

УДК 621.165:539.4(075.8)

## ИССЛЕДОВАНИЯ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ РОТОРА ВЕНТИЛЯТОРНОЙ УСТАНОВКИ ЦЕНТРОБЕЖНОГО ТИПА

И. В. Демьянушко<sup>1</sup>, А. Б. Беляев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>sopromat@mail.ru, <sup>2</sup>okmim@ugatu.ac.ru

<sup>1</sup>Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)

<sup>2</sup>ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 22.08.2019

**Аннотация.** Рассматриваются вопросы изгибных и крутильных колебаний вала ротора центробежных вентиляторов. На основе приведенных уравнений для перемещений упругой линии вала (балки) в местах приложенных сосредоточенных масс и нагрузок приводятся частотные уравнения изгибных колебаний для  $n$ -массовых систем, а также двухмассовых, по которым определялись собственные частоты изгибных колебаний без учета прецессии, а также с учетом прямой и обратной прецессиях. При рассмотрении крутильных колебаний приведенной системы дифференциальных уравнений движения для  $n$ -массовой системы позволяют определить собственные частоты крутильных колебаний. По результатам проведенных теоретических исследований построены зависимости, отражающие оценку влияния геометрических параметров вала, а также прецессионных явлений на работу ротора.

**Ключевые слова:** ротор; частота; колебания; резонанс; прецессия; жесткость; момент инерции; перемещение; гироскопический момент; амплитуда.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время результаты исследований колебаний машин и механизмов имеют большое практическое значение, как обеспечивающие создание более совершенных конструкций рабочих колес вентиляторов с точки зрения повышения их надежности при эксплуатации и увеличении ресурса. Следует отметить недостаточность отражения названных вопросов в литературе по вентиляторостроению. В связи с этим вопросы динамики вентиляторных роторов представляются весьма актуальными и значимыми при их проектировании.

Из практики эксплуатации известно, что вращающиеся валы вентиляторных машин при некоторых определенных числах оборотов, попадая в резонанс, становятся динамически неустойчивыми и при этом могут появиться большие поперечные колебания. При угловых скоростях, равных одной из собственных частот поперечных колебаний

ротора, прогибы его резко возрастают. В общем случае собственные частоты ротора зависят от скорости его вращения. Особую значимость представляют значения собственных частот ротора при воздействии на вал гироскопического момента, что имеет место при эксплуатации вентиляторных установок. Это воздействие особенно значительно при консольном расположении рабочего колеса [1–3].

Устранение колебаний становится неотъемлемой частью качества любой машины. Анализ результатов исследования роторов требует их тщательного анализа и принятия обоснованных технических решений при их конструировании.

Существующая обширная литература по вопросам колебаний позволяет решать технические задачи в этом направлении, хотя следует отметить, что возникающие при этом задачи требуют зачастую проведения дополнительных теоретических и экспериментальных ис-

следований. Следует отметить значимые работы в этом направлении В. Я. Натансона, В. А. Грובה, Ф. М. Диментберга, В. Л. Бидермана, Г. С. Маслова, А. П. Филлипова и др. В иностранной литературе работы Р. Грина, О. Фепля, И. Дика, И. Богданова и др.

Цель работы – определение собственных частот при изгибно-крутильных колебаниях валопроводов роторов центробежных вентиляторов.

### ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Для ротора, несущего произвольное количество сосредоточенных масс  $m_1, m_2, \dots, m_n$  (рис. 1) уравнения изгибных колебаний представляются в каноническом виде [1–7]:

$$\begin{aligned} y_1 &= -m_1 \ddot{y}_1 \delta_{11} - m_2 \ddot{y}_2 \delta_{12} - \dots - m_n \ddot{y}_n \delta_{1n}, \\ y_2 &= -m_1 \ddot{y}_1 \delta_{21} - m_2 \ddot{y}_2 \delta_{22} - \dots - m_n \ddot{y}_n \delta_{2n}, \\ &\dots \\ y_n &= -m_1 \ddot{y}_1 \delta_{n1} - m_2 \ddot{y}_2 \delta_{n2} - \dots - m_n \ddot{y}_n \delta_{nn}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $m_1 \ddot{y}_1, m_2 \ddot{y}_2, \dots, m_n \ddot{y}_n$  – силы инерции;  $y_1, y_2, \dots, y_n$  – поперечные перемещения, прогибы оси балки (вала) в месте приложения масс  $m_1, m_2, \dots, m_n$ ;  $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \dots, \ddot{y}_n$  – вторые производные этих перемещений по времени, индексы  $\delta_{ik}$  при  $\delta$  означают перемещение в направлении  $i$ , вызвано единичной силой, действующей в направлении  $k$ . Эти коэффициенты при изгибе определяются по методу Максвелла–Мора:

$$\delta_{ik} = \sum_0^l \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_k}{EJ} dx,$$

где  $M_i(x)$  и  $M_k(x)$  – изгибающие моменты, вызванные, соответственно единичными силами  $P_i = -m_i \ddot{w}_i = 1, P_k = -m_k \ddot{w}_k = 1$ .

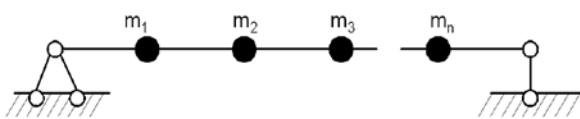


Рис. 1. Упругая балка на двух опорах с сосредоточенными массами

Коэффициенты  $\delta_{ik}$  могут быть вычислены при помощи формулы Верещагина [4, 6]:

$$\delta_{ik} = \sum \frac{S_i M_k^c}{EJ},$$

где  $S_i$  – площадь эпюры  $M_i$  (или части  $M_i$ );  $M_k^c$  – ордината эпюры  $M_k$ , расположенная против центра тяжести площади  $S_i$ . Известно также, что  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ .

С учетом функции прогиба

$$y_i = \lambda_i \sin(p_i t + \varepsilon_i),$$

где  $\lambda_i$  – амплитуда колебаний;  $p_i$  – частоты колебаний;  $\varepsilon_i$  – сдвиг фазы, зависит от начальных условий.

Основная система (1) приводится к частотному уравнению:

$$\begin{aligned} 1 - a_1 p^2 + a_2 p^4 - a_3 p^6 + \dots \\ + (-1)^n a_n p^{2n} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

где  $a_1 \dots a_n$  – коэффициенты при различных степенях  $p$ , например,  $a_1 = m_1 \delta_{11}$  и т.д., откуда  $p_1 = +\sqrt{p_1^2}; p_2 = +\sqrt{p_2^2}; \dots; p_n = +\sqrt{p_n^2} (p_1 > p_2 > \dots > p_n)$ .

Частотное уравнение для двухмассовых систем (рис. 2) представляется в виде:

$$\begin{aligned} p^4 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) \cdot m_1 m_2 - \\ - p^2 (\delta_{11} m_1 + \delta_{22} m_2) + 1 = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Первая и вторая частоты колебаний определяются по формуле:

$$\begin{aligned} p_{1,2} = \frac{\delta_{11} m_1 + \delta_{22} m_2 \pm \sqrt{(\delta_{11} m_1 + \delta_{22} m_2)^2 - \\ - 4 m_1 m_2 \cdot \delta_{11} \delta_{22}}}{4 m_1 m_2 \cdot \delta_{11} \delta_{22} - \\ - 4 m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)} \cdot \\ \cdot \frac{1}{-4 m_1 m_2 \cdot \delta_{12}^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

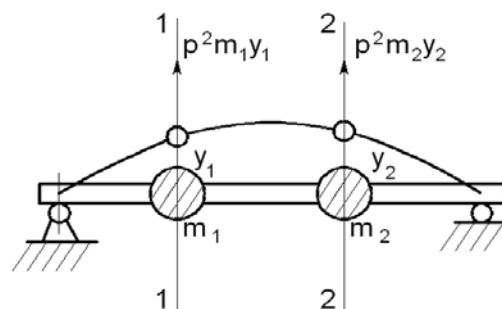


Рис. 2. Изгибные колебания двухмассовой системы

Низшей частоте  $p_1$  соответствует своя форма колебаний, когда обе массы двигаются в одну сторону, частота  $p_2$  соответствует движению масс в разные стороны.

Для колебательной системы с одной массой (рис. 3) уравнение колебаний представляется в виде [2]:

$$y_1 = -m_1 \ddot{y}_1 \delta_{11}, \quad (5)$$

которое эквивалентно  $m\ddot{y} + c_1 y = 0$ ,

где  $c_1 = \frac{1}{\delta_{11}}$  – жесткость вала;  $\delta_{11}$  – линейное перемещение от единичной силы.

Круговая частота изгибных колебаний находится:

$$p = \frac{1}{\sqrt{\delta_{11} m}} \text{ – круговая частота для невращающегося вала ротора без учета угловой инерционности диска рабочего колеса.}$$

Силы инерции;  $M = -J_3 \cdot \ddot{\alpha}$  – инерционный момент.

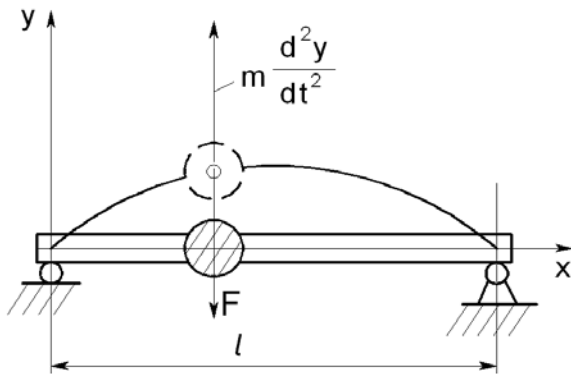


Рис. 3. Изгибные колебания одномассовой системы

При деформации вала происходит не только смещение центра дисков, но также и поворот дисков относительно диаметра – угловое перемещение диска (рис. 4) [1, 6], где  $u_1, u_2$  – линейные,  $\alpha_1, \alpha_2$  – угловые перемещения дисков;  $O_1$  – геометрический центр вала;  $O_2$  – центр массы диска. Поэтому рассмотрим влияние угловой инерционности диска на собственные частоты колебаний невращающегося одномассового диска. Силы инерции;  $M = -J_3 \cdot \ddot{\alpha}$  – инерционный момент.

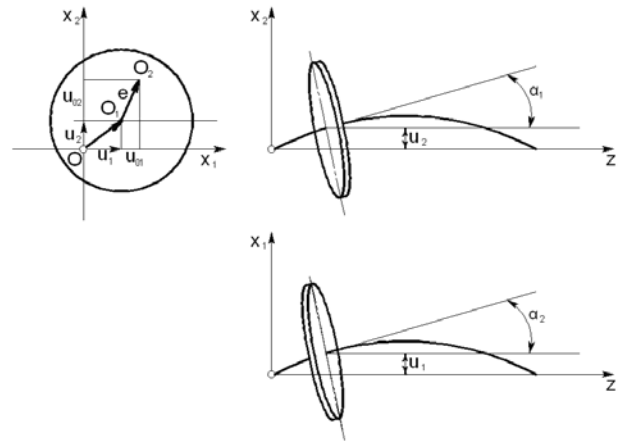


Рис. 4. Кинематические параметры одномассового ротора

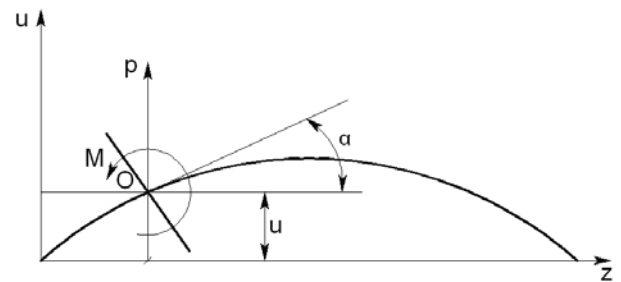


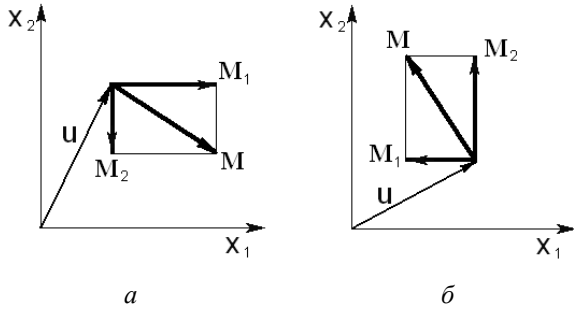
Рис. 5. Силые факторы, действующие на прецессирующий ротор

Со стороны рабочего колеса вентилятора на вал действуют моменты сил инерции. В проекциях на оси  $x_1$  и  $x_2$  моменты представляются в виде сумм проекций инерционного и гироскопического моментов (рис. 6) [1, 6]:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_1^{(i)} + M_1^{(g)}, \\ M_2 &= M_2^{(i)} + M_2^{(g)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $M_1^{(i)} = J_3 \ddot{\alpha}_1$ ,  $M_2^{(i)} = -J_3 \ddot{\alpha}_2$ ,  $M_1^{(g)} = -J_H \dot{\alpha}_2$ ,  $M_2^{(g)} = J_H \dot{\alpha}_1$ .

Здесь  $J_H$  – полярный (относительно оси вращения) момент инерции рабочего колеса вентилятора;  $J_3$  – экваториальный (относительно диаметра) момент инерции рабочего колеса вентилятора;  $M_1^{(i)}$ ,  $M_2^{(i)}$ ,  $M_1^{(g)}$ ,  $M_2^{(g)}$  – составляющие инерционного и гироскопического моментов;  $\dot{\alpha}_1$ ,  $\dot{\alpha}_2$  – угловые скорости поворота диска вокруг диаметра;  $\ddot{\alpha}_1$ ,  $\ddot{\alpha}_2$  – соответствующие угловые ускорения.



**Рис. 6.** Действующие моменты при прямой и обратной синхронной прецессии ротора:  
*а* – прямая синхронная прецессия;  
*б* – обратная синхронная прецессия

Частотное уравнение для рассматриваемого случая представляется в виде [1]:

$$p^{-4} - (\delta_{11}m + \delta_{22}J_{\text{э}}) \cdot p^{-2} + (\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) \cdot mJ_{\text{э}} = 0 \quad (7)$$

Решение этого уравнения представляется в виде:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \beta \pm [(1 - \beta)^2 + \gamma]^{\frac{1}{2}}}}, \quad (8)$$

где  $p_0^2 = (m\delta_{11})^{-1}$ ;  $\beta = \frac{J_{\text{э}}\delta_{22}}{m\delta_{11}}$ ;  $\gamma = \frac{4J_{\text{э}}\delta_{12}^2}{m\delta_{11}^2}$ ;

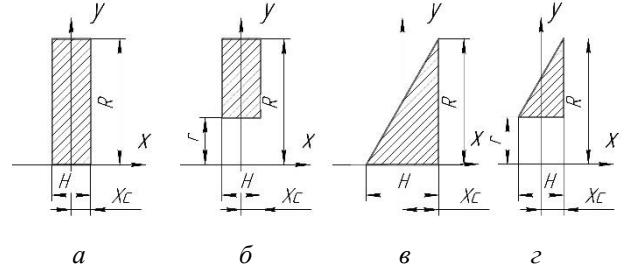
$p_0$  – частота колебаний невращающегося одномассового ротора без учета угловой инерционности рабочего колеса (диска);  $p$  – частота колебаний невращающегося одномассового ротора с учетом угловой инерционности рабочего колеса (диска).

Критические скорости ротора вентилятора при прямой синхронной и обратной прецессии находятся по уравнению (8), в котором

$\beta = \frac{(J_{\text{п}} - J_{\text{э}})\delta_{22}}{m\delta_{11}^2}$ ;  $\gamma = -\frac{4(J_{\text{п}} - J_{\text{э}})\delta_{22}}{m\delta_{11}^2}$  – прямая синхронная прецессия,

$\beta'' = 3\frac{(J_{\text{п}} - J_{\text{э}})\delta_{22}}{m\delta_{11}^2}$ ;  $\gamma'' = \frac{12(J_{\text{п}} - J_{\text{э}})}{m\delta_{11}^2}$  – обратная синхронная прецессия.

**Определение массовых моментов инерций.** Массовые моменты инерции и формулы для их вычисления при различной геометрии дисков представлены ниже (рис. 7) [6].



**Рис. 7.** Моменты инерции некоторых однородных тел: *а* – диск постоянной толщины без центрального отверстия; *б* – диск постоянной толщины с отверстием; *в* – конический диск без центрального отверстия; *г* – конический диск с центральным отверстием

*а)*  $J_{\text{п}} = J_x = \rho\pi \frac{R^4}{2}$  – полярный момент инерции,

$J_D = J_y = \rho\pi \frac{R^2 H}{4} \left( R^2 + \frac{H^2}{3} \right)$  – диаметральный момент инерции;

*б)*  $J_{\text{п}} = J_x = \rho\pi(R^4 - r^2) \frac{H}{2} = \rho\pi(R^2 + r^2)(R^2 - r^2) \frac{H}{2}$ ,

$J_D = J_y = \rho\pi(R^2 - r^2) \left[ (R^2 + r^2) + \frac{H^2}{3} \right] \frac{H}{4}$ ;

*в)*  $J_{\text{п}} = J_x = \rho\pi R^4 \frac{H}{10}$ ,

$J_D = J_y = \rho\pi R^2 \left( R^2 + \frac{H}{4} \right) \frac{H}{20}$ ;

*г)*  $J_{\text{п}} = J_x = \rho\pi(R - r)[R^2(R + 2r) + r^2(3R + 4r)] \frac{H}{10}$ ,

$J_D = J_y = \rho\pi(R - r)(R + 3r) \times$

$\times \left[ \frac{R^2(R + 2r) + r^2(3r + 4r)}{R + 2r} + \right.$

$\left. + \frac{H^2}{12} \left( 3 + r \frac{GR + 7r}{R + 2r} \right) \right] \frac{H}{20}$ .

На основе представленных уравнений и формул были определены частоты собственных колебаний для однодискового ротора с учетом и без учета угловой инерционности вентиляторной установки типа Ц4-70 (рис. 8) [1, 8]. Определены угловые

скорости вращения вала при прямой и обратной прецессиях.

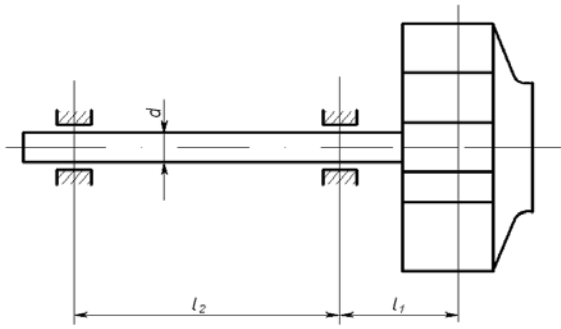


Рис. 8. Схема одномассового ротора вентиляторной установки

**Пример расчета.** Найти частоты собственных колебаний и критические скорости ротора центробежного вентилятора по схеме (рис. 8), установленного в опорах на подшипниках качения. Исходные данные:  $l_1 = 0,30$  м,  $l_2 = 0,4$  м, масса рабочего колеса (диска)  $m = 35$  кг. Полярный момент инерции рабочего колеса  $J_{II} = 0,962$  кг/м<sup>2</sup>, экваториальный момент инерции  $J_{Э} = 0,4791$  кг/м<sup>2</sup>.

Решение.

1. Жесткость вала при изгибе:

$$C = EJ = E \frac{\pi d^4}{64} = 1,962 \cdot 10^{11} \cdot \frac{\pi (0,03)^4}{64} = 1,962 \cdot 10^{11} \frac{\pi \cdot 81 \cdot 10^6}{64} = 21,1 \cdot 10^5 \text{ НМ}^2.$$

2. Единичные перемещения:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{3} l_1^2 (l_1 + l_2) = \frac{1}{3} \cdot 0,30^2 (0,30 + 0,40) = 0,021 \text{ м}^3, \\ \delta_{12} &= l_1 (l_1 + \frac{2}{3} l_2) = 0,3 (0,3 + \frac{2}{3} \cdot 0,4) = 0,085 \text{ м}^2, \\ \delta_{22} &= l_1 + \frac{1}{3} l_2 = 0,3 + \frac{1}{3} \cdot 0,4 = 0,433 \text{ м}. \end{aligned}$$

3. Частота колебаний  $P_0$  для невращающегося ротора без учета угловой инерционности диска:

$$P_0 = (m \cdot \delta_{11})^{-\frac{1}{2}} = \left( 35 \frac{0,021}{21,1 \cdot 10^5} \right) = 286,17 \text{ с}^{-1}.$$

4. Частоты собственных колебаний невращающегося ротора с учетом угловой инерционности диска:

$$P_{1,2} = P_0 \sqrt{2} \left[ 1 + \beta \pm \left( (1 - \beta)^2 + \gamma \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{где } \beta = \frac{J_{Э} \delta_{22}}{m \delta_{11}} = \frac{0,4791 \cdot 0,433}{35 \cdot 0,021} = 0,277,$$

$$\gamma = \frac{4 J_{Э} \delta_{12}^2}{m \delta_{11}^2} = \frac{4 \cdot 0,4791 \cdot 0,085^2}{35 \cdot 0,021^2} = 0,881.$$

$$\begin{aligned} P_{1,2} &= P_0 \sqrt{2} \left[ 1 + \beta \pm \left( (1 - \beta)^2 + \gamma \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= 286,17 \sqrt{2} \left[ 1 + 0,277 \pm \left( (1 - 0,277)^2 + 0,881 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$P_1 = 247,357 \text{ с}^{-1}, \quad P_2 = 247,357 \text{ с}^{-1}.$$

5. Критические скорости ротора при прямой синхронной прецессии:

$$\omega_1 = P_0 \sqrt{2} \left[ 1 - \beta' + \left( (1 + \beta')^2 - \gamma' \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\begin{aligned} \beta' &= \frac{(J_{II} - J_{Э}) \delta_{22}}{m \delta_{11}^2} = \frac{(0,962 - 0,479) 0,085}{35 \cdot 0,021} = \\ &= -0,277, \end{aligned}$$

$$\gamma' = \frac{4(J_{II} - J_{Э}) \delta_{22}}{m \delta_{11}^2} = -\gamma = -0,881.$$

Находим одну критическую скорость  $\omega_1$  (вторая отсутствует из-за знака минус по радикальной отрицательного числа):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= P_0 \sqrt{2} \left[ 1 - \beta' + \left( (1 + \beta')^2 - \gamma' \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} = 286,17 \times \\ &\times \sqrt{2} \left[ 1 - 0,277 + \left( (1 + 0,277)^2 - 0,881 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= 321,085 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

6. Критические скорости ротора при обратной синхронной прецессии определяем по уравнению

$$\omega_{1,2} = P_0 \sqrt{2} \left[ 1 + 0,833 \pm \left( (1 - 0,833)^2 + 2,645 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

где  $\beta'' = 3\beta = 3 \cdot 0,277 = 0,833,$

$$\gamma'' = 3\gamma = 3 \cdot 0,881 = 2,645.$$

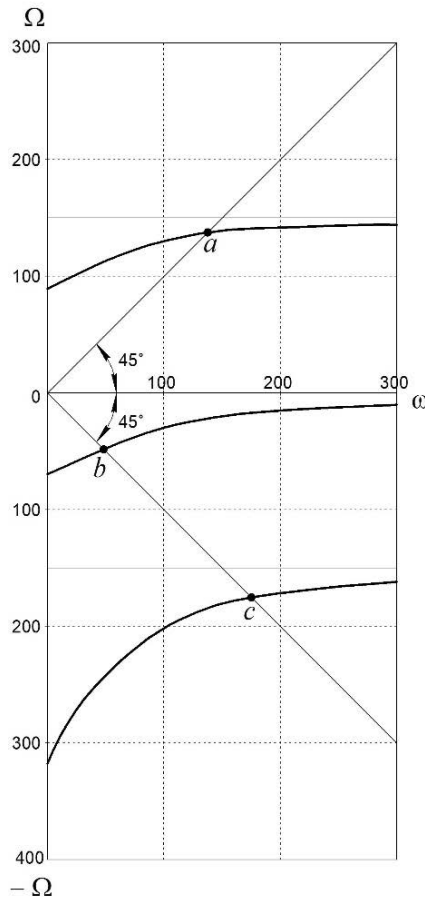
После подстановки  $\beta''$  и  $\gamma''$  в исходные уравнения

$$\omega_{1,2} = 286,17\sqrt{2} \left[ 1 + 0,833 \pm \left( (1 - 0,833)^2 + 2,645 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\omega_1 = 198,602 \text{ c}^{-1},$$

$$\omega_2 = 888,587 \text{ c}^{-1}.$$

Теоретические исследования по определению собственных частот изгибных колебаний проводились с валами различной жесткости. Из результатов проведенных исследований ниже приводится типовая диаграмма изменения частот собственных изгибных колебаний вращающегося вала в зависимости от угловой скорости ротора (рис. 9).



**Рис. 9.** Изменение частоты собственных изгибных колебаний валопровода ротора центробежного вентилятора с учетом прецессии ( $d = 0,03$  м,  $l_1 = 0,3$  м,  $l_2 = 0,4$  м,  $J = 0,962$  кг/м<sup>2</sup>)

### КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Дифференциальные уравнения для  $n$ -массовой системы крутильных колебаний представляются в следующем виде [3]:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + C_{1,2}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0,$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + C_{1,2}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{2,3}(\varphi_2 - \varphi_3) = 0,$$

$$J_i \ddot{\varphi}_i - C_{i-1,i}(\varphi_{i-1} - \varphi_i) + C_{i,i+1}(\varphi_i - \varphi_{i+1}) = 0, \quad (9)$$

$$J_{n-1} \ddot{\varphi}_{n-1} - C_{n-2;n-1}(\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}) + C_{n-1;n}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) = 0,$$

$$J_n \ddot{\varphi}_n - C_{n-1;n}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) = 0,$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n$  – мгновенные углы поворота в местах присоединенных масс;  $C_{1,2}(\varphi_1 - \varphi_2), \dots, C_{n-1;n}(\varphi_{n-1} - \varphi_n)$  – моменты сил упругости для участков эквивалентного вала, действующие на присоединенные массы с моментами инерции  $J_1, J_2, \dots, J_n$ ;  $J_1 \ddot{\varphi}_1 + J_2 \ddot{\varphi}_2 + \dots + J_i \ddot{\varphi}_i + \dots + J_n \ddot{\varphi}_n$  – характеристическое уравнение системы крутильных колебаний.

Общее решение системы

$$\varphi_i = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \sin(\omega_{c,i} t + \varepsilon_i),$$

где  $A_i$  – амплитуда колебаний  $i$ -й массы;  $\varepsilon_i$  – фазовый угол;  $\omega_{c,i}$  – частота собственных колебаний.

Связанность амплитуд колебаний масс системы исходит из уравнений (9) путем подстановки в них частных решений

$$\varphi_1 = A_1 \sin(\omega_{c,i} t + \varepsilon_i),$$

$$A_2 = A_1 - \omega_c^2 \frac{1}{C_{1,2}} J_1 \cdot A_1;$$

$$A_i = A_{i-1} - \omega_c^2 \frac{1}{C_{i-1,i}} \sum_{i=1}^{i-1} J_i A_i;$$

$$A_n = A_{n-1} - \omega_c^2 \frac{1}{C_{n-1;n}} \sum_{i=1}^{n-1} J_n A_n.$$

Относительные амплитуды собственных колебаний системы:

$$\frac{A_1}{A_1} = a_1 = 1; \quad \frac{A_2}{A_1} = a_2; \quad \dots, \quad \frac{A_2}{A_1} = a_3; \quad \frac{A_i}{A_1} = a_i;$$

$$\dots, \quad \frac{A_n}{A_1} = a_n.$$

Величины относительных амплитуд для каждого  $\omega_c$  откладывают в виде ординат, проведенных в местах расположения масс. Концы ординат, соединяясь между собой,

образуют ломаную линию, отражающую форму колебаний. Пересечение формы с осью эквивалентного вала представляет узел колебаний.

Расчетная схема вала ротора центробежного вентилятора для исследования крутильных колебаний представлена на рис. 10.

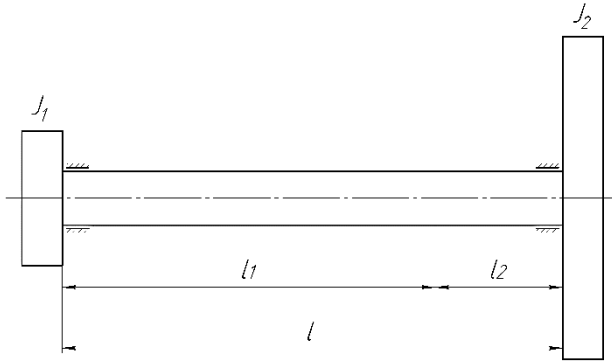


Рис. 10. Расчетная схема ротора

Учитывая, что наиболее распространенной схемой являются вентиляторные установки с односторонним всасыванием, устанавливаемые на 2-х подшипниковых опорах с консольным расположением и применением муфты для соединения вала электродвигателя с ротором рабочего колеса, систему можно рассматривать как двухмассовую. Для двухмассовой схемы дифференциальные уравнения представляются в виде

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + C_{1,2}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0;$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + C_{1,2}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

Во втором уравнении знак «-» объясняется тем, что массы дисков отклонены в противоположные стороны от положения равновесия. После подстановки частных решений корни уравнений:

$$\varphi_1 = A_1 \sin(\omega_c t + \varepsilon) \text{ и } \varphi_2 = A_2 \sin(\omega_c t + \varepsilon),$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – амплитуды угла закрутки участков вала;  $t$  – время. Из решения получается круговая частота собственных крутильных колебаний:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{(J_1 + J_2) \cdot C_{1,2}}{J_1 \cdot J_2}},$$

где  $C_{1,2} = \frac{GJ_p}{L_{1,2}}$ ,  $J_p$  – полярный момент

инерции сечения вала,  $G$  – модуль упругости вала при кручении, где  $J_1$  и  $J_2$  – массовые моменты инерции рабочего колеса вентилятора и соединительной муфты.

После подстановки  $\omega_c$  в одно из дифференциальных уравнений (10) имеем

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{J_1}{J_2}.$$

При  $a_1 = 1$ , определяем  $a_2 = -\frac{J_1}{J_2}$ , стро-

ится форма колебаний для двухмассовой системы. Форма получается одноузловой, двухмассовая система рассматривается как сумма двух одномассовых систем с заделкой в узле с одинаковыми частотами собственных колебаний [3, 6]:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{J_1}{J_2} \text{ с учетом } C_1 = \frac{GJ_p}{l_1} \text{ и } C_2 = \frac{GJ_p}{l_2},$$

$$\text{тогда } \frac{C_1}{C_2} = \frac{J_1}{J_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

Узел колебаний делит вал на участки длиной  $l_1$  и  $l_2$  обратно пропорционально моментам инерции масс, в частности рабочего колеса вентилятора и муфты (рис. 10) [3, 6].

При учете податливости электрических связей электродвигателя применяют формулу:

$$\frac{1}{C} = \frac{10^{-5} n_{эл.}}{N_4 \sqrt{\frac{N_4}{N_a} \cdot \frac{C \mu_m^2}{\eta_a \eta_c \cos^3 \varphi_A}}},$$

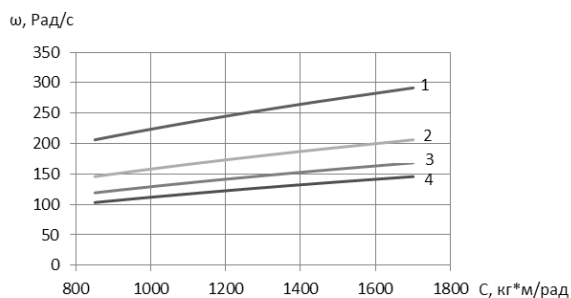
где  $n_{эл.}$  – частота переменного тока, пер./мин;  $N_4$  – эффективная мощность на валу электродвигателя, кВт;  $N_a$  – кажущаяся

щаяся мощность подводимого к электродвигателю тока, кВт;  $\varphi_A$  – угол сдвига фаз между векторами тока и напряжения, рад;

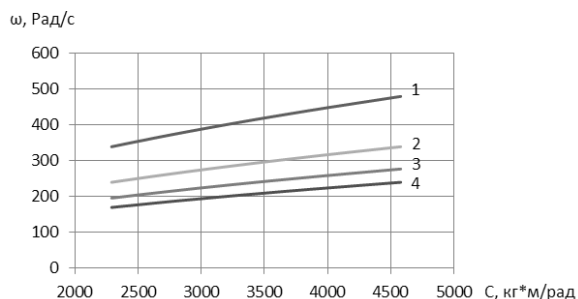
$$\mu_m = \frac{1}{0,4 + 0,0016n} \quad \text{– условная кратность}$$

опрокидывающего момента, выраженная отношением наиболее возможной (без выключения их синхронизма) активной подводимой мощности к кажущейся подводимой мощности;  $n$  – частота вращения электродвигателя, об/мин;  $C = f(\cos \varphi_A)$  – коэффициент (для четырех полюсных машин  $C = 0,74 + 0,3 \cos^2 \varphi_A$ , для остальных машин  $C = 0,65 + 0,55 \cos^2 \varphi_A$ ,  $\eta$  – КПД электродвигателя [3].

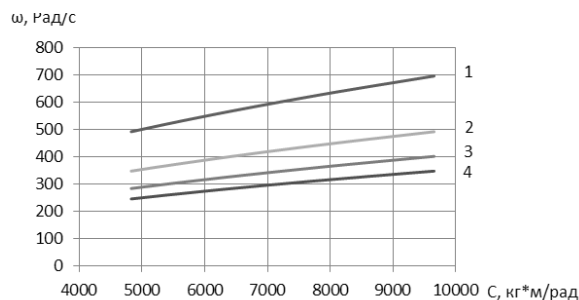
Выполнены теоретические исследования крутильных колебаний, по результатам которых ниже приводятся графики зависимостей собственных частот от жесткости валопроводов (рис. 11–14).



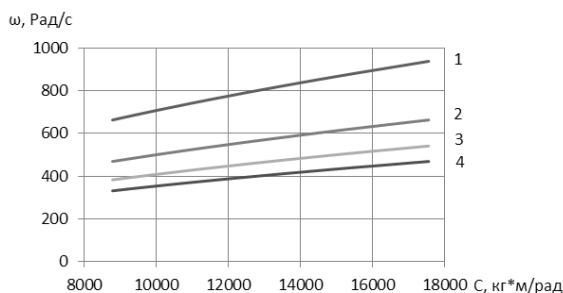
**Рис. 11.** Зависимость собственных частот от жесткости валопровода ( $d = 0,06$  м,  $d_1 = 0,05$  м; 1 –  $J_1 = 0,025$  кг/м<sup>2</sup>,  $J_2 = 0,1$  кг/м<sup>2</sup>; 2 –  $J_1 = 0,05$  кг/м<sup>2</sup>,  $J_2 = 0,2$  кг/м<sup>2</sup>; 3 –  $J_1 = 0,075$  кг/м<sup>2</sup>,  $J_2 = 0,3$  кг/м<sup>2</sup>; 4 –  $J_1 = 0,1$  кг/м<sup>2</sup>,  $J_2 = 0,4$  кг/м<sup>2</sup>)



**Рис. 12.** Зависимость собственных частот от жесткости валопровода ( $d = 0,05$  м,  $d_1 = 0,04$  м; 1 –  $J_1 = 0,025$  кг/м<sup>2</sup>,  $J_2 = 0,1$  кг/м<sup>2</sup>; 2 –  $J_1 = 0,05$  кг/м<sup>2</sup>,  $J_2 = 0,2$  кг/м<sup>2</sup>; 3 –  $J_1 = 0,075$  кг/м<sup>2</sup>,  $J_2 = 0,3$  кг/м<sup>2</sup>; 4 –  $J_1 = 0,1$  кг/м<sup>2</sup>,  $J_2 = 0,4$  кг/м<sup>2</sup>)



**Рис. 13.** Зависимость собственных частот от жесткости валопровода ( $d = 0,04$ ,  $d_1 = 0,03$ ; 1 –  $J_1 = 0,025$  кг/м<sup>2</sup>,  $J_2 = 0,1$  кг/м<sup>2</sup>; 2 –  $J_1 = 0,05$  кг/м<sup>2</sup>,  $J_2 = 0,2$  кг/м<sup>2</sup>; 3 –  $J_1 = 0,075$  кг/м<sup>2</sup>,  $J_2 = 0,3$  кг/м<sup>2</sup>; 4 –  $J_1 = 0,1$  кг/м<sup>2</sup>,  $J_2 = 0,4$  кг/м<sup>2</sup>)



**Рис. 14.** Зависимость собственных частот от жесткости валопровода ( $d = 0,03$ ,  $d_1 = 0,02$ ; 1 –  $J_1 = 0,025$  кг/м<sup>2</sup>,  $J_2 = 0,1$  кг/м<sup>2</sup>; 2 –  $J_1 = 0,05$  кг/м<sup>2</sup>,  $J_2 = 0,2$  кг/м<sup>2</sup>; 3 –  $J_1 = 0,075$  кг/м<sup>2</sup>,  $J_2 = 0,3$  кг/м<sup>2</sup>; 4 –  $J_1 = 0,1$  кг/м<sup>2</sup>,  $J_2 = 0,4$  кг/м<sup>2</sup>)

Источником крутильных колебаний валов является изменение вращающего момента в процессе эксплуатации. Изменение может быть вызвано неточным изготовлением зубчатой муфты (в случае ее установки) или усилиями, возникающими от неодинакового сопротивления лопаток колеса. График изменения крутящего момента представлен в виде тригонометрического ряда Фурье [6]

$$T = T_{cp} + \sum_{k=1}^{k=\infty} T_k \sin(k\omega t + \gamma_k),$$

где  $T_{cp}$  – средний вращающий момент;  $T_k$  – амплитуда  $k$ -й гармоники вращающего момента;  $k$  – частота  $k$ -й гармоники;  $\gamma_k$  – фазовый угол.

При резонансе  $P_C = P_B = k\omega$ , где  $P_C$  – собственная частота крутильных колебаний;  $P_B$  – вынужденная частота.



Экспериментальные крутильные колебания исследуют прибором торсиографом [10]. Закрутка вала при крутильных колебаниях записывается на ленту в виде графика  $\varphi = f(n)$ . Порядок опасной гармоники находится исходя из оборотов резонанса, а частота собственных колебаний будет одной из форм колебаний упругой системы, тогда порядок гармоники находится  $k = \frac{n_c}{n_{рез}}$ , где  $n_c$  – собственная,  $n_{рез}$  – резонансная частота колебаний.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам теоретических исследований изгибно-крутильных колебаний валопровода ротора центробежного вентилятора определены собственные частоты колебаний при различных жесткостях вала с учетом и без учета прецессионных движений. Полученные результаты исследований являются исходным материалом при конструировании вала ротора путем проведения его частотной оптимизации по жесткости с целью отстройки от резонанса.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Костюк А. Г. Динамика и прочность турбомашин. М.: Издательский дом МЭИ, 2007. 475 с. [ A. G. Kostyuk, *Dynamics and strength of turbomachines*, (in Russian). Moscow: Izdatelski' dom MEI, 2007. ]
2. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Т. В. Расчет на прочность деталей машин: справочник. М.: Машиностроение, 1978. 702 с. [ I. A. Birger, B. F. Shorr, T. V. Iosilevich, *Strength calculation of machine parts*, (in Russian). Moscow: Mashinostroenie, 1978. ]
3. Маслов Г. С. Расчеты колебания валов. М.: Машиностроение, 1980. 150 с. [ G. S. Maslov, *Calculations of vibration of the shafts*, (in Russian). Moscow: Mashinostroenie, 1980. ]
4. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Наукова думка, 1988. 734 с. [ G. S. Pisarenko, A. P. Yakovlev, V. V. Matveev, *Handbook of resistance to materials*, (in Russian). Kiev: Naukova Dumka, 1988. ]
5. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с. [ V. L. Biderman, *Theory of mechanical vibrations*, (in Russian). Moscow: Vysshaya shkola, 1980. ]
6. Скубачевский Г. С. Авиационные газотурбинные двигатели. Конструкция и расчет деталей. М.: Машиностроение, 1981. 550 с. [ G. S. Skubachevsky, *Aircraft gas turbine engines. Design and calculation of parts*, (in Russian). Moscow: Mashinostroenie, 1981. ]
7. Хронин Д. В. Колебания в двигателях летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1980. 295 с.

[ D. V. Chronin, *Fluctuations in the engines of aircraft*, (in Russian). Moscow: Mashinostroenie, 1980. ]

8. Соломахова Т. С., Чербышева К. В. Центробежные вентиляторы. Аэродинамические схемы и характеристики: справочник. М.: Машиностроение, 1979. 342 с. [ T. S. Solomakhova, K. V. Cherbysheva, *Centrifugal fans. Aerodynamic diagrams and characteristics*, (in Russian). Moscow: Mashinostroenie, 1980. ]

9. Поляков В. С., Барбаш И. Д., Ряховский О. А. Справочник по муфтам. Л.: Машиностроение, 1979. 342 с. [ V. S. Polyakov, I. D. Barbash, O. A. Ryakhovsky, *Coupling reference*, (in Russian). Leningrad: Mashinostroenie, 1979. ]

10. Крайнев А. Ф. Словарь-справочник по механизмам. М.: Машиностроение, 1981. 438 с. [ A. F. Krainev, *Dictionary-reference mechanisms*, (in Russian). Moscow: Mashinostroenie, 1981. ]

### ОБ АВТОРАХ

**ДЕМЬЯНУШКО Ирина Вадимовна**, д-р техн. наук, проф., засл. деят. науки и техники РФ, зав. кафедрой строительной механики МАДИ. Диплом инж.-механик, окончила МВТУ им. Баумана в 1963 г. В 1981 г., в ЦИАМе защитила докторскую диссертацию. Иссл. в обл. технической диагностики дисков авиационных двигателей и энергетических установок.

**БЕЛЯЕВ Андрей Борисович**, зам. гл. инженера БашНИИ-нефтемаш. Диплом инж. механик-экономист, окончил УГАТУ в 2001 г. Иссл. в обл. технической диагностики деталей и узлов машиностроения, статики и динамики центробежных вентиляторных установок.

### METADATA

**Title:** Research of bending-turning oscillations of rotor centrifugal type fan installation

**Authors:** I. V. Demiyanusko<sup>1</sup>, A. B. Belyaev<sup>2</sup>

**Affiliation:**

<sup>1</sup> Moscow Automobile and Road State Technical University (MADI), Russia.

<sup>2</sup> Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

**Email:** <sup>1</sup>sopromat@mail.ru, <sup>2</sup>okmim@ugatu.ac.ru

**Language:** Russian.

**Source:** Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 23, no. 3 (85), pp. 3-12, 2019. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

**Abstract:** This article discusses the bending and torsional vibrations of the rotor shaft of centrifugal fans. Based on the equations for the movement of the elastic line of the shaft (beam) in places of applied concentrated masses and loads, the frequency equations of bending vibrations for n-mass systems are given, as well as two-mass ones, which were used to determine the eigenfrequencies of bending vibrations without taking into account the precession, as well as taking into account the direct and inverse precessions. When considering torsional vibrations based on the presented system The natural equations of motion for the n-mass system were used to determine the eigenfrequencies of torsional vibrations. Based on the theoretical studies, dependencies were constructed that reflect the assessment of the influence of the geometric parameters

of the shaft, as well as the precession phenomena on the rotor operation.

**Key words:** rotor; frequency; fluctuations; resonance; precession.

**About authors:**

**DEMIYANUSHKO Irina Vadimovna**, Doctor of Technical Sciences, prof., Merit. activist Science and Technology of the Russian Federation, Head Department of Structural Mechanics MADI. Diploma Engineer, graduated from MVTU im. Bauman in 1963. In 1981, at TsiAM, she defended her doctoral dissertation. Research in the region technical diagnostics of aircraft engine disks and power plants.

**BELYAEV Andrei Borisovich**, Deputy Ch. Engineer BashNI-Inftemash. Diploma Ing. economist mechanic. He graduated from USATU in 2001. Ex. in the region technical diagnostics of parts and components of mechanical engineering, with and the dynamics of centrifugal fan installations.