НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • МАТЕМАТИКА

УДК 517.518.26

В. В. НАПАЛКОВ, В. А. ТАРОВ

ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИЕСЯ ФУНКЦИИ И УТОЧНЕННЫЕ ПОРЯДКИ

Получены некоторые результаты, касающиеся правильно и гладко меняющихся функций. В частности, исследована связь между гладко меняющимися функциями и уточненными порядками. *Правильно меняющиеся функции; медленно меняющиеся функции; гладко меняющиеся функции; уточненные порядки*

ВВЕДЕНИЕ

Свойство степенной функции r^ρ, $\rho \in \mathbb{R}$, выраженное равенством $\dfrac{(kr)^\rho}{r^\rho} = k^\rho$ $\forall k$, $r \in (0, +\infty)$, положено в основу определения правильно меняющихся функций, частным случаем которых являются степенные функции.

Определение 1. Положительная функция R называется правильно меняющейся на бесконечности, если она измерима на полуоси $[A, \infty)$, $A > 0$, и существует такое число $\rho \in (-\infty, \infty)$, что для произвольного $\lambda > 0$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{R(\lambda x)}{R(x)} = \lambda^\rho$.

Число ρ называется порядком функции R. Далее слова «на бесконечности» будем опускать.

Определение 2. Правильно меняющаяся функция $L(x)$ порядка $\rho = 0$ называется медленно меняющейся функцией.

Правильно меняющиеся функции (другое название – автомодельные функции) находят (см., например, [2, 3]) применение в различных разделах математики.

Известно (см. теоремы 1.3.3 и 1.8.2 в [2]), что правильно меняющаяся функция эквивалентна на бесконечности гладко меняющейся функции (определение см. в разд. 1), которая является бесконечно дифференцируемой в окрестности бесконечности и, кроме того, имеет (см. условия (2) в разд. 1) дополнительные свойства, сходные со свойствами степенной функции.

В данной статье существование для любой правильно меняющейся функции эквивалентной ей на бесконечности гладко меняющейся функции доказано другим способом, который предоставляет дополнительные возможности, в частности (см. замечание в конце разд. 1), при исследовании роста характеристик целых функций.

В статье также показана связь гладко меняющихся функций и уточненных порядков — функций, которые широко используются при исследовании характеристик роста функций различных классов. При этом получен (см. следствие теоремы 3 в разд. 2) новый результат, касающийся уточненных порядков.

1. ГЛАДКО МЕНЯЮЩИЕСЯ ФУНКЦИИ

Определение 3. Положительная бесконечно дифференцируемая в некоторой окрестности бесконечности функция $h(r)$ называется гладко меняющейся порядка $\rho \in \mathbb{R}$, если

$$\lim_{r\to+\infty} (\ln h(e^r))' = \rho,$$
$$\lim_{r\to+\infty} (\ln h(e^r))^{(n)} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \tag{1}$$

Сформулируем в виде теоремы известное (см. п. 1.8.1 в [2]) утверждение.

Теорема А. *Положительная бесконечно дифференцируемая в некоторой окрестности бесконечности функция $h(r)$ удовлетворяет условиям (1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{r^n h^{(n)}(r)}{h(r)} = \rho(\rho-1)\cdots (\rho-n+1) \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Работа финансировалась грантом Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект 00–15–96189).

Прежде чем приступить к теореме 1, условимся считать, что если $f(r) = h(e^r)$, то $f(-\infty) = h(0)$. Отметим также, что преобразование $\int_0^\infty \frac{h(t)}{(t+r)^\nu}\,dt$, $\nu > 0$, называется (см. [12]) обобщенным преобразованием Стилтьеса (при $\nu = 2$ — производным преобразованием Стилтьеса).

Теорема 1. *Пусть $h(r) = r^\rho h_0(r)$, где $h_0(r)$ — медленно меняющаяся функция, непрерывная и неотрицательная на луче $[0,+\infty)$, $\rho \in (-1,1)$;*

$$g(r) = \begin{cases} \dfrac{r\int\limits_0^\infty \dfrac{h(t)}{(t+r)^2}\,dt}{\Gamma(\rho+1)\Gamma(1-\rho)} & \text{при } r > 0, \\ h(0) & \text{при } r = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Тогда

1) $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{g(r)}{h(r)} = 1$;

2) *$g(r)$ — положительная бесконечно дифференцируемая на луче $(0,+\infty)$ функция, непрерывная на луче $[0,+\infty)$;*

3) *$g(r)$ — гладко меняющаяся функция;*

4) *если функция $h(r)$ монотонна (строго монотонна) на луче $[0,+\infty)$, то и функция $g(r)$ монотонна (строго монотонна) на луче $[0,+\infty)$;*

5) *если функция $h(r)$ вогнута (строго вогнута, выпукла, строго выпукла) на луче $[0,+\infty)$, то и функция $g(r)$ соответственно вогнута (строго вогнута, выпукла, строго выпукла) на луче $[0,+\infty)$;*

6) *если функция $h(e^r)$ выпукла (строго выпукла, вогнута, строго вогнута) на промежутке $[-\infty,+\infty)$, то и функция $g(e^r)$ соответственно выпукла (строго выпукла, вогнута, строго вогнута) на промежутке $[-\infty,+\infty)$.*

Доказательство. Известно (см. теорему 1.5.8 в [2]), что если медленно меняющаяся функция $h_0(r)$ ограничена на любом отрезке $[0,b]$, то

$$\int_0^r t^\rho h_0(t)\,dt \sim \frac{r^{\rho+1}h_0(r)}{\rho+1}$$
$$\text{при } r \to +\infty\ \forall \rho > -1. \quad (4)$$

Для $h(r) = r^\rho h_0(r)$, $\rho > -1$, определим функцию $h_1(t) = \int_0^t h(x)\,dx$. Так как эта функция не убывает на луче $[0,+\infty)$ и $\lim\limits_{t\to 0+} h_1(t) = 0$, то по теореме 1.7.4 в [2], учитывая (4), находим

$$\int_0^\infty \frac{h(t)}{(t+r)^n}\,dt = \int_0^\infty \frac{dh_1(t)}{(t+r)^n} \sim$$
$$\sim \frac{\Gamma(\rho+2)\Gamma(n-1-\rho)h_0(r)}{(\rho+1)\Gamma(n)r^{n-1-\rho}} =$$
$$= \frac{\Gamma(\rho+1)\Gamma(n-1-\rho)h(r)}{\Gamma(n)r^{n-1}}$$
$$\text{при } r \to +\infty\ \forall n > 1+\rho,\ \forall \rho > -1. \quad (5)$$

Из (5) при $n = 2$ следует утверждение 1 теоремы.

Функция $g(r)$ положительна на луче $(0,+\infty)$, так как непрерывная функция $h_0(r)$, как медленно меняющаяся функция, положительна в некоторой окрестности бесконечности.

Ввиду выполнения всех условий теоремы (см. теорему 4 § 7 гл. XVII в [1]) о дифференцировании несобственного интеграла по параметру, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\left(\int_0^\infty \frac{h(t)}{(t+r)^2}\,dt\right)^{(n)} = (-1)^n(n+1)!\ \times$$
$$\times \int_0^\infty \frac{h(t)}{(t+r)^{n+2}}\,dt\ \forall r > 0. \quad (6)$$

Значит, функция $g(r)$ бесконечно дифференцируема на луче $(0,+\infty)$.

Покажем, что функция $g(r)$ непрерывна справа в точке $r = 0$. Так как функция $h(r)$ непрерывна справа в точке $r = 0$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое зависящее от ε положительное число $\delta(\varepsilon)$, что $h(r) \leqslant h(0) + \varepsilon\ \forall r \in [0, \delta(\varepsilon)]$.

Принимая во внимание последнее неравенство, имеем

$$\varlimsup_{r\to 0+} r\int_0^\infty \frac{h(t)}{(t+r)^2}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \varlimsup_{r\to 0+} r\int_0^{\delta(\varepsilon)} \frac{h(t)}{(t+r)^2}\,dt +$$
$$+ \varlimsup_{r\to 0+} r\int_{\delta(\varepsilon)}^\infty \frac{h(t)}{(t+r)^2}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \varlimsup_{r\to 0+} r\int_0^{\delta(\varepsilon)} \frac{dt}{(t+r)^2}(h(0)+\varepsilon) +$$
$$+ \varlimsup_{r\to 0+} r\int_{\delta(\varepsilon)}^\infty \frac{h(t)}{t^2}\,dt =$$
$$= \varlimsup_{r\to 0+} r\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\delta(\varepsilon)+r}\right)(h(0)+\varepsilon) = h(0)+\varepsilon,$$

откуда вытекает неравенство $\overline{\lim\limits_{r\to 0+}}\ g(r) \leqslant h(0)$. Аналогично доказывается неравенство $\underline{\lim\limits_{r\to 0+}}\ g(r) \geqslant h(0)$. Следовательно, $\lim\limits_{r\to 0+} g(r) = h(0) = g(0)$. Таким образом, утверждение 2 теоремы доказано.

Учитывая (5) и (6), для любого $n \in \mathbb{N}$ получаем

$$\left(\int_0^\infty \frac{h(t)}{(t+r)^2}\,dt\right)^{(n)} \sim \frac{(-1)^n\Gamma(\rho+1)\Gamma(n+1-\rho)h(r)}{r^{n+1}}$$

$$\text{при } r \to +\infty.$$

Применяя последнее соотношение, для любого $n \in \mathbb{N}$ находим

$$g^{(n)}(r) = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)\Gamma(1-\rho)} \times \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i r^{(i)} \left(\int_0^\infty \frac{h(t)}{(t+r)^2}\,dt\right)^{(n-i)} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\rho+1)\Gamma(1-\rho)}\left[r\left(\int_0^\infty \frac{h(t)}{(t+r)^2}\,dt\right)^{(n)} + n\left(\int_0^\infty \frac{h(t)}{(t+r)^2}\,dt\right)^{(n-1)}\right] =$$

$$= \frac{r(-1)^n(n-\rho)(n-1-\rho)\cdots(1-\rho)h(r)}{r^{n+1}} \times (1+o(1)) - \frac{n(-1)^n(n-1-\rho)(n-2-\rho)\cdots(1-\rho)h(r)}{r^n} \times (1+o(1)) =$$

$$= \frac{\rho(\rho-1)\cdots(\rho-n+1)h(r)}{r^n}(1+o(1))$$

$$\text{при } r \to +\infty,$$

откуда с учетом утверждения 1 теоремы следует выполнение условий (2) для функции $g(r)$. В силу теоремы А утверждение 3 теоремы доказано.

Укажем теперь, что для любого числа $r \geqslant 0$ верно представление

$$g(r) = \int_0^\infty \frac{h(rt)}{(t+1)^2}\,dt, \tag{7}$$

из которого вытекает утверждение 4 теоремы.

Докажем утверждение 6 теоремы для случая выпуклости функции $h(e^r)$. Используя представление (7), имеем

$$g\big(\exp(\alpha r_1 + (1-\alpha)r_2)\big) = \int_0^\infty \frac{h(\exp(\alpha r_1+(1-\alpha)r_2)t)}{(t+1)^2}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{h(\exp(\alpha(r_1+\ln t)+(1-\alpha)(r_2+\ln t)))}{(t+1)^2}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \frac{\alpha h(\exp(r_1+\ln t))+(1-\alpha)h(\exp(r_2+\ln t))}{(t+1)^2}\,dt =$$

$$= \alpha g\big(\exp(r_1)\big) + (1-\alpha)g\big(\exp(r_2)\big)$$

для любого числа $\alpha \in [0,1]$ и любых чисел r_1, r_2, удовлетворяющих неравенству $-\infty < r_1 < r_2 < +\infty$, т. е. функция $g(e^r)$ выпукла на множестве $(-\infty, +\infty)$. Отсюда с учетом непрерывности функции $g(e^r)$ на множестве $[-\infty, +\infty)$ следует выпуклость функции $g(e^r)$ на множестве $[-\infty, +\infty)$.

Аналогично проводится доказательство утверждения 5 и оставшихся случаев утверждения 6 теоремы. □

Отметим, что возрастающие медленно меняющиеся функции $h(r)$, для которых соответствующие функции $h(e^r)$ являются выпуклыми, используются при исследовании роста характеристик субгармонических функций нулевого порядка (см., например, [8, 11]).

Теорема 2. *Для любой медленно меняющейся функции $h(r)$ найдется такая функция $g(r)$, что*

1) $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{g(r)}{h(r)} = 1$;

2) $g(r)$ — *положительная бесконечно дифференцируемая на луче $(0, +\infty)$ функция, непрерывная на луче $[0, +\infty)$;*

3) $g(r)$ — *гладко меняющаяся функция;*

4) *если функция $h(r)$ монотонна на луче $[a_1, +\infty)$, $a_1 \geqslant 0$, то функция $g(r)$ монотонна на луче $[0, +\infty)$;*

5) *если функция $h(e^r)$ является возрастающей и выпуклой на промежутке $[a_2, +\infty)$, $a_2 \in [-\infty, +\infty)$, то функция $g(e^r)$ является возрастающей и выпуклой на промежутке $[-\infty, +\infty)$.*

Доказательство. Покажем, что для функции $h(r)$ найдется эквивалентная ей на бесконечности непрерывная на луче $[0, +\infty)$ функция $h_1(r)$ с теми же дополнительными свойствами, которые имеются у функции $h(r)$.

Пусть $h(e^r)$ — возрастающая и выпуклая на промежутке $[a_2, +\infty)$ функция. По лемме 1.2 в [10] для функции $h(r)$ найдется такое число $b_1 > \max\{1, e^{a_2}\}$, что функция $h(r)$ ограничена на любом отрезке $[b_1, b_2]$ и $h(r) > 0$ при $r \geqslant b_1$. Тогда (см. теорему 3 § 5 гл. X в [9]) функция $h(r)$ непрерывна на луче $(b_1, +\infty)$.

Функция $rh'_-(r)$ ($h'_-(r)$ — левая производная функции $h(r)$ в точке r) является (см. замечание после леммы 1.2 в [4]) неубывающей на луче $(b_1, +\infty)$. Возьмем число $b_2 > b_1 + 1$. Ввиду возрастания функции $h(r)$ $h'_-(b_2) > 0$. В противном случае функция $h(r)$ была бы (см. лемму 1 § 2 гл. VIII в [9] и теорему 1.1 в [4]) постоянной на отрезке $[b_1 + 1, b_2]$. Положим $k = \min\{h'_-(b_2), h(b_2)/(2b_2)\}$,

$$h_1(r) = \begin{cases} kr + h(b_2) - kb_2 \text{ при } r \in [0, b_2], \\ h(r) \text{ при } r \in (b_2, +\infty). \end{cases}$$

Полученная функция $h_1(r)$ непрерывна на луче $[0, +\infty)$, а функция $h_1(e^r)$ является возрастающей и выпуклой на промежутке $[-\infty, +\infty)$.

В произвольном случае существование функции $h_1(r)$, непрерывной и положительной на некотором луче $[b, +\infty)$, $b > 0$, известно. См., например, построение такой функции перед леммой 1.7 в [10]. При этом функция $h_1(r)$ является монотонной на луче $[b, +\infty)$, если монотонна в окрестности бесконечности функция $h(r)$.

Доопределим функцию $h_1(r)$ на отрезке $[0, b]$ следующим образом: $h_1(r) = \dfrac{h(b) - c}{b} r + c$, где $c \in [0, +\infty)$. Если функция $h_1(r)$ не убывает на луче $[b, +\infty)$, то полагаем $c = \dfrac{h(b)}{2}$, а если функция $h_1(r)$ не возрастает на луче $[b, +\infty)$, то принимаем $c = 2h(b)$.

Для доказательства теоремы осталось только применить к функции $h_1(r)$ теорему 1. □

Заметим, что существование для любой медленно меняющейся функции эквивалентной ей на бесконечности гладко меняющейся функции доказано в теореме 1.3.3. в [2] другим способом, причем из построения искомой функции в указанной теореме следует монотонность этой функции в некоторой окрестности бесконечности, если исходная функция монотонна.

Теорема 3. *Пусть $h(r)$ — правильно меняющаяся функция порядка $\rho \neq 0$. Тогда найдется функция $g(r)$, обладающая следующими свойствами:*

1) $\lim\limits_{r \to +\infty} \dfrac{g(r)}{h(r)} = 1$;

2) *$g(r)$ — положительная бесконечно дифференцируемая на луче $(0, +\infty)$ функция, непрерывная на луче $[0, +\infty)$;*

3) *$g(r)$ — гладко меняющаяся функция;*

4) *$\operatorname{sgn}((r^\rho)^{(n)}) g^{(n)}(r) > 0$ при $r > 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, если $\rho \notin \mathbb{N}$; для любого натурального n, не превосходящего ρ, если $\rho \in \mathbb{N}$;*

5) *функция $h(e^r)$ строго выпукла на промежутке $[-\infty, +\infty)$, если $\rho > 0$.*

Доказательство. Пусть $h_0(r) = \dfrac{h(r)}{r^\rho}$ для положительных значений r из области определения функции $h(r)$. Найдется функция $h_1(r)$ (см. теорему 2), непрерывная на луче $[0, +\infty)$, положительная на луче $(0, +\infty)$ и эквивалентная на бесконечности функции $h_0(r)$.

Рассмотрим случай $\rho \in \mathbb{N}$. Преобразование (3), примененное к функции $h_1(r)$, обозначим через $b_0(r)$. Для натуральных чисел k, не превосходящих число ρ, определим функции $b_k(r) = \int_0^r b_{k-1}(x)\,dx$. Положим $g(r) = \rho! b_\rho(r)$.

Утверждения 1, 2 и 4 теоремы следуют непосредственно из построения функции $g(r)$, соотношения (4) и теоремы 1.

Для n, не превосходящих ρ, выполнение (2) следует из (4). По теореме 1 $b_0(r)$ — гладко меняющаяся функция. Так как при $n > \rho$

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{r^n g^{(n)}(r)}{g(r)} = \lim_{r \to +\infty} \frac{\rho! r^{n-\rho} b_0^{(n-\rho)}(r)}{b_0(r)} = 0 = \rho(\rho-1)\cdots(\rho-n+1),$$

то (2) верно для функции $g(r)$ и при любом $n > \rho$. Тогда по теореме A $g(r)$ — гладко меняющаяся функция.

Для доказательства утверждения 5 теоремы достаточно показать, что $(rg'(r))' > 0$ для любого $r > 0$. Если $\rho > 1$, то

$$(rg'(r))' = \rho!(rb_{\rho-1}(r))' = \\ = \rho!(b_{\rho-1}(r) + rb_{\rho-2}(r)) > 0 \ \forall r > 0.$$

Если $\rho = 1$, то

$$(rg'(r))' = \left(r^2 \int_0^\infty \frac{h_1(t)}{(t+r)^2}\,dt\right)' = \\ = 2r \int_0^\infty \frac{th_1(t)}{(t+r)^3}\,dt > 0 \ \forall r > 0.$$

Рассмотрим теперь случай $\rho \notin \mathbb{N}$ и $\rho > 0$. Определим функцию

$$h_2(r) = \begin{cases} 0 \text{ при } r \in [0,1], \\ h_1(2)(r-1) \text{ при } r \in (1,2], \\ h_1(r) \text{ при } r \in (2,+\infty), \end{cases}$$

которая непрерывна и неотрицательна на луче $[0,+\infty)$ и эквивалентна на бесконечности функции $h_0(r)$.

Пусть $\{\rho\}$ и $[\rho]$ — соответственно дробная и целая части ρ. Положим $f_{-1}(r) = \dfrac{1}{\Gamma(\{\rho\})\Gamma(1-\{\rho\})}\displaystyle\int_0^\infty \frac{h_2(t)t^{-1+\{\rho\}}}{t+r}\,dt$, $f_k(r) = \displaystyle\int_0^r f_{k-1}(x)\,dx$ для неотрицательных целых чисел k, не превосходящих число $[\rho]$, $g(r) = \rho(\rho-1)\cdots\{\rho\}f_{[\rho]}(r)$.

Несложная проверка с использованием соотношений (4) и (5) показывает, что функция $g(r)$ – искомая.

Наконец, если $\rho < 0$, то полагаем $g(r) = (-\rho)\int_0^\infty \dfrac{h_2(t)}{(t+r)^{-\rho+1}}\,dt$. Тогда утверждения теоремы для данного случая следуют из построения функции $g(r)$ и соотношения (5). □

Укажем, что существование для любой правильно меняющейся функции эквивалентной ей на бесконечности гладко меняющейся функции доказано в теореме 1.8.2 в [2] другим способом (см. также теорему 1.8.3 в [2], в которой дополнительно на луче $(0,+\infty)$ получена строгая монотонность всех производных искомой функции для случая $\rho \notin \mathbb{N}$).

Замечание. Пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho \in [0,1)$ (определение порядка функции см., например, в [5]), $f(0) = 1$, все нули функции $f(z)$ лежат на отрицательной полуоси, $n(r)$ — число нулей (с учетом их кратности) функции $f(z)$ на отрезке $[-r,0]$. Тогда (см. теорему 7.2.1 в [2]) $\ln f(r) = r\displaystyle\int_0^\infty \frac{n(t)}{t(t+r)}\,dt$, откуда $\ln f(r) = r\displaystyle\int_0^\infty \frac{N(t)}{(t+r)^2}\,dt$, где $N(r) = \displaystyle\int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt$ — функция того же порядка, что и функция $n(r)$, т. е. порядка ρ.

Если $n(r)$ – правильно меняющаяся функция порядка ρ, то по теореме 1.5.8 в [2] при $\rho > 0$ или по теореме 1.5.9 *a* в [2] при $\rho = 0$ $N(r)$ – правильно меняющаяся функция порядка ρ. Тогда по теореме 1 функция $\ln f(r)$ также является правильно меняющейся функцией порядка ρ.

2. УТОЧНЕННЫЕ ПОРЯДКИ

Теорема 4. *Положительная бесконечно дифференцируемая в окрестности бесконечности функция $h(r)$ является гладко меняющейся функцией порядка $\rho \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда для функции $\rho(r) = \dfrac{\ln h(r)}{\ln r}$ выполняются следующие свойства:*

$$\lim_{r\to+\infty} \rho(r) = \rho, \tag{8}$$

$$\lim_{r\to+\infty} r^n \ln r\,\rho^{(n)}(r) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $h(r)$ — гладко меняющаяся функция порядка $\rho \in \mathbb{R}$, положительная бесконечно дифференцируемая на луче $(a,+\infty)$, $a > 1$. Далее везде в доказательстве теоремы считаем, что $r \in (a,+\infty)$. Функция $h(r)$ является (см. п.1.8.1. в [2]) правильно меняющейся функцией порядка ρ и поэтому представляется в виде $h(r) = r^\rho h_0(r)$, где $h_0(r)$ — медленно меняющаяся функция. Из этого представления и следует (8), так как известно (см. свойство 2° п.1.5 в [10]), что $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\ln h_0(r)}{\ln r} = 0$.

Покажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{r^n h_0^{(n)}(r)}{h_0(r)} = 0. \tag{10}$$

Из равенства $h'(r) = \rho r^{\rho-1}h_0(r) + r^\rho h_0'(r)$ и условия (2) при $n = 1$ следует соотношение (10) при $n = 1$. Предположим, что соотношение (10) выполняется для любого $n \in \mathbb{N}$, не превосходящего натурального числа $k \geqslant 1$.

Из равенства

$$(r^\rho h_0(r))^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{i=k+1} C_{k+1}^i (r^\rho)^{(i)} h_0^{(k+1-i)}(r)$$

вытекает равенство

$$\frac{r^{k+1}h^{(k+1)}(r)}{h(r)} = \frac{r^{k+1}h_0^{(k+1)}(r)}{h_0(r)} + \sum_{i=1}^{i=k} C_{k+1}^i \rho(\rho-1)\cdots(\rho-i+1)\frac{r^{k+1-i}h_0^{(k+1-i)}(r)}{h_0(r)} + \rho(\rho-1)\cdots(\rho-k),$$

откуда в силу сделанного предположения и условия (2) при $n = k+1$ следует соотношение (10) при $n = k+1$. Таким образом, (10) выполняется для любого $n \in \mathbb{N}$ вследствие принципа математической индукции.

Докажем теперь, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{r\to+\infty} r^n(\ln h_0(r))^{(n)} = 0. \qquad (11)$$

Из равенства $(\ln h_0(r))' = \dfrac{h_0'(r)}{h_0(r)}$, учитывая (10) при $n = 1$, получаем (11) при $n = 1$. Предположим, что соотношение (11) выполняется для любого $n \in \mathbb{N}$, не превосходящего натурального числа $k \geqslant 1$.

Ввиду равенства

$$h_0^{(k+1)}(r) = (h_0(r)(\ln h_0(r))')^{(k)} = \sum_{i=0}^{i=k} C_k^i h_0^{(i)}(r)(\ln h(r))^{(k+1-i)}$$

имеем

$$\frac{r^{k+1}h_0^{(k+1)}(r)}{h_0(r)} = \sum_{i=1}^{i=k} C_k^i \frac{r^i h_0^{(i)}(r)}{h_0(r)} r^{k+1-i}(\ln h_0(r))^{(k+1-i)} + r^{k+1}(\ln h_0(r))^{(k+1)}.$$

Из последнего равенства, принимая во внимание (10) и сделанное предположение, получаем (11) при $n = k+1$. Тогда по принципу математической индукции (11) верно для любого $n \in \mathbb{N}$.

Введем функцию $\rho_0(r) = \rho(r) - \rho$. Докажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{r\to+\infty} r^n \ln r \rho_0^{(n)}(r) = 0. \qquad (12)$$

Из соотношения (8) и определения функции $\rho_0(r)$ получаем равенство $\lim\limits_{r\to+\infty} \rho_0(r) = 0$. Учитывая это равенство и (11) при $n = 1$, из равенства $r(\ln h_0(r))' = r(\rho_0(r)\ln r)' = r\ln r\rho_0'(r) + \rho_0(r)$ находим, что (12) выполняется при $n = 1$.

Предположим, что равенство (12) выполняется для любого $n \in \mathbb{N}$, не превосходящего натурального числа $k \geqslant 1$. Тогда для этих же значений n будет выполняться и равенство

$$\lim_{r\to+\infty} r^n \rho_0^{(n)}(r) = 0. \qquad (13)$$

Так как $(\ln h_0(r))^{(k+1)} = (\ln r\rho_0(r))^{(k+1)} = \sum\limits_{i=0}^{i=k+1} C_{k+1}^i (\ln r)^{(i)} \rho_0^{(k+1-i)}(r)$, то

$$r^{k+1}(\ln h_0(r))^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{i=k+1} C_{k+1}^i (-1)^{i+1}(i-1)! r^{k+1-i} \rho_0^{(k+1-i)}(r) + r^{k+1}\ln r \rho_0^{(k+1)}(r),$$

откуда ввиду (11) при $n = k+1$, (13) и равенства $\lim\limits_{r\to+\infty} \rho_0(r) = 0$ следует (12) при $n = k+1$. На основании принципа математической индукции (12) верно для любого $n \in \mathbb{N}$, но тогда и (9) верно для любого $n \in \mathbb{N}$, так как $\rho^{(n)}(r) = \rho_0^{(n)}(r)$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Доказательство необходимости закончено.

Достаточность доказывается аналогично. При этом используются те же соотношения, что и при доказательстве необходимости. □

Для того чтобы сформулировать следствие теоремы 4, нам понадобятся еще три определения.

Определение 4. Неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция $\rho(r)$, заданная на множестве (c, ∞), $c \geqslant 0$, где c — постоянное число, зависящее от $\rho(r)$, называется уточненным порядком, если $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho < \infty$; $\lim\limits_{r\to\infty} r\ln r\rho'(r) = 0$.

Определение 5. Уточненные порядки $\rho_i(r)$, $i = 1, 2$, называются эквивалентными, если $\lim\limits_{r\to\infty} [\rho_1(r) - \rho_2(r)] \ln r = 0$.

Определение 6. Уточненный порядок $\rho(r)$ называется сильным уточненным порядком, если функция $\rho(r)$ неотрицательна и дважды непрерывно дифференцируема на луче $(b, +\infty)$ (неотрицательное число b зависит от $\rho(r)$) и $\lim\limits_{r\to+\infty} r^2 \ln r \rho''(r) = 0$.

Отметим, что приведенные в статье определения (определения 1 и 2 взяты из [10], определение 3 — из [2], определения 4 и 5 — из [7]) могут иметь несущественные различия с теми определениями, которые в многочисленных работах даются другими авторами. Ср., например, определение 6 с определением сильного уточненного порядка в [6].

Следствие. *Для любого уточненного порядка $\rho_1(r)$ найдется эквивалентный ему бесконечно дифференцируемый сильный уточненный порядок $\rho_2(r)$ с дополнительным свойством:* $\lim\limits_{r\to+\infty} r^n \ln r \rho_2^{(n)}(r) = 0 \;\forall n \in \mathbb{N}$.

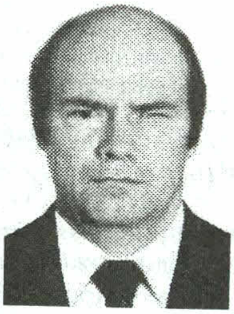
Доказательство. Если $\rho_1(r)$ — уточненный порядок и $\lim\limits_{r\to+\infty} \rho_1(r) = \rho$, $\rho \in [0, +\infty)$, то из леммы 5 § 12 гл. I в [5] следует, что функция $h_1(r) = r^{\rho_1(r)}$ — правильно меняющаяся порядка ρ. По теореме 2 или по теореме 3 для функции $h_1(r)$ найдется эквивалентная ей на бесконечности гладко меняющаяся функция $h_2(r) = r^{\rho_2(r)}$ того же порядка ρ.

Выполнение (9) для функции $\rho_2(r)$ вытекает из теоремы 4. Из равенства $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{r^{\rho_1(r)}}{r^{\rho_2(r)}} = 1$ следует равенство $\lim\limits_{r\to+\infty} (\rho_1(r) - \rho_2(r)) \ln r = 0$. Значит, $\rho_1(r)$ и $\rho_2(r)$ — эквивалентные уточненные порядки. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.** Лекции по математическому анализу. Изд. 2-е. М.: Высш. шк., 2000. 695 с.
2. **Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.** Regular variation // Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. V. 27. 491 p.
3. **Владимиров В. С., Завьялов Б. И.** Тауберовы теоремы в квантовой теории поля // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1980. Т. 15. С. 95–130.
4. **Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.** Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958. 272 с.
5. **Левин Б. Я.** Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956. 632 с.
6. **Лелон П., Груман Л.** Целые функции многих комплексных переменных / Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 348 с.
7. **Маергойз Л. С.** Индикаторная диаграмма целой функции уточнённого порядка и ее обобщенное преобразование Бореля–Лапласа // Алгебра и анализ. 2000. № 2. С. 1–63.
8. **Напалков В. В., Таров В. А.** О некоторых свойствах субгармонических и целых функций нулевого порядка // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. М.: Изд–во АФЦ, 1999. С. 113–129.
9. **Натансон И. П.** Теория функций вещественной переменной. 3-е изд. СПб.: Лань, 1999. 560 с.
10. **Сенета Е.** Правильно меняющиеся функции / Пер. с англ. М.: Наука, 1985. 144 с.
11. **Таров В. А.** О точных оценках типа и нижнего типа субгармонической функции нулевого порядка // Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы. I. Комплексный анализ: Тр. междунар. конф. Уфа: Ин-т математики с ВЦ УНЦ РАН, 2000. С. 179–182.
12. **Хиршман И. И., Уиддер Д. В.** Преобразования типа свертки / Пер. с англ. М.: ИЛ, 1958. 313 с.

ОБ АВТОРАХ



Напалков Валентин Васильевич, проф., зав. кафедрой специальных глав математики УГАТУ, директор Института математики с ВЦ УНЦ РАН. Дипл. математик (Горьковск. гос. ун-т, 1964). Д-р физ.-мат. наук по математическому анализу (защ. в Ин-те математики им. Стеклова АН СССР, 1977). Акад. АН РБ, чл.-кор. РАН. Исследования в области комплексного анализа, функциональных уравнений, теории функций.

Таров Владимир Андреевич, науч. сотр. Ин-та математики с ВЦ УНЦ РАН. Дипл. математик (БГУ, 1993). Область научных интересов: комплексный анализ, теория функций.