Вестник УГАТУ
Уфа: УГАТУ, 2003
Т. 4, № 1. С. 20–34

ПРОБЛЕМЫ И КОНЦЕПЦИИ

УДК 681.5:51

Г. Н. ЗВЕРЕВ

ОБЪЕКТИВНЫЕ МНОГОЗНАЧНЫЕ ЛОГИКИ В ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

Статья посвящена приложению теории искусственного интеллекта к проблеме формализации информационной семантики логических систем, выделения объективированной составляющей неклассических логик, допускающей строгие оценки истинности и неопределенности фактических и априорных знаний. В четверичной шкале строятся обратные логические операции и уточняется семантика логического правила отделения модус поненс для неопределенных посылок и импликаций. *Троичная, четверичная, многозначная логики; информационная семантика; неопределенность правила вывода*

**Зверев
Геннадий Никифорович**

профессор кафедры проектирования средств информатики УГАТУ. Дипл. инженер-геофизик (Грозненск. нефтян. ин-т, 1958). Д-р техн. наук по геофизике (защ. в МИНХиГП, 1982). Заслуженный деятель науки и техники Республики Башкортостан. Автор более 200 научных и методических трудов. Исследования в области информатики и искусственного интеллекта.

Логический подход к созданию новых информационных технологий является в настоящее время, пожалуй, наиболее распространенным при разработке интеллектуальных и экспертных систем в различных предметных областях. В этих исследованиях двоичная классическая логика обычно заменяется какой-либо неклассической логикой, по-видимому, более соответствующей информационной ситуации и поставленной проблеме. Число и разнообразие неклассических логик – модальных, интуиционистских, конструктивистских, многозначных, индуктивных, вероятностных, размытых, правдоподобных, нечетких, диффузных, квантовых и т. д. [1–6] – экспоненциально растет со временем, вместе с тем эти логики пока не оказывают заметного влияния на теории и информационный инструментарий предметик, что свидетельствует о неблагополучии данного направления исследований и разработок.

Накопленный опыт с очевидностью показывает, что с позиций стоящих актуальных задач автоматизации человеческой деятельности основные трудности создания многозначных и других неклассических логик не математического или алгоритмического свойства, а имеют принципиально смысловой (семантический) характер, обусловленный отсутствием конструктивных определений истинности и неопределенности, общезначимых однозначно формализованных семантик неклассических логик, согласованных с традициями предметик, с проверенными способами оценок достоверности, изменчивости объектов, погрешности измерений, вычислений, рассуждений и последствий принимаемых решений. Успехи теоретической информатики в объективизации информационных процессов, в создании теории искусственного интеллекта позволяют надеяться на успешное преодоление указанных затруднений. В работе [7] на основе формализма схемы косвенного обращения дано строгое конструктивное определение эмпирической и теоретической истинности в единичной и в сомножестве единичных информационных ситуаций, описано обобщение классической двухзначной логики на размытые неопределенные ситуации и развит аппарат частотной (обобщенной вероятностной) логики, который оперирует частотными и логическими связями двоичных переменных. Настоящая статья посвящена другим строгим обобщениям классической логики, содержащим аппарат оценки истинности и ее неопределенности, формализованной в соответствии с принципами информационной семантики [8].

1. ОБЪЕКТИВИРОВАННЫЙ СУБЪЕКТ И ОБЪЕКТИВНЫЕ ЛОГИКИ С ИНФОРМАЦИОННОЙ СЕМАНТИКОЙ

Исходным пунктом формализации классической логики, идущим от стоиков, в частности, от Хризиппа, является **принцип двузначности** свойств и отношений, близкий по смыслу к логическим законам исключенного третьего и противоречия: каждое утверждение либо истинно, либо ложно. Реальные информационные процессы и знания о материально-информационной реальности не укладываются в жесткую схему двузначности всякого знания, но могут быть сведены (с некоторыми потерями информации и допустимыми приближениями) к наборам взаимосвязанных двузначных шкал, семантика которых может отличаться от оценок истины или ее отрицания — лжи, и примером этого могут служить модальные логики, оперирующие модальностями: возможно–невозможно, достоверно–недостоверно, закономерно–случайно, необходимо–ненеобходимо.

Первая многозначная логика появилась 80 лет назад — трехзначная логика *Я. Лукасевича* [9], в которой, помимо *истины* $= 1$ и *лжи* $= 0$, вводится «промежуточное» значение $= \frac{1}{2}$ с не вполне определенной семантикой: может быть, безразлично, случайно, возможно, ни истина, ни ложь. Через год Э. *Пост* предложил m-значную логику, $m \geqslant 2$, в которой вообще абстрагировался от истинности и неопределенности высказываний, представляя логику как теорию дискретных функций, заданных в конечнозначных шкалах [10]. Эти работы стимулировали появление большого разнообразия многозначных логик, однако неполнота формализации исходных понятий и типовых информационных ситуаций, отрыв от внелогических источников информации и потребителей результатов логических процессов, принимающих решения, не позволил достичь общезначимости и определить границы применимости новых логик, характерные для признанной во всех предметиках классической логики. Положение усугубляет широко применяемый в неклассических логиках аксиоматический подход, который привносит дополнительные семантические неопределенности интерпретаций логических формул и значений.

Построение информационной семантики многозначных логик начнем с уточнения понятий формализованного субъекта — «носителя» логики, его **знаний и умений**, а также понятия **логики с информационной семантикой**. Итак, познание и целевое преобразование материально-информационной реальности выполняют активные субъекты, вооруженные средствами наблюдения, вычисления, рассуждения. Биологический субъект с его не вполне изученными механизмами естественного мышления и речи, органами чувств, субъективными представлениями и интуицией заменяется в формализованной информационной семантике строго определенной моделью — системой **объективированного субъекта obsubj**, оснащенного сенсорами A, реферами B, эффекторами E [11, 7], которые функционируют в полном соответствии с известными законами природы, взаимодействуют с изучаемым явлением, порождают на выходе сенсоров A фактические данные о явлении, о внешнем мире (используя средства машинного зрения, слуха и другой измерительной техники), преобразуют реферами искусственного интеллекта внутри системы obsubj сенсорную информацию совместно с априорными данными системы в новые знания и эффекторные воздействия на внешнюю и внутреннюю среду системы obsubj. Преобразования A, B, E полагаем подконтрольными метрологическим и иным способам, т. е. выполняемые системой obsubj с определенной точностью.

Процесс получения системой obsubj знаний о каком-либо материальном объекте obj или процессе в наиболее общем виде описывается информационной моделью: $\mathrm{obj} \xrightarrow{A} y \xrightarrow{B} \hat{x}$, где $A(\mathrm{obj}) = y$ — результаты наблюдений, фактическая информация о свойствах obj, $B(y, J) = \hat{x}$ — результаты вычислений, рассуждений, обработки эмпирических y и априорных J данных об исследуемом объекте, о сенсорном и реферном процессе AB, это фактическая оценка свойств obj, отличная от истинного значения x. Информационный объект $\hat{x}$ носит название апостериорной информации об изучаемом объекте. Чтобы оценить достоверность, истинность знания $\hat{x}$, необходимо системе obsubj тем или иным способом узнать истину x, т. е. иметь в своем составе прецизионную подсистему — **аккуратор** C, более точную, чем подсистема AB, а также средство сравнения $\hat{x}$ и x — **адекватор** D, тогда мера адекватности ∇ или ошибки (ложности) есть $\Delta = \bar{\nabla} = D(\hat{x}, x), \hat{x} = AB(\mathrm{obj})x = C(\mathrm{obj})$. Источник A и преобразователь B экспериментальной и теоретической информации, идеальный источник целевой информации C и измеритель меры истинности D определяют конструктивную модель **адекватного процесса** оценки точности, достоверности $\nabla = \Delta^{-1}$ или погрешности Δ результатов основного информационного процесса, а применительно к классической и неклассическим логикам эта модель выражает внутреннюю структуру высказываний и предикатов $P(\mathrm{obj}) = ABCD(\mathrm{obj})$, конструктивно и функционально «привязанных» к источникам информации [7, 11].

Знания $xyJ\hat{x}\Delta$ и умения $ABCDE$ замкнутой системы obsubj будем считать вполне известными и точно воспроизводимыми. В открытых системах obsubj, как и в реальных информационно-материальных процессах, они могут искажаться, подвергаться учтенным либо неучтенным, не вполне известным воздействиям, поэтому модели в описаниях таких ситуаций помечаются сверху шляпкой, указывающей на возможные неопределенности и отклонения от некоторого объекта, принятого за эталон: $\Delta \neq \hat{\Delta}$, $J \neq \hat{J}$, $A \neq \hat{A}$ и т. д. В теоретической информатике [11] знание $\hat{x}$ свойств obj называется **основным**, а знание Δ или его оценка $\hat{\Delta}$ свойств знания $\hat{x}$ называется **адекватным** знанием, **метазнанием** — информацией об информации. Если нам известна оценка $\hat{x}$ неизвестных свойств x объекта, но ничего не известно о достоверности ∇ этой оценки, то с позиций информационной семантики знание $\hat{x}$ превращается в незнание, поэтому уточненное понятие знания свойств obj определяется в виде пары информационных объектов $(\hat{x}, \hat{\Delta})$, полученных основным и адекватным процессом познания obj, при этом неопределенность истинного значения x переносится на неопределенность также недоступного истинного значения Δ, которое заменяется оценкой $\hat{\Delta}$, полагая замену допустимой: $\hat{\Delta} \approx \Delta$, в противном случае определение знания усложняется [11].

Данное определение объективного знания вполне согласовано с конструктивным (более жестким, чем традиционные) **критерием познания**: материальные (скажем, шаровая молния, НЛО) либо информационные (естественный интеллект и язык) явления познаны, если они конструктивно воспроизводятся в искусственной контролируемой среде системой типа obsubj с заданной точностью и достоверностью: $\Delta \leq \Delta_{\text{г}}$ — допустимый граничный уровень неадекватности [11].

Все известные виды логик появились как результат формализации тех или иных фрагментов мышления, естественного языка и природных явлений. Проверить адекватность описания мышления и речи моделями психологии, физиологии, лингвистики и абстрактного представления этих моделей в логических системах пока не представляется возможным и в этом нет безусловной необходимости, так как мышление и речь моделируют реальность, представляя знания в среде естественного языка, поэтому достаточно проверить адекватность информационно-логического процесса описания реальности по его результативности, в соответствии с известным функциональным критерием Алана Тьюринга [12], по которому можно отвлечься от структурных различий естественного и искусственного интеллекта, оставляя подконтрольными воспроизводимые объективные знания. Материализация логических процессов и объективирование знаний состоят в конструировании физических объектов и процессов, воспроизводящих результаты логического вывода и оценки их адекватности (точности, достоверности). Такого типа логические системы и модели реальности называются **объективными логиками.**

В теории искусственного интеллекта вводят различные виды знаний-умений и соответствующие им виды семантик. На вход системы типа obsubj поступают знаки — носители знаний в виде измерительных, сенсорных сигналов, текстов естественного языка, математических моделей (формул, уравнений, алгоритмов), графических схем, аудио-видеоинформации, баз данных и т. д. При восприятии и переработке информации система obsubj присваивает входным и выходным знакам ту или иную семантику, описывающую их смысловые значения. В семиотическом аспекте различают дентовую (объектную) и контовую (модельную) конкретную и абстрактную семантику, в системологическом аспекте различают структурно-параметрическую, конструктивно-процедурную и дескриптивно-декларативную семантику информационных объектов и процессов [11]. Последняя является основной в логиках, в которых знания представлены формализованными текстами, состоящими из понятий, суждений (высказываний и предикатов), рассуждений, из взаимосвязанных описаний — дескрипций, выражающих свойства, связи объектов и знаний о них. Преобразования знаний, их истинностей и неопределенностей выполняются функциями с конструктивно-процедурной семантикой, к которой относят действия, вопросы, приказы, команды информационного взаимодействия. Так, формализованное выражение «если a, то b, иначе c» в классической логике с дескрипциями определяет отношения истинностей $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$: при $\underline{a}$ = истина объект $\underline{b}$ также есть истина, если же $\underline{a}$ = ложь, то справедливо высказывание c = «истинность b не определена», $\underline{c}$ = истина. В процедурной семантике, отличной от декларативной логической, это выражение интерпретируется как выполнение действий b либо c в зависимости от условия — предиката a. В этой же семантике выражение «если ..., то» описывает также функционально обусловленные причинные связи различных состояний или событий a, b, c: $a \to b$, *не*-$a \to c$. Далее ограничимся дескриптивно-декларативной семантикой логических конструкций в связи с тем, что предикаты и продукции (действия, функции) подчиняются разным формальным правилам.

Материальные и информационные объекты, процессы, действия, алгоритмы и знания о них характеризуются количественными (числовыми) и качественными (нечисловыми, дискретными) свойствами, состояниями, признаками, функциональными и реляционными моделями. Логические системы оперируют дискретными информационными объектами, свойства которых заданы в дискретных шкалах с конечной значностью $k \geqslant 2$. При $k = 2$ имеем простейшую модель двоичной различимости объектов по данному свойству. Эта модель является базисной в классической логике, в двузначных шкалах описываются все свойства, связи объектов, знаний и их истинностей, устанавливаемые базисным отношением равенства: $\hat{x} = x$ — истина либо его отрицания $\hat{x} \neq x$ — ложное знание $\hat{x}$.

Качественные характеристики объектов, имеющие более двух возможных значений, такие как цвет предмета, эмоциональное состояние человека, выражаются в многозначных дискретных шкалах: $x \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, в которых конкретное значение $x = x_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$ есть имя этого значения признака объекта, отождествляемое с именем класса, к которому относят объект по свойству x, скажем, x_1 = белый, x_2 = черный, ..., x_k = фиолетовый. Многозначное качественное свойство x объектов легко представить набором двоичных шкал, тогда x есть двоичный вектор $(x_1, x_2, \dots, x_k) = x \in \mathrm{Bit}^k$ — двоичное пространство размерности $k \geqslant 2$, $x_i \in \mathrm{Bit} = \{0, 1\}$. В определенной ситуации один какой-либо компонент вектора $x_i = 1$, остальные равны нулю, в неопределенных информационных ситуациях это условие может не выполняться. Любое количественное свойство объекта, скажем, вес, объем, скорость, после дискретизации числовой шкалы приближенно представляется двоичным вектором размерности k из двоичного пространства $\mathrm{Bit}^k, 2 \leqslant k < \infty$.

Мера истинности оценки $\hat{x}$ количественного либо качественного признака объекта, заданного в k-мерной двоичной шкале Bit^k, в определенной информационной ситуации определяется согласно канонам классической логики в двоичной логической шкале {истина, ложь} равенством двоичных векторов: $x = \hat{x}$ есть истинное знание $\hat{x}$, в противном случае $\hat{x}$ есть ложь, при этом в предметной семантике различают k видов истины $\hat{x}_i = x_i = 1$ и $k(k-1)$ видов лжи: $\hat{x} \neq x$, $\hat{x}_i = x_j = 1$, остальные компоненты векторов $\hat{x}$ и x равны нулю, $1 \leqslant i, j \leqslant k$, т. е. видов ошибок $i \neq j$ информационно-логического процесса с различными последствиями использования знания $\hat{x}$ в принятых решениях.

В неопределенных ситуациях возникает потребность более полной характеризации фактического $(\hat{x}, \hat{\Delta})$ и идеального x знания, ситуаций их получения, видов ошибок и адекватностей, вариативностей объектов и процессов их исследования, в связи с чем появились многозначные логические шкалы с многоаспектной характеризацией логического процесса. Эти шкалы также можно представить после дискретизации двоичным вектором $(h_1, h_2, \dots, h_r) = x \in \mathrm{Bit}^r$ размерности r. Двоичные характеристики $h_i \in \mathrm{Bit}$, $1 \leqslant i \leqslant r$ знания $(\hat{x}, \hat{\Delta})$ и процесса их получения выражают смысл меры истинности или погрешности после ее дискретизации (см. далее) либо имеют независимую семантику мер адекватностей или определенного вида неопределенности [8]. Именно эти аспекты стараются отразить в известных многозначных логиках. Далее ограничимся изучением строгих, объективных логик, моделирующих свойства внешней и внутренней среды системы obsubj, работы ее сенсоров и рефоров. Информационная семантика этих логик определяется дискретным представлением свойств и связей объектов, мер адекватности и формализованной неопределенности знаний в виде индефиниций конечнозначных переменных или эквивалентных им двоичных векторов [8, 11].

2. ЛОГИЧЕСКИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ. ТРИЛОГИКА

Простейшим строгим обобщением классической логики, имеющим те же границы общезначимости, что и классическая логика, а также внутренний аппарат точных объективных оценок истинности и ее неопределенности в рамках заданного формализма, является **трилогика** – троичная логика с информационной семантикой, в которой к двоичной шкале $\mathrm{Bit} = \{0, 1\}$ свойств объектов и их истинностей добавляется третье значение, имеющее формализованную информационную семантику – это знак внутренней неопределенности двоичного свойства или оценки его истинности: θ – криноль, круглый информационный нуль, в тексте, в таблицах данных обозначаемый также прочерком, $\theta = -$. Троичная шкала $\mathrm{Bit}_\theta = \{1, 0, \theta\} = \{1, 0, -\}$ выражает информационную семантику двоичных переменных – свойств объектов $\hat{x}$ или x в абстрактной троичной номинативной шкале {да, объект обладает свойством x; нет, не обладает; не знаю} и адекватных свойств Δ либо ∇ знания $\hat{x}$ в логической шкале {истина, ложь, истинность не знаю}. В трилогике, как и в классической логике, могут быть два типа истины $\hat{x} = x$: $\widehat{\text{да}} =$ да и $\widehat{\text{нет}} =$ нет, два типа лжи $\hat{x} \neq x$: $\widehat{\text{да}} \neq$ нет и $\widehat{\text{нет}} \neq$ да, а также два типа неопределенности: «значение переменной $\hat{x}$ неизвестно» и «значение истинности $\hat{\nabla}$ знания $\hat{x}$ неизвестно», при этом предполагается выполненным условие, определяющее внутреннюю неопределенность двоичных переменных: $\hat{x}, \hat{\nabla} \in \mathrm{Bit}$: знание $\hat{x}$ или его значение истинности ∇ есть либо 0, либо 1, либо $\theta \sim$ «значения $\hat{x}$ не знаю, но заведомо знаю, что оно равно 0 или 1»: $\theta = \{0, 1\} = \mathrm{Bit}$.

При нарушении условия $\hat{x} \in \mathrm{Bit}$ в силу ошибок исходной формализации либо реализации логического процесса, приводящих к абсурдным результатам, скажем, при $\hat{x} = 2$, возникает ситуация внешней противоречивой неопределенности $\hat{x} \bar{\in} \mathrm{Bit}_\theta$, выводящей значения логических переменных из области допустимых исходной формализацией значений. Эта абсурдная ситуация помечается знаком квиноль $\square$ – квадратным информационным нулем: $\Delta = \square$ либо $\hat{x} = \square$, вместо $\hat{x} = 2 \bar{\in} \mathrm{Bit}_\theta$. Знак квиноль вырабатывают контролирующие модули дедуктивных систем – предусловия и постусловия частичных предикатов и продукций, функций и реляций. Введение знака квиноль расширяет троичную шкалу до четверичной и превращает трилогику в **тетралогику.** Далее будет формализована семантика абсурдного противоречия и внешней неопределенности объектов тетралогики.

Знак криноль θ внутренней неопределенности не выводит информационно-логический процесс из области допустимых значений двоичных переменных, а лишь явно отличает неизвестные от известных и для них вводятся разные правила логических преобразований. Троичная шкала $\{1, 0, \theta\}$ значений двоичных переменных есть иерархическая шкала $\{1, 0, \{1, 0\}\}$, в которой знак криноль описывает незаданность либо внутренне противоречивую переопределенность задания значения двоичного номинативного либо логического признака и выражает смысл временного нарушения закона исключенного третьего: «иного значения, кроме 1 и 0, не дано» в виде принципа отложенного решения: «значение двоичной переменной пока не известно». В традиционных представлениях информационных процессов, формализованных в понятиях классической логики, также присутствует подобная неопределенность, но вне логических формул и правил вывода. Задается эта неопределенность так: естественный интеллект разделяет вне логического формализма двоичные переменные на известные и неизвестные, но вычислять логические функции или выполнять шаги логического вывода он может только по действительно или гипотетически известным данным и моделям. Явное введение в логические формализмы значений внутренней неопределенности θ с сохранением всех законов классической логики и естественной информационной семантики истинности и неопределенности расширяет возможности логических систем прежде всего за счет учета зависимостей между неопределенностями, между входом и выходом логической операции.

В работе [8] определены различные виды неопределенностей, их меры и модели, в частности, незаданность, изменчивость, ошибочность, противоречивость априорных знаний о свойстве x, его апостериорной оценки $\hat{x}$ и характеристики адекватности ∇ знания $\hat{x}$ истинному значению x. Построение трилогики начнем с предположения о том, что истинное значение свойства x есть либо 0, либо 1, $x \in \mathrm{Bit}$ – природные объекты имеют вполне определенные свойства, ошибок формализации информационной ситуации нет либо ими можно пренебречь – это так называемая **гипотеза Хризиппа** – и примем ее за истину. Мера истинности знания $\hat{x}$ в логической шкале Bit_θ определяется так: $\nabla = 1$ при $\hat{x} = x$, $\nabla = 0$ при $\hat{x} = \bar{x}$ – отрицание x, обозначаемое также в виде $\neg x$, $\nabla = \theta$ при $\hat{x} = \theta$ либо $x = \theta$. Последнее значение знания $\hat{x}$ возникает, во-первых, в априорной ситуации, когда сенсоры и рефоры системы obsubj еще не исследовали obj и определенное значение $\hat{x}$ не задано, и, во-вторых, в апостериорных ситуациях с противоречивой переопределенностью свойства x объекта либо множества объектов, когда одни источники информации системы obsubj получили оценки $\hat{x}_i = 1$, а другие $\hat{x}_j = 0$, при этом полученные оценки не противоречат априорике: $\hat{x}_i, \hat{x}_j \in \mathrm{Bit}$; если же все источники информации получили одно и то же значение свойства, то это случай полной однозначности знания $\hat{x}$ и его непротиворечивой переопределенности: все $\hat{x} = 0$ либо все $\hat{x} = 1$.

Переход от двух к трем возможным значениям логической шкалы сильно увеличивает разнообразие логических связок, функций, операций и служит прекрасной иллюстрацией выражения «комбинаторный взрыв»: трилогика имеет 3 константных операции произвольной арности $n \geqslant 0$ вместо двух в классической логике, 27 унарных операций (вместо 4), 19683 бинарных операций (вместо 16), $7{,}6 \cdot 10^{12}$ различных логических функций трех аргументов вместо 256 функций двоичной логики — точное их число равно 3^{3^n} вместо 2^{2^n}. Однако это разнообразие кажущееся из-за сильной формальной и семантической зависимости между функциями: так, в классической логике все функции можно выразить через одну — штрих Шеффера И-НЕ либо стрелку Пирса ИЛИ-НЕ. Решающим шагом сокращения разнообразия в троичной шкале и сохранения естественной семантики истинности и неопределенности знаний и метазнаний является перенос формул и правил классической логики в трилогику в соответствии с информационным **принципом поглощения внутренних неопределенностей.**

Этот принцип определяется так: пусть логическая функция $y = f(x)$ от двоичных переменных $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет на входе неопределенные значения некоторых аргументов $x_i = \theta, \ldots, x_j = \theta$, тогда выходу y функции $f(x)$ присваивается либо одно определенное значение $y \in \mathrm{Bit}$, если оно не изменяется при допустимых вариациях неопределенных переменных — это случай поглощения внутренних неопределенностей, — либо присваивается неопределенное значение $y = \theta$, если хотя бы одно значение функции в области допустимых вариаций неопределенных входных переменных отличается от остальных значений. В случае независимых неопределенностей $x_i = \theta_i, \ldots, x_j = \theta_j$ необходимо выполнить полный перебор всех возможных значений аргументов, например, для двух неопределенностей имеем множество $\{00, 01, 10, 11\}$, при зависимых вариациях переменных эта область сокращается, например, если $x_i = x_j$, то область есть $\{00, 11\}$, $\theta_i = \theta_j$, а если $x_i = \bar{x}_j$, то область вариаций есть $\{01, 10\}$, $\theta_i = \bar{\theta}_j$.

Помимо переносимых из классической логики, в трилогику вводят функции, непосредственно определяемые в троичной шкале, например, константная функция внутренней неопределенности $\theta(x)$ произвольной арности $n \geqslant 0$, значение которой равно θ независимо от значений фиктивных аргументов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, а также унарная функция истинности Фреге $y = \mathrm{Fre}(x)$ [11], равная 1 при $x = 1$ и 0 — в противном случае; при $x = 0, \theta$ эта функция поглощает неопределенность и переводит троичные значения в двоичную шкалу $\{1, 0\}$, приравнивая неопределенность лжи, и еще одна троичная операция $y = \mathrm{Fri}(x)$ — инверсная модификация истинностной функции Фреге — **функция сомнений в истинности**, которая задает обратный переход от определенной истины к неопределенности: $y = \theta$, если $x = 1$, в остальных случаях $\mathrm{Fri}(x) = 0$. При построении аппарата трилогики ограничимся этими функциями и всеми операциями двоичной логики, перенесенными в трилогику согласно принципу поглощения неопределенностей.

Начнем с унарных операций трилогики. В классической логике из четырех унарных операций две являются тривиальными константными операциями с неизменным выходом при любом входе: $0(x)$ — обнуление логических переменных $\sim$ «всё ложь» и $1(x)$ — присвоение $1 \sim$ «всё истина» (к ним мы добавим определенную выше третью и последнюю константную функцию трилогики: $\theta(x)$, «всё неопределенно»), а две нетривиальные унарные классические операции с изменяемым выходом есть $y = x$ — тождественное преобразование, сохраняющее исходную истинность, и $y = \bar{x}$ — отрицание, переводящее истину в ложь, а ложь в истину. В трилогике эти две операции совпадают с подобными классическими операциями при определенном $x \in \mathrm{Bit}$, а если аргумент не определен, $x = \theta$, то результат $y = \theta$ согласно принципу поглощения неопределенностей как для тождества, так и для отрицания, так как вариации x изменяют $y = x = \theta$ и $y = \bar{x} = \neg\{1, 0\} = \{\bar{1}, \bar{0}\} = \{0, 1\} = \theta = \bar{\theta} \sim$ «отрицание неопределенности есть неопределенность».

Все возможные операции трилогики различаются не только по арности, но и по выходным шкалам. Из двадцати семи унарных операций три константных имеют однозначные шкалы $\{1\}, \{0\}, \{\theta\}$, оставшиеся 24 функции разбиваются на 4 класса по 6 функций в каждом классе, имеющих двузначные и трехзначную выходные шкалы: 1) $\{0, \theta\} \sim$ «или ложь, или неопределенность», например, функция $\mathrm{Fri}(x)$; 2) $\{1, \theta\}$ $\sim$ «или истина, или неопределенность», этот класс операцией отрицания переводится в предыдущий; 3) $\{1, 0\}$ $\sim$ «или истина, или ложь», например функция $\mathrm{Fre}(x)$, а также функции классической логики от двоичных аргументов; 4) $\{1, 0, \theta\} = \mathrm{Bit}$ $\sim$ «всё возможно: истина, ложь, неопределенность», из шести унарных операций этого класса тождественное преобразование и отрицание $\bar{x}$, которое в трилогике называется базисным, были определены выше, оставшиеся четыре функции называются модифицированными отрицаниями, они выполняют парные и тройные перестановки истины, лжи и неопределенности в шкале Bit_θ.

Логические функции арности $n > 1$ получаются комбинацией унарных операций трилогики и бинарных операций двоичной логики, перенесенных в троичную шкалу в соответствии с принципом поглощения, при этом необходимо учесть возможные зависимости неопределенных вариаций. В принципе можно ограничиться одной базисной функцией классической логики — функцией Шеффера $a|b$ $\sim$ «свойства a и b несовместны» или функцией Пирса $a \downarrow b$ $\sim$ «ни a, ни b», однако базисное представление операций усложняет их логическую семантику, например, отрицание «не-a» свойства a есть $\bar{a} = a|a$ $\sim$ «свойства a и $\bar{a}$ несовместны», или логическое следование $a \to b$ $\sim$ «если a, то b» есть $a|\bar{b}$ $\sim$ «свойства a и не-b несовместны». Поэтому в семантических схемах с неопределенными и определенными истинностями двоичных переменных используют все 8 существенных бинарных операций — логических связок, имеющих непосредственно заданную семантику, при этом 4 функции есть отрицания остальных: 1) $a + b$ $\sim$«a или b», логическая сумма, дизъюнкция есть отрицание $a \downarrow b$; 2) $a \cdot b$ $\sim$ «a и b», логическое произведение, конъюнкция есть отрицание $a|b$; 3) $a - b$ $\sim$ «a без b», логическое вычитание есть отрицание импликации $a \to b$ $\sim$ «если a, то b»; 4) $a \leftrightarrow b$ $\sim$ «a равно b», логическая эквиваленция есть отрицание дифференции $a \oplus b$ $\sim$ «a не равно b», сумма по модулю 2.

Бинарные операции трилогики, построенные по принципу поглощения логических неопределенностей переменных классической логики в предположении, что неопределенности θ_a и θ_b независимы, сведены в табл. 1, в которой информационный ноль обозначен прочерком, в третьей колонке приведена единственная существенная унарная операция классической логики — базисное отрицание.

Таблица 1

N	a	b	$\bar{a}$	$a+b$	$a \cdot b$	$a-b$	$a \to b$	$a \leftrightarrow b$	$a \oplus b$	$a\|b$	$a \downarrow b$
1	0	–	1	–	0	0	1	–	–	1	–
2	–	0	–	–	0	–	–	–	–	1	–
3	1	–	0	1	–	–	–	–	–	–	0
4	–	1	–	1	–	0	1	–	–	–	0
5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
6	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1
7	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
8	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0
9	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0

Первые пять строк таблицы определяют операции с независимыми неопределенностями, четыре последние строки — с однозначно заданными аргументами, они формально строго и конструктивно определяют логические отношения классической логики в контовой семантике. Константа 0 (или 1) и переменная θ всегда независимы, особый случай представляет пятая строка, описывающая операции трилогики с двумя разными неопределенностями θ_a и θ_b, результат которых для всех операций не определен и равен θ. Если же a и b логически зависимы, то бинарные операции трилогики, по существу, становятся унарными и доопределяются в соответствии с принципом поглощения неопределенностей. В самом деле, возможны только два вида логических связей двоичных переменных, в первом случае $b = a$, тогда $a + b = a \cdot b = a = \theta$ — идемпотентность сложения и умножения, сохраняющая неопределенность, $a|b = a \downarrow b = \bar{a} = \theta$ — антиидемпотентность, также сохраняющая неопределенность результатов, $a - b = a \oplus b = 0$, $a \to b = a \leftrightarrow b = 1$ — это операции с поглощением неопределенности, во втором случае $b = \bar{a}$, тогда $a + b = a + \bar{a} = 1$ — закон исключенного третьего, $a \cdot \bar{a} = 0$ — закон противоречия, другие формы этих законов: $a \oplus \bar{a} = 1$, $a \leftrightarrow \bar{a} = a|\bar{a} = a \downarrow \bar{a} = 0$ — шесть функций поглощают неопределенность, а две их сохраняют: $a - \bar{a} = a = \theta$, $a \to \bar{a} = \bar{a} = \theta$.

Из определений табл. 1 логических операций и их уточнений для зависимых неопределенностей однозначно следуют все законы классической логики, правила символьных преобразований булевой алгебры, их справедливость в трилогике — в шкале Bit_θ с зависимыми и независимыми неопределенностями: ассоциативность и коммутативность сложения, умножения, эквиваленции, дифференции, законы дистрибутивности, де Моргана, поглощения констант и переменных, эти законы без всяких изменений переносятся в трилогику. Тавтологии — всегда истинные формулы: законы тождества $a \leftrightarrow a$, противоречия $\neg(a \cdot \bar{a})$, исключенного третьего $a + \bar{a}$ равны 1 по определению логических операций таблицей 1 и принципом поглощения неопределенностей, они семантически эквивалентны и сводимы по строгим правилам алгебраических преобразований к какому-либо одному закону, скажем, к последнему: $a \leftrightarrow a = a \cdot a + \bar{a} \cdot \bar{a} = a + \bar{a}$, $\neg(a\bar{a}) = a + \bar{a}$ — закон исключенного третьего, безосновательно опровергаемый интуиционистской логикой, а из определения базисного отрицания следует тавтология закона двойного отрицания: $\bar{\bar{a}} \leftrightarrow a$. В трилогике также справедливы законы контрапозиции $(\bar{a} \to b) = (\bar{b} \to a)$ и разложения эквиваленции $(a \leftrightarrow b) = (a \to b)(b \to a)$.

Функции многих переменных $(n > 2)$ выражаются через унарные и бинарные операции трилогики, например, в полиномиальной (дизъюнктивной) форме в виде суммы произведений троичных переменных либо их отрицаний, получаемой разложением Шеннона при независимых вариациях неопределенностей: функция от $(n+1)$ аргументов $(x, z) = (x_1, \ldots, x_n, z)$ представляется суммой двух функций меньшей арности, умноженных на z и $\bar{z}$: $f(x, z) = z \cdot f(x, 1) + \bar{z} \cdot f(x, 0)$.

3. ЛОГИЧЕСКИЙ ВЫВОД MODUS PONENS С ВНУТРЕННИМИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ

Помимо функциональной (конструктивно-процедурной) семантики операции трилогики имеют реляционную (дескриптивно-декларативную) семантику логических связок и отношений. В троичной шкале можно ввести естественный строгий $<$ и нестрогий $\leqslant$ порядок, полагая $0 < 1$, ложь < истина, нет < да, тогда три значения шкалы образуют всегда истинный нестрогий линейный порядок: $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $0 \leqslant \{0, 1\} \leqslant 1$, так как в отношениях $0 \leqslant \{0, 1\}$ и $\{0, 1\} \leqslant 1$ справедливы неравенства $0 \leqslant 0$, $0 \leqslant 1$, $1 \leqslant 1$ как для первого, так и для второго элемента множества θ. В реляционной семантике импликация $a \to b$ выражается в виде a $\leqslant b$, это неравенство нарушается и становится строго ложным лишь в одной ситуации из девяти возможных: $1 \leqslant 0 \sim$ «из истины следует ложь», в трех ситуациях $\theta \leqslant 0$, $1 \leqslant \theta$, $\theta_a \leqslant \theta_b$ импликация принимает неопределенное значение, в пяти оставшихся ситуациях импликация истинна, $\underline{a \to b} = 1$: «из лжи $a = 0$ следует все что угодно, $b = 0$, θ или 1», т. е. «из лжи ничего не следует» (строки 1, 6, 7 табл. 1); «из истины $a = 1$ следует истина $b = 1$» — последняя строка; особый случай представляет строка 4 $\sim$ «из неопределенности $a = \theta$ следует истина $b = 1$» есть логическая сумма двух истинных, по определению из табл. 1, утверждений: «из лжи (возможно) следует истина» и «из истины следует истина» — строки 7 и 8. Интерпретация формул логического следования вызывает затруднения и семантические парадоксы, связанные с совмещением смыслов вполне определенной логической функции $a \to b \sim$ «если ... то» (без «иначе») и частично определенной обратной бинарной логической функции модус поненс, которая по истинности одного входа $\underline{a}$ и истинности $\underline{a \to b}$ импликации определяет возможность оценки истинности $\underline{b}$ — второго входного объекта импликации. Логический вывод по схеме отделения модус поненс: $a, a \to b \vdash b \sim$ «если истинны факт a и правило $a \to b$, то заключение b также истинно» в реляционной семантике классической логики имеет следующее обоснование: в истинное неравенство $a \leqslant b$ подставляем $\underline{a} = 1$, тогда $\underline{b} = 1$ в силу соотношения $1 \leqslant b \sim$ «если a истинно, то b заведомо истинно в упорядоченной шкале $\{0, 1\}$, так как $\underline{b} \geqslant 1$».

Правило модус поненс не только остается верным в шкале $\{0, \theta, 1\}$ трилогики, но и расширяет область точных решений при возникновении зависимостей между неопределенностями и их поглощении. Это можно проиллюстрировать диаграммами Эйлера (рис. 1) в трех универсумах информационных ситуаций, в которых общее правило $a \to b = \forall \mathrm{obj}(a(\mathrm{obj}) \to b(\mathrm{obj}))$ принимает три различных значения истинности: $1, \theta, 0$ (кванторы общности $\forall$ и существования $\exists$ в трилогике, как и в классической логике, понимаются как логическое произведение $\prod$ и логическая сумма $\sum$ по всем объектам — информационным ситуациям универсума).

В универсуме U_1 импликация $a \to b$ истинна для всех объектов универсума, так как в нем существуют зависимости между определенными и неопределенными значениями свойств a и b, объектов универсума. Объекты, определенно обладающие свойствами $a(\text{obj}) = 1$ или $b(\text{obj}) = 1$, размещаются внутри кругов Эйлера, вне кругов непосредственно к границе истины примыкает ореол неопределенности $a(\text{obj}) = \theta_a$ или $b(\text{obj}) = \theta_b$ – показан штриховой границей и затемнением, вне ореола размещены объекты, определенно не обладающие свойствами a и b. Номера зон на диаграмме соответствуют различным сочетаниям истинностей аргументов — номерам строк табл. 1. Общая истинность импликации в U_1 обусловлена логической зависимостью переменных $a, b \in \text{Bit}_\theta$: круг a вместе со своим ореолом вложен в круг b, иными словами, неопределенность посылки a не выводит из класса объектов $b = 1$, следовательно, ситуации, в которых импликация ложна (строка 8) или неопределенна (строки 2, 3, 5), отсутствуют в универсуме U_1. Правило логического вывода модус поненс при такой зависимости формулируется так: «если импликация $a \to b$ истинна и посылка a истинна или неопределенна, то заключение $b(\text{obj})$ истинно» — это верно для всех объектов внутри штриховой окружности a, при ложности посылки $a(\text{obj})$ правило вывода никак не определяет свойство $b(\text{obj})$, оно может быть равно 1, либо θ, либо 0 в зависимости от случайного положения объекта на диаграмме U_1.

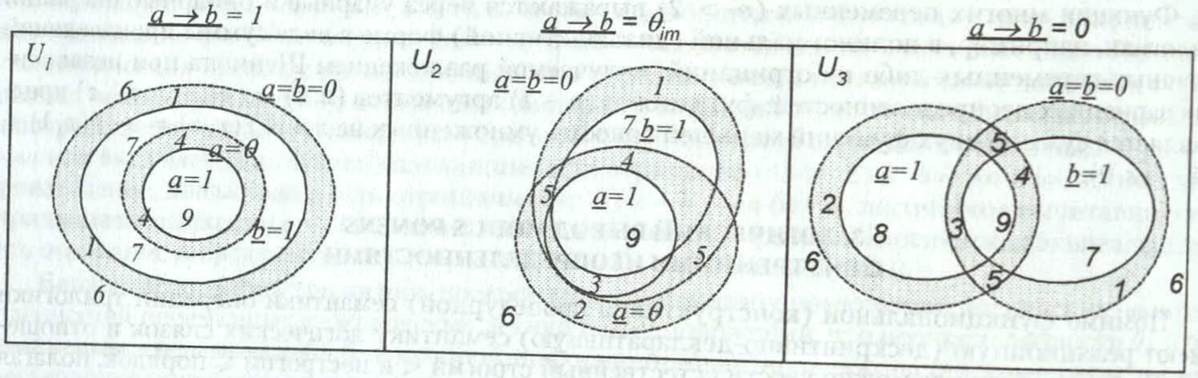

Рис. 1

В универсуме U_2 общее правило $a \to b$ принимает значение неопределенности импликации θ_{im}, так как в U_2 существуют зависимости между неопределенностями θ_a и θ_b, выраженные в отсутствии в U_2 информационных ситуаций, соответствующих ложности импликации — строка 8 табл. 1. Модус поненс в U_2 учитывает зависимости между неопределенностями θ_a и θ_{im} и формулируется так: «если импликация $a \to b$ неопределенная, а посылка $a(\text{obj})$ есть истина, то заключение $b(\text{obj}) = \theta \geqslant 0$ не есть достоверная ложь, а лишь неопределенность, которая может быть истиной» — сравни со значениями $a = \theta, b = 1$ в строке 4. При неопределенности посылки $a(\text{obj}) = \theta$ заключение $b(\text{obj})$ произвольное, оно равно либо 1, либо 0, либо θ — правило модус поненс становится полностью неопределенным, как и в универсуме U_3 общего положения классов объектов со свойствами a и b, между которыми отсутствуют логические связи и возможны все 9 сочетаний значений троичных переменных.

4. СИНТАКСИЧЕСКИЕ И СЕМАНТИЧЕСКИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Семантика логических связок и функций произвольной арности $n > 2$ определяется семантикой унарных и бинарных операций трилогики, которые интерпретируют криноль θ лишь как возможность присваивания логическому признаку или функции единичного или нулевого значения, при этом важно различать логико-семантический и синтаксический аспекты операций и значений переменных. Так, равенства $0 = \theta, 1 = \theta, \theta_a = \theta_b$ принимают логические значения θ (колонка $a \leftrightarrow b$ табл. 1), хотя на синтаксическом уровне эти равенства ложны, так как знаки 0, 1, θ по определению логической шкалы различны и удовлетворяют отношению строгого неравенства $\neq$. Подобное различие вводится и при интерпретации отрицания в шкале $\{1, 0, \theta\}$: на семантическом уровне справедливы равенства $\bar{0} = 1, \bar{\theta} = \theta$ — отрицание неопределенности не есть определенность, на синтаксическом (формально-математическом) уровне отрицание одного из множества допустимых значений дискретной шкалы есть дополнение-подмножество, состоящее из остальных значений — это **синтаксическое отрицание**, по определению, лежащее вне логической семантики истинности и ее неопределенности: $\tilde{1} = \{0, \theta\}, \tilde{0} = \{1, \theta\}, \tilde{\theta} = \{0, 1\} = \theta = \bar{\theta}$ — результаты семантического и синтаксического отрицания внутренней неопределенности совпадают.

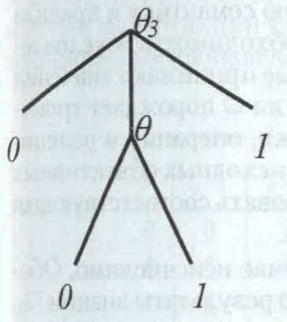

Рис. 2

Информационно-логическая семантика синтаксических отрицаний определенных значений $\tilde{1}$ и $\tilde{0}$ троичной логической шкалы уточняется теоретико-множественной интерпретацией вариаций значений знания $\hat{x}$ и его истинности $\hat{\nabla}$ в этой шкале в соответствии с принципом поглощения неопределенностей. Полная синтаксическая неопределенность переменных трилогики $\theta_3 = \{0, \theta, 1\}$ совпадает с ее шкалой Bit_θ и имеет иерархическую структуру (рис. 2): при синтаксическом отрицании определенных значений 0 или 1 остаются в результате подмножества $\{\theta, 1\}$ или $\{0, \theta\}$, которые на семантическом уровне трилогики имеют ту же неопределенность $\theta = \mathrm{Bit}$. В самом деле, в семантике трилогики есть два значения истинности и только один вид неопределенности, поэтому полная синтаксическая иерархическая неопределенность — дерево θ_3 и его поддеревья $\tilde{1}$ и $\tilde{0}$ путем абстракции от иерархии логической шкалы, выполняемой снятием оболочек (скобок), превращаются в простые, неиерархические сомножества $\theta_3 \to \{0, 0, 1, 1\}$, $\tilde{1} \to \{0, 0, 1\}$, $\tilde{0} \to \{0, 1, 1\}$, а затем, в соответствии с теоретико-множественным принципом поглощения неразличимостей и абстракцией от численности, сомножества превращаются в множество внутренней неопределенности: $\theta_3, \tilde{1}, \tilde{0} \to \{0, 1\} = \theta$ [11].

Синтаксические и семантические неопределенности информационных ситуаций порождаются и выявляются сенсорами и реформами системы obsubj. Если фактических данных о свойстве x объекта нет, то оценка x выполняется по априорной информации $J_x = \{x \in \mathrm{Bit}\}$, отсюда $\hat{x} = \theta$. Если есть одна или более оценок $\hat{x}_j = AB(x, v_j)$ свойства x, полученных процедурами AB системы obsubj, где v_j — помехи, ошибки наблюдений, вычислений, $1 \leqslant j \leqslant N$ — число источников информации, то результирующая оценка $\hat{x}$ принимается равной 0, если все $\hat{x}_j = 0$, или 1, если все $\hat{x}_j = 1$, и искажениями v_j можно пренебречь, если же часть источников выдает значение 0, а другая часть — значение 1, то результирующая оценка $\hat{x}$ в троичной шкале может быть любой — 0, 1, θ, в зависимости от объема фактических данных, целей и критериев решаемой задачи. Более адекватным описанием реальности в подобных ситуациях является аппарат частотной логики, в котором нет необходимости абстрагироваться от численности сомножеств [7]. Заметим также, что противоречия в оценках свойства x в двоичной шкале разными источниками информации не являются логическими противоречиями, так как оценка $\hat{x}_j$ зависит не только от x, но и от помехи v_j, значение которой неизвестно. Это лишь кажущееся противоречие, лежащее в границах внутренней неопределенности $x = \theta$, оно превращается в действительное противоречие, разрушающее логический формализм, если предположить, что ошибки априорики J и ошибки фактических данных v_j равны нулю, тогда множество возможных решений $\hat{x}$ становится пустым.

Введенные выше троичные унарные операции $\mathrm{Fre}(x)$, $\mathrm{Fri}(x)$ различают синтаксические и семантические неопределенности, сужают или расширяют логические шкалы, допустимые априорикой информационной задачи. Функция Фреге отличает истину 1 и ложь 0 от синтаксического отрицания лжи $\tilde{0}$ и истины $\tilde{1}$, это преобразование используется при формализации строгих математических рассуждений, не допускающих неопределенностей, которые этим преобразованием приравниваются лжи. Подобным образом поступают при реализации систем логического программирования типа Prolog, однако в информационной семантике существенно различать достоверную ложь и неопределенность результата, ведущих к разным действиям и последствиям. Далее нам понадобится еще одна модификация функции Фреге, выделяющая неопределенности: $\mathrm{Fru}(\theta) = 1$, а при определенных $x \in \mathrm{Bit}$ $\mathrm{Fru}(x) = 0$. Эта функция выражается через $\mathrm{Fre}(x)$, и обратно, функция Фреге выразима через $\mathrm{Fru}(x)$: легко убедиться, что $\mathrm{Fru}(x) = \neg(\mathrm{Fre}(x) + \mathrm{Fre}(\bar{x})) = \overline{\mathrm{Fre}}(x) \cdot \overline{\mathrm{Fre}}(\bar{x})$, $\mathrm{Fre}(x) = x\overline{\mathrm{Fru}}(x)$, поэтому в качестве минимального базиса трилогики можно взять три функции $\{x|z, \mathrm{Fre}(x), \mathrm{Fri}(x)\}$ либо $\{x|z, \mathrm{Fru}(x), \mathrm{Fri}(x)\}$. Вторая функция минимального базиса устраняет синтаксические и семантические неопределенности, а третья функция вводит семантическую неопределенность.

5. ОБРАЩЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. ТЕТРАЛОГИКА

Чтобы построить обратные функции двоичной и троичной логики с информационной семантикой, играющих заметную роль в задачах формализации логического вывода, диагностики, распознавания образов, необходимо расширить шкалу трилогики и ввести знак внешней неопределенности — знак квиноль $\Box$, — определить его информационную семантику и правила преобразования совместно с другими логическими значениями. Эта необходимость обусловлена тем, что абсурд может возникнуть даже в случаях, когда все переменные принимают значения из шкалы Bit_θ, см. далее. Введение в логические шкалы квадратного нуля $\Box$ порождает троичные $\{0,1,\Box\}$, $\{1,\theta,\Box\}$, $\{0,\theta,\Box\}$ и четверичную $\{0,1,\theta,\Box\}$ шкалы и логики, операции и реляционные связки, их информационно-логическую семантику, зависящие от исходных объективных ситуаций и последствий логического вывода, которые и должна моделировать соответствующая многозначная логика.

Разнообразие ситуаций с внешней неопределенностью в общем случае неисчислимо. Обозначим произвольную противоречивую информационную ситуацию и ее результаты знаком $\Box_0$, полагая, что при анализе можно представить возникший абсурд более конкретными и однозначно формализованными его представителями: $\Box_0 = \{\Box, \Box_1, \ldots\}$, которые описывают различные виды нарушений хода логического процесса, наличия в нем грубых ошибок в исходных данных, в формализации информационной задачи, ее априорики, содержащей абсурдные модельные соотношения, фатальные искажения промежуточных и конечных результатов. Вместе с тем могут быть и несущественные бессмыслицы, которые не влияют решающим образом на ход и итог логического вывода.

Рассмотрим две, в некотором смысле предельные, формализации абсурда: 1) максимальный квиноль $\Box$ описывает фатальную ошибку, искажающую все последующие результаты, полученные по искаженному знанию, — это случай фатального абсурда; 2) минимальный квиноль $\Box_1$ описывает несущественную, исправимую бессмыслицу значений слабоинформативных логических переменных, которые можно исключить из логических функций, если им присвоено значение исправимого абсурда $\Box_1$. Пожалуй, основной в информационно-логических процессах является первая формализация, используемая в **тетралогике** со шкалой $\{1,0,\theta,\Box\}$, вторая имеет более скромные приложения. Итак, в тетралогике вводятся следующие правила преобразования максимального абсурда $\Box$: если на входе n-арной операции встречается хотя бы один знак $\Box$, то результату присваивается этот знак: $\Box = \mathrm{Fre}(\Box) = \mathrm{Fri}(\Box) = \bar{\Box}$, $a + \Box = a \cdot \Box = \ldots = \Box$, тогда часть логического процесса и его результатов, «пораженных» фатальными ошибками, будет помечена знаком **квиноль** и в последующем может быть исправлена. Логические преобразования тетралогики определяются **принципами поглощения криноля** θ **и воспроизведения квиноля** $\Box$.

Правила оперирования несущественным противоречивым неопределенным значением $\Box_1$ выражает принцип сокращения минимального абсурда, в соответствии с которым логическое сложение $a + \Box_1 = a$, логическое умножение $a \cdot \Box_1 = a$, $\bar{\Box}_1 = \Box_1$, $\mathrm{Fre}(\Box_1) = \mathrm{Fri}(\Box_1) = 0$, на другие операции трилогики эти правила переносятся, используя выражения операций в дизъюнктивной форме: $\Box_1 \to a = a$, $a \to \Box_1 = \bar{a}$, $a - \Box_1 = a$, $\Box_1 - a = \bar{a}$, $a \leftrightarrow \Box_1 = a \oplus \Box_1 = 1$, $a|\Box_1 = a \downarrow \Box_1 = \bar{a}$. Вместо этих правил при сокращении $\Box_1$ используется также преобразование минимального абсурда во внутреннюю неопределенность; $\Box_1 \to \theta$, когда анализ причин возникших противоречий допускает такую возможность.

Формальные четверичные логики, не ограниченные информационной семантикой, имеют гораздо большее разнообразие операций, чем троичные логики: число унарных четверичных операций равно 256, а бинарных операций — более $4{\cdot}10^9$. Принципы поглощения, воспроизведения, сокращения неопределенностей вводят семантические связи между логическими операциями и существенно ограничивают их число, необходимое для построения адекватных логических моделей информационных ситуаций.

Покажем, что в тетралогике со шкалой $\{1,0,\theta,\Box\}$ выразимы с сохранением объективной информационной семантики обратные операции трилогики, а значит, и классической логики. Ограничимся обращением функций $y = f(x)$ одной переменной, $n = 1$. Обратная функция $\hat{x} = f^{-1}(y)$ восстанавливает, если это возможно, вход $x = \hat{x}$ по выходу y и априорике J_{xy} либо указывает на невозможность точного обращения: $x \neq \hat{x} \in \{\theta, \Box\}$. Унарные операции тождественного преобразования $y = f_1(x) = x$ и базисного отрицания $y = f_2(x) = \bar{x}$ в четверичной шкале $x, y \in \{1,0,\theta,\Box\}$ обращаются точно: $\hat{x} = x$, $f_1^{-1}(y) = f_1(x) = x$, $f_2^{-1}(y) = \bar{f}_2(x) = \bar{\bar{x}} = x$, так как $\bar{\bar{0}} = 0$, $\bar{\bar{1}} = 1$, $\bar{\bar{\theta}} = \theta$, $\bar{\bar{\Box}} = \Box$. Функция Фреге $y = \mathrm{Fre}(x)$ точно обратима при $x = y = 1$ и $x = y = \Box$, но при $y = 0$ возникает внутренняя неопределенность обращения: $\hat{x} = \theta$ при $x = 0$ и 1, а при $y = \theta$ возникает противоречие этого значения априорике функции Фреге: $y \in \mathrm{Bit}$, поэтому $\mathrm{Fre}^{-1}(\theta) = \Box$, т. е. $\hat{x} = \Box$, при $y = \Box$ — входной абсурд, как и при $y = \theta$ — противоречие частичности обратной функции. Подобным образом строятся обращения $\mathrm{Fri}(x)$, $\mathrm{Fru}(x)$ и константных функций трилогики $0(x)$, $1(x)$, $\theta(x)$, перенесенных в тетралогику в соответствии с принципом воспроизведения квина, сведенные в табл. 2.

Таблица 2

y	$\hat{x} = f^{-1}(y)$								
	f_1^{-1}	f_2^{-1}	Fre^{-1}	Fri^{-1}	Fru^{-1}	$0^{-1}(y)$	$\theta^{-1}(y)$	$1^{-1}(y)$	$\square^{-1}(y)$
0	$\underline{0}$	$\underline{1}$	θ	0	θ	$\underline{0}$	$\square$	$\square$	$\square$
θ	$\underline{\theta}$	$\underline{\theta}$	$\square$	1	$\square$	$\square$	$\underline{\theta}$	$\square$	$\square$
1	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\square$	$\underline{\theta}$	$\square$	$\square$	$\underline{1}$	$\square$
$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$

Случаи точного обращения и восстановления входа $x = \hat{x}$ операций трилогики и классической логики отмечены подчеркиванием. Последняя строка и столбец определяют ситуации тетралогики, функция $\square(x)$ есть константная функция $\sim$ «всё абсурд», ее обращение характеризуется полной четверичной синтаксической неопределенностью: $\theta_4 = \{1, 0, \theta, \square\}$.

Бинарные операции трилогики и функции большего числа аргументов обращаются по одному из аргументов при заданных постоянных значениях других аргументов: $y = f(x, a_1, a_2, \dots)$. Обратные логические функции представляют собой простейшие модели решений систем неопределенных логических уравнений. Логическое сложение $y = a + x$ есть частично обратимая функция $\hat{x} = f^{-1}(y, a)$: при $a = 0$ сложение точно обратимо: $y = x = \hat{x}$, при $a = 1$ и $y = 1$ аргумент x может принимать любое троичное значение, поэтому результат обращения $\hat{x} = \theta$, соответствующий полной неопределенности θ_3, а если $y \neq 1$, то возникает противоречие этого факта априорике логического сложения: $\hat{x} = \square$. При $a = \theta$ аналогичный абсурд возникает при значении $y = 0$, а если $y = \theta$, то неопределенность обращения $\hat{x} = \theta$ соответствует синтаксическому отрицанию $\tilde{1} = \{0, \theta\}$, точное обращение $\hat{x} = x = 1$ имеет место при $y = 1$. Подобным образом строятся обратные логические операции всех бинарных операций. В табл. 3 представлены обратные функции сложения, умножения, антиимпликации с неизвестной посылкой (в доказательствах от противного), импликации с неизвестным заключением.

Таблица 3

y	$\hat{x} = (a + x)^{-1}$			$\hat{x} = (ax)^{-1}$			$\hat{x} = (x \to a)^{-1}$			$\hat{x} = (a \to x)^{-1}$		
	$a = 0$	$a = \theta$	$a = 1$	$a = 0$	$a = \theta$	$a = 1$	$a = 0$	$a = \theta$	$a = 1$	$a = 0$	$a = \theta$	$a = 1$
0	$\underline{0}$	$\square$	$\square$	$\theta \sim \theta_3$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\underline{0}$
θ	$\underline{\theta}$	$\theta \sim \tilde{1}$	$\square$	$\square$	$\theta \sim \tilde{0}$	$\underline{\theta}$	$\underline{\theta}$	$\theta \sim \tilde{0}$	$\square$	$\square$	$\theta \sim \tilde{1}$	$\underline{\theta}$
1	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\theta \sim \theta_3$	$\square$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\theta \sim \theta_3$	$\theta \sim \theta_3$	$\underline{1}$	$\underline{1}$

Случаи точного обращения подчеркнуты, двоичная семантическая и синтаксическая неопределенность $\theta_2 = \theta$ получается абстракцией от иерархических троичных синтаксических неопределенностей обращения: $\theta_3, \tilde{0}, \tilde{1}$. Последние три столбца содержат строгое табличное определение правила модус поненс: $y, a \vdash \hat{x}$, учитывающего различия базисного и синтаксического отрицания неопределенностей.

6. ТРИЛОГИКА В РЕШЕНИИ ГОЛОВОЛОМКИ «О ТРЕХ МУДРЕЦАХ»

Трилогика и тетралогика находят приложения при описании размытых структур систем, частичных графов и частичных бинарных отношений, при моделировании рассуждений с неполной информацией. В качестве примера использования трилогики приведем решение задачи о трех мудрецах, которую Дж. Маккарти использовал для тестирования моделей знаний [6, 13]. Эта задача в двоичной аксиоматике имеет весьма сложную формализацию. Она ставится так: король, желая оценить интеллектуальные способности советников-мудрецов M_1, M_2, M_3, посадил их напротив друг друга и нарисовал на лбу каждого мудреца пятно либо белого ($x_i = 1$), либо черного ($x_i = 0$) цвета и добавил, что хотя бы одно пятно из трех белое, а мудрецам необходимо угадать цвет собственного пятна x_i, зная цвета x_j, x_k двух других пятен и предшествующие ответы $\hat{x}$ мудрецов, например, при $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ мудрец M_1 ответил «не знаю» $\sim \hat{x}_1 = \theta$, M_2 тоже ответил «не знаю» $\sim \hat{x}_2 = \theta$, тогда M_3 решил, что его пятно белое, $\hat{x}_3 = 1 = x_3$.

Далее полагаем, что король и мудрецы действуют точно, без ошибок, обмана, сговора и могут быть представлены объективированными субъектами — системами obsubj, которые имеют безупречные сенсоры (зрения и слуха): $y_1 = A_1(M_2, M_3) = (\theta_1, x_2, x_3)$, $y_2 = A_2(M_1, M_3) = (x_1, \theta_2, , x_3, \hat{x}_1)$, $y_3 = A_3(M_1, M_2) = (x_1, x_2, \theta_3, \hat{x}_1, \hat{x}_2)$, и рефоры $\hat{x}_1 = B_1(y_1, J), \hat{x}_2 = = B_2(y_2, J), \hat{x}_3 = B_3(y_3, J)$, построенные в системах obsubj M_1, M_2, M_3 по критериям предельной точности и определенности ответов мудрецов $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$; J — априорная информация, используемая мудрецами наряду с данными наблюдений y_i и содержащая сведения о критериях, правилах поведения мудрецов, исходной неопределенности их состояний $x = x_1x_2x_3$, заданной королем, $J_x = \{001, 010, \ldots , 111\}$ — семь информационных ситуаций, а восьмую, $x = 000$, король исключил из априорики задачи.

Решение представлено в табл. 4, неопределенность ответа обозначена в ней прочерком.

Таблица 4

N	x_1	x_2	x_3	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	Формулы трилогики
1	0	0	1	–	–	1	
2	0	1	0	–	1	0	
3	0	1	1	–	–	1	$\hat{x}_1 = B_1(y_1) = \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \theta$,
4	1	0	0	1	0	0	$\hat{x}_2 = B_2(y_2) = \overline{\mathrm{Fri}}(x_3) \cdot \overline{\mathrm{Fre}}(\hat{x}_1)$,
5	1	0	1	–	–	1	$\hat{x}_3 = B_3(y_3) = \overline{\mathrm{Fru}}(x_2) \in \mathrm{Bit}$.
6	1	1	0	–	1	0	
7	1	1	1	–	–	1	

Пусть мудрецы учитывают только визуальную информацию $x_i x_j$, тогда каждый из них восстанавливает состояние лишь одной ситуации из семи, это ситуации 1, 2, 4 с двумя нулями в векторе x: если мудрец видит два черных пятна, то его пятно, согласно априорике J_x, белое, $\hat{x}_i = 1 = x_i$. Так и поступил M_1, построив наилучший из возможных в трилогике рефор $\hat{x} = = B_1(y_1) = A_1^{-1}(y_1) = \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \theta_1$ — это обращение по x_1 сенсорной функции $y_1 = A_1(x)$ трех двоичных аргументов $x = (x_1x_2x_3)$при априорных ограничениях J_x. Оставшиеся шесть ситуаций разделяются мудрецами на три пары по их визуальной информации $x_i{\cdot}x_j$: 01, 10, 11, а третье значение в парах неизвестное: $x_k = \theta_k = \{0, 1\}$, $x \in \theta_1x_2x_3$ для M_1, $x \in x_1\theta_2x_3$ для M_2, $x \in x_1x_2\theta_3$ для M_3. Чтобы различить ситуации в выделенных парах и устранить неопределенность, если это возможно, мудрецы M_2 и M_3 привлекают фактическую апостериорную информацию $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$, полученную путем размышлений мудрецами M_1 и M_2. Для этого система M_2 строит модель поведения системы M_1, а система M_3 строит модели двух зависимых источников информации: модель M_1 с учетом фактических данных M_3 и модель M_2, которая включает модель M_1 внутри модели M_2 и описывает зависимости апостериорных неопределенностей. Рефор B_2 представим двумя алгоритмами: первый $B_{22}(x_1, x_3)$ разбивает 7 ситуаций на 4 класса по x_1x_3 — визуальным данным M_2: строки 2, 1 и 3, 4 и 6, 5 и 7, второй алгоритм $B_{21}(\hat{x}_1)$ есть обращение моделей M_1 — сенсора A_1 и рефора B_1 в системе M_2, служащих для различения ситуаций в выделенных парах по значению ответа $\hat{x}_1$. В табл. 4 ответ различен только в паре (4, 6): $\hat{x}_1 = 1 \sim$ «если M_1 знает x_1, то $x_2 = 0$» — строка 4; $\hat{x}_1 = \theta \sim$ «если M_1 не знает x_1, то $x_2 = 1$ — строка 6». Аналитическая аппроксимация рефора $B_2(y_2)$ есть функция $\hat{x}_2 = \overline{\mathrm{Fri}}(\mathrm{x}_3) \cdot \overline{\mathrm{Fre}}(\hat{x}_1)$ — информация о переменной x_1 для M_2 является избыточной. Аналогично строится рефор $B_3(y_3)$, его точная аппроксимация еще проще: $\hat{x}_3 = \overline{\mathrm{Fru}}(\hat{x}_2) = x_3$ — полное однозначное решение задачи системой M_3 во всех ситуациях, получаемое только по ответу M_2, другую фактическую информацию третий мудрец может не учитывать, не слушать M_1, не смотреть на M_1 и M_2 или быть слепым, но, услышав ответ M_2 «не знаю», решить, что $x_3 = 1$, а при ответе «знаю $\hat{x}_2 = 1$ (либо $\hat{x}_2 = 0$)», ответить: $\hat{x}_3 = 0 = x_3$.

Полученное решение переносится на произвольное число $n \geqslant 1$ мудрецов: при $n = 1 \hat{x}_1 = 1$ по априорике J_x, при $n = 2$ решение выделено в правом нижнем углу табл. 4, при $n \geqslant 2$ $\hat{x}_n = = \overline{\mathrm{Fru}}(\hat{x}_{n-1}) = x_n$, например, для четырех мудрецов в ситуации $x = x_1x_2x_3x_4 = 0101$, $y_1 = \theta_1 101$, $y_2 = 0\theta_2 01$, $y_3 = 01\theta_3 1$, $y_4 = 010\theta_4$, $\hat{x}_1 = \theta_1$, $\hat{x}_2 = \theta_2$, $\hat{x}_3 = \theta_3$, $\hat{x}_4 = 1 = \overline{\mathrm{Fru}}(\hat{x}_3)$, так как $\hat{x}_3 = \hat{x}_2$ и M_4 знает (M_3 тоже знает), что M_2 не знает свое состояние, но неопределенность $\hat{x}_2 = \theta$ возможна для M_2 только при $x_4 = 1$». Увеличение числа мудрецов на 1 почти удваивает число возможных ситуаций $2^{n+1} - 1$ и число источников информации, а исходная неопределенность состояния M_k остается неизменной: энтропия в 1 бит, альтернант в 1 альт [11]. Число правильно и однозначно распознаваемых ситуаций мудрецом M_k равно $2^k - 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Следующие усложнения и обобщения задачи о мудрецах состоят в учете объективных и преднамеренных ошибок сенсоров, реформов, априорики, веры и сомнений мудрецов, их субъективных целей и критериев, характерных при моделировании социальных явлений, более адекватно представимых в формализме частотной логики [7, 11]. В частности, введение частотных связей между логическими переменными порождает в общем случае более точные дробные меры неопределенности состояний мудрецов.

7. ЧАСТОТНАЯ И МНОГОЗНАЧНЫЕ ЛОГИКИ

Представляет интерес сопоставить семантику трилогики и частотной логики, имеющей произвольное число значений истинности в вещественном интервале $[0, 1]$, зависящих от множества U — универсума информационных ситуаций. Если в U нет опровергающих примеров логическим формулам $a = 0$ или $b = 1$, то эти значения совпадают для двоичных, троичных и частотных оценок истинности логических переменных, при наличии опровержений и внутренних противоречий совокупности источников информации возникает неопределенность $a = \theta$, соответствующая **строгой трилогике**: частотная истинность формулы a есть $\underline{a} = \frac{N_a}{N}$, троичное значение $a = \theta$ в строгой трилогике соответствует частости истинности в интервале $0 < \underline{a} < 1$, N_a — число ситуаций в U, в которых $a(\mathrm{obj}) = 1$ из общего числа $N = |U|$, $0 < N_a < N$. В информационной практике имеет место **аппроксимационная трилогика** с приближенными значениями истинности: $a = 1$ при $\underline{a} \geqslant 1 - \Delta$, ложности $a = 0$ при $\underline{a} \leqslant \Delta$ и неопределенности $a = \theta$ при $\Delta < \underline{a} < 1 - \Delta$, $\Delta > 0$ — граничное значение риска или доверия $1 - \Delta$.

Шкалу истинности частотной логики можно разбить на любое число $k \geqslant 2$ интервалов и получить k-значные аппроксимационные логики, например, четверичную логику, $k = 4$, со значениями истинности: $1 = \underline{a} \geqslant 1 \quad \Delta \sim$ «почти истина», $2 = (0{,}5 < \underline{a} < 1 - \Delta) \sim$ «скорее истина, чем ложь», $3 = (\Delta < \underline{a} \leqslant 0{,}5) \sim$ «скорее ложь, чем истина», $4 = (\underline{a} \leqslant \Delta) \sim$ «почти ложь», или 6-значную логику со значениями: $1 = \{\underline{a} < 0{,}05\} \sim$ «практически невозможно», $2 = \{0{,}05 \leqslant \underline{a} < 0{,}2\} \sim$ «возможно», $3 = \{0{,}2 \leqslant \underline{a} < 0{,}5\} \sim$ «вероятно», $4 = \{0{,}5 \leqslant \underline{a} < 0{,}8\} \sim$ «весьма вероятно», $5 = \{0{,}8 \leqslant \underline{a} < 0{,}95\} \sim$ «почти достоверно», $6 = \{\underline{a} \geqslant 0{,}95\} \sim$ «практически достоверно». Логическое сложение и умножение в k-значных аппроксимационных логиках обычно определяются в виде максимума и минимума частости аргументов, точно так же эти операции определяются в нечеткой логике Заде, однако, как показано в работе [14], это в известном смысле наихудшие определения многозначных логических операций, привносящие дополнительные ошибки, относительные уровни которых могут достигать 100%-ной частости или редкости аргументов, поэтому их лучше заменить определениями из частотной логики и оценить потери точности от дискретизации непрерывной логической шкалы и от неучета частотных зависимостей между аргументами. В подобных дискретных шкалах знак криноль внутренней неопределенности θ трилогики приобретает несколько более конкретных значений истинности и вариативности, а добавляя в логическую шкалу знак квиноль внешней неопределенности $\square$, получаем возможность формального описания абсурдных противоречий логического процесса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Язык любой логики ограничен и не универсален. Многозначные логики есть постепенный переход от двоичной классической логики к более сложным математическим и информационным моделям систем и технологий. Из всех мыслимых и фактически созданных логик особое место занимают логики, объективно описывающие состояния информационно-материальной реальности и содержащие собственный инструмент строгой оценки истинности и неопределенности логического вывода в рамках однозначно определенного формализма — прежде всего это классическая логика, отвергающая все недоопределенные и переопределенные значения переменных, оставляя их обработку неформализованной части естественного интеллекта, затем ее обобщения на неопределенные ситуации — трилогика, тетралогика, частотная логика и их комбинации, позволяющие учесть ошибки формализации, нарушения гипотезы двоичности Хризиппа, частичность и многозначность сенсоров и реформов информационных систем и технологий. Если частотная логика предполагает при реализации сложные машинные вычисления, то трилогика и тетралогика могут найти применение не только в упрощенных алгоритмах автоматизированных систем, но и в процессах естественного мышления и языка. Дана Скотт сетовал: «по меньшей мере четыре раза в год кто-нибудь преподносит новую» логику, и еще: «покажите мне действительно пригодную для работы трехзначную логику» [1]. В работе [15] он замечает:

«Перед тем как вы примете многозначную логику как долгожданного брата, попробуйте понять, что могут означать дробные истинностные значения. И имеют ли они какой-либо смысл? Каково концептуальное подтверждение «промежуточных значений»?». Эти вопросы и сомнения высказывают многие авторы, ответы на них содержатся в [7, 11] и в данной статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Семантика** модальных и интенсиональных логик. М.: Прогресс, 1981. 424 с.
2. **Белнап Н., Стил Т.** Логика вопросов и ответов. М.: Прогресс, 1981. -271 с.
3. **Меськов В. С.** Очерки по логике квантовой механики. М.: МГУ, 1986. 144 с.
4. **Bolc L., Borowic P.** Many-valued logics: Teoretical foundations. V 1. Berlin, 1992.
5. **Карпенко А. С.** Многозначные логики // Сер. Логика и компьютер. М.: Наука, 1997. Вып. 4. 223 с.
6. **Логический** подход к искусственному интеллекту: от модальной логики к логике баз данных / А. Тейз, П. Грибомон, Г. Юлен и др. М.: Мир, 1998. 494 с.
7. **Зверев Г. Н.** Частотная логика – альтернатива классической логике в новых информационных технологиях // Информационные технологии. 1998. № 11. С. 2–10.
8. **Зверев Г. Н.** Модели неопределенностей и фундаментальные критерии информатики // Информационные технологии. 2000. № 6. С. 2–10.
9. **Lukasiewicz J.** Logika trojwartosciowa // Ruch Filozoficzny. Lwow, 1920. R V, Nr. 9.
10. **Post E. L.** Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. of Math. 1921. V. XLIII, No 3.
11. **Зверев Г. Н.** Основания теоретической информатики. Разд. 1–10. Уфа: УГАТУ, 1995–2001.
12. **Тьюринг А.** Может ли машина мыслить? М.: ГИФМЛ, 1960. 112 с.
13. **McCarthy J., Sato M., Hayashi T., Igarashi S.** On the Model Theory of Knowledge. Standart Art. Int. Lab. MemoAIM. 312. Standart University, 1978.
14. **Зверев Г. Н.** Оценка точности логических приближений и границ применимости классической и неклассических логик в системах моделирования и принятия решений // Информационные технологии. 1999. № 12. С. 12–19.
15. **Scott D.** Does many-valued logic and future contingencies? // Philosophy of Logic. Oxford, 1976. P. 64–74.

Разное

СЛОВО О НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИИ

Не смотри на ученость ни как на корону, чтобы ею красоваться, ни как на корову, чтобы кормиться ею». *Л. Н. Толстой.*

Что труднее всего на свете видеть своими глазами? То, что лежит перед нами. *Гёте.*

Наука, в сущности, прирожденное уважение к разуму и разумности в широком смысле. *А. А. Фет.*

Он остановил Солнце и сдвинул Землю! (*надпись на пьедестале памятника Копернику*).

Я сделал все, что должен был сделать. *Колумб.*

Знание без совести – это крушение души. *Рабле.*

Аристотель был совершенно прав, сказав, что сомнение есть начало мудрости. *Вольтер.*

Не так благотворна истина, как зловредна ее видимость. *Ларошфуко.*

Очень немногие люди, и притом самые замечательные, способны просто и откровенно сказать: „не знаю". *Д. И. Писарев.*

[Слово о науке: Афоризмы. Изречения. Литературные цитаты. Кн. 2. М.: Знание, 1981.]