(x) = N(ex)$. Если функции φ и w согласованы, причем для функции $m(\sigma) =$*

$= \min(\mu^*(\sigma), \mu(\sigma))$ *выполняется условие*

$$\varliminf_{\sigma\to 0-} \frac{\ln m(\sigma)}{\Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)} > 0 \qquad (24)$$

(Φ — функция, обратная к φ), то для такой функции $F \in D_o(\Lambda)$ справедлива оценка

$$q(F) \le d(F). \qquad (25)$$

Здесь $d(F)$, $q(F)$ — величины, определенные формально точно так же, что и в теореме 2, но для функции $F \in D_o(\Lambda)$.

Замечание. *В условиях теоремы 4 семейство $e_\beta = \{e_\alpha(\beta)\}$ для каждого β $(0 < \beta < \infty)$ не пусто. При этом каждое $e_\alpha(\beta)$ получается выкидыванием из $[-1, 0)$ некоторого исключительного множества E_β нулевой нижней плотности.*

Теорема 5. *Пусть $\varphi \in L$, $w \in W_\varphi$, где $w(x) = N(ex)$. Если для функции $m(\sigma) = \min(\mu^*(\sigma), \mu(\sigma))$ выполняется условие*

$$\overline{\lim_{\sigma\to 0-}} \frac{\ln m(\sigma)}{\Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)} > 0 \qquad (26)$$

(Φ — функция, обратная к φ), то для такой функции $F \in D_o(\Lambda)$ имеет место оценка (25).

Следствие. *Для любой функции $F \in D_o(\Lambda)$, удовлетворяющей условиям теоремы 4 или теоремы 5, имеют место оценки*

$$0 \le d(F) \le 1. \qquad (27)$$

Точность правой границы в оценках (27) устанавливается следующей теоремой.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 4 или теоремы 5, причем оценки (24) или (26) имеют место для функции $\ln \mu(\sigma)$. Если для некоторой функции $\psi \in W_\varphi$*

$$-\ln |Q'(\lambda_n)| \le \psi(\lambda_n) \quad (n \ge 1),$$

то $d(F) = 1$.

Отметим, что для функций $F \in D_o(\Lambda)$ более слабый вариант теоремы 6 доказан в работе [22]. Что касается условий теоремы 6, они аналогичны необходимым и достаточным условиям соответствующей теоремы 3 и кажутся нам оптимальными. Но, однако, этот вопрос, как и точность левой границы в оценках (27), в случае полуплоскости далеко не простой и пока остается открытым.

Из оценки $0 \le d(F; \gamma)$ следует, что существует функция $\varepsilon(r)$, $\varepsilon(r) \downarrow 0$ при $r \to 0+$, существует последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n \in \gamma$, такие, что при $Re\xi_n \to 0-$

$$\ln |F(\xi_n)| > -\varepsilon(|Re\xi_n|) \ln M(Re\xi_n). \qquad (28)$$

Смысл оценки (28) заключается в том, что в условиях теорем 4 или 5 сумма F ряда Дирихле (12), сходящегося в полуплоскости Π_o, не может сколь угодно быстро убывать на любой последовательности точек $\{\xi_n\}$, стремящейся к мнимой оси вдоль любой кривой $\gamma \in \Gamma$.

Из теорем 1–6 легко получаются аналогичные утверждения для аналитических функций f, заданных в единичном круге $D(0, 1)$ степенными рядами (3). Чтобы убедиться в этом, необходимо сделать замену $z = e^s$. Только следует иметь в виду, что в теоремах 1–3 при такой замене исключительные множества $E \subset [0, \infty)$ конечной меры переходят на исключительные множества $e \subset [0, \infty)$ конечной логарифмической меры, а в теоремах 4–6 исключительные множества $E \subset [-1, 0)$ нулевой плотности (нижней плотности) переходят в исключительные множества $e \subset [-1, 0)$ нулевой логарифмической (нижней логарифмической) плотности. Это делается точно так же, как и в работе [22], поэтому формулировок соответствующих результатов для круга $D(0, 1)$ здесь не приводим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Fejér L.** Über die Wurzel vom kleinsten absoluten Betrage einer algebraischen Gleichung // Math. Annalen. 1908. P. 413–423.
2. **Гайсин А. М.** Оценка ряда Дирихле с лакунами Фейера на кривых // Докл. РАН. 2000. Т. 370, № 6. С. 735–737.
3. **Pólya G.** Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzeihen // Math. Z. 1929. V. 29. P. 549–640.
4. **Macintyre A. J.** Asymptotic paths of integral functions with gap power series // Proc. London Math. Soc. 1952. V. 2, No 2. P. 286–296.
5. **Евграфов М. А.** Об одной теореме единственности для рядов Дирихле // Усп. матем. наук. 1962. Т. 17, № 3. С. 169–175.
6. **Korevaar J., Dixon M.** Interpolation, strongly nonspanning powers and Macintyre exponents // Indag. Math. (N. S.) 1978. V. 40, No 2. P. 243–258.
7. **Павлов А. И.** О росте по кривым целых функций, заданных лакунарными степенными рядами // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 5. С. 1169–1181.

8. **Kövari T.** On the asymptotic paths of entire functions with gap power series // J. Analyse Math. 1965. V. 15. P. 281–286.
9. **Berndtsson B.** A note on Pavlov–Korevaar–Dixon interpolation // Indag. Math. (N. S.) 1978. V. 81. P. 400–414.
10. **Гайсин А. М.** Асимптотическое поведение суммы целого ряда Дирихле на кривых // Исследования по теории приближений. Уфа: БНЦ УрО АН СССР. 1989. С. 3–15.
11. **Гайсин А. М.** Асимптотическая оценка суммы ряда Дирихле на кривых // Матем. заметки. 1997. Т. 61, № 6. С. 810–816.
12. **Шеремета М. Н.** Об одном свойстве целых функций с вещественными тейлоровскими коэффициентами // Матем. заметки. 1975. Т. 18, № 3. С. 315–402.
13. **Sheremeta M. N.** Five open problems in the theory of entire functions // Математичні студії. 1996. V. 6. P. 157–159.
14. **Gaisin A. M.** Behavior of logarithm of modulus of the sum of Dirichlet series on curves // The J. of Analysis. Madras, India, 1995. V. 3. P. 205–211.
15. **Леонтьев А. Ф.** Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
16. **Леонтьев А. Ф.** Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука. 1980.
17. **Скаскив О. Б.** К теореме Вимана о минимуме модуля аналитических в единичном круге функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53, № 4. С. 833–850.
18. **Гайсин А. М.** Об одной гипотезе Полиа // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58, № 2. С. 73–92.
19. **Гайсин А. М.** Асимптотические свойства функций, заданных рядами экспонент // Дис. ... д-ра физ.-мат. наук.Уфа, 1994.
20. **Beurling A.** Some theorems on boundedness of analytic functions // Duke Math. J. 1949. V. 16. P. 355–359.
21. **Hayman W. K.** How quickly can an entire function tend to zero along curve? // Euseign Math. 1978. V. 24. No 3–4. P. 215–223.
22. **Гайсин А. М.** Поведение логарифма модуля суммы ряда Дирихле, сходящегося в полуплоскости // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58, № 4. С. 173–185.

ОБ АВТОРАХ

Гайсин Ахтяр Магазович, профессор, вед. науч. сотр. Ин-та математики УНЦ РАН, проф. каф. спецглав математики УГАТУ. Дипл. математик (БГУ, 1978). Д-р физ.-мат. наук по матанализу (Екатеринбург, 1996). Исследования по аппроксимации аналитических функций системами экспонент в комплексной области, по асимптотическим свойствам рядов из экспонент.

Белоус Татьяна Ивановна, ассист. каф. спецглав математики УГАТУ. Дипл. математик (БГУ, 1998). Подготовила диссертацию об асимптотических свойствах рядов Дирихле, сходящихся в полуплоскости.