

УДК 608.4

## АНАЛИЗ И ВЕРИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЕГУЛЯТОРА РАСХОДА В РАЗМЕРНОМ И БЕЗРАЗМЕРНОМ ВИДАХ

П. В. ПЕТРОВ<sup>1</sup>, А. А. СОЛОВЬЕВА<sup>2</sup>

<sup>1</sup>pgl.petrov@mail.ru, <sup>2</sup>kerargirit@rambler.ru

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 11.05.2020

**Аннотация.** В рамках статьи предлагается разработка методики проектирования регулятора расхода на основе рационализации технологии компьютерного моделирования. Демонстрируется, как качество результатов численного эксперимента можно значительно улучшить с помощью перехода от первоначальных к обобщенным переменным. Представлены результаты проверки вычислительного эксперимента с физическим. Проведена оценка адекватности полученной математической модели и представлена возможность реализации замены стендовых испытаний предложенным вычислительным экспериментом.

**Ключевые слова:** регулятор расхода; математическая модель; статический режим; динамическая модель; допущения; безразмерные параметры; верификация; численный эксперимент; стендовые испытания; экспериментальная установка; клапан постоянного расхода.

### ВВЕДЕНИЕ

Любая устойчивая система обладает набором качеств. В системном анализе выделяют 6 базовых свойств, которыми должен обладать объект, чтобы считаться системой:

- 1) целостность и раздробляемость;
- 2) наличие связей;
- 3) упорядоченность;
- 4) наличие интегративных качеств;
- 5) наличие цели у системы подразумевает, что любая система должна иметь цель функционирования;
- 6) достижение цели.

Процесс написания математической модели можно разделить на этапы: описание объекта, определение исходных данных, определение допущений, составление уравнений, построение характеристик и анализ.

Все эти этапы образуют единый процесс написания математической модели.

Можно представить связь между этапами принятия допущений и написания системы дифференциальных уравнений, т. е. принятые те или иные допущения будут влиять на вид системы дифференциальных уравнений.

После того как получены динамические характеристики, следует этап их анализа.

Разработать качественную математическую модель можно только тогда, когда будут проделаны последовательно все этапы от определения исходных данных до анализа полученных характеристик.

Целью разработки математической модели является моделирование свойств системы и ее поведения под влиянием различных факторов.

Компьютерное моделирование позволяет разработать точную математическую модель, что экономит время и ресурсы [1].

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ**

Существует три принципа управления сложными системами: принцип разомкнутого управления, принцип управления по отклонению и принцип компенсации (управление по возмущению) [2]. В случае разомкнутого управления система никак не проверяет успешность отклика системы на заданный сигнал. При управлении по отклонению система отслеживает поведение объекта, на который воздействует внешнее возмущение, и компенсирует это воздействие. Исходя из принципа компенсации, система наблюдает за возмущающими воздействиями и реагирует на них, выполняя соответствующий им алгоритм действий, компенсируя возмущения, однако часто не учитываются все факторы, влияющие на поведение системы.

Большая часть систем регулирования в гидравлике работает по отклонению, поскольку данная схема наиболее эффективна в своевременном корректировании поведения выходных звеньев при малых сигналах. Система в этом случае отслеживает наблюдаемые параметры и на основе наблюдений создает алгоритм управления (рис. 1).

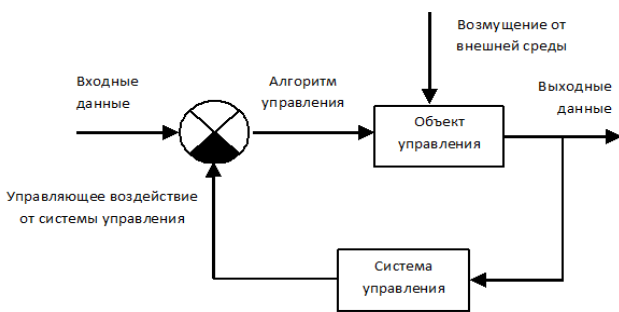


Рис. 1. Схема управления по обратной связи

Схема, представленная на рис. 2, работает именно по этому принципу.

Для того чтобы исследовать заданную систему (рис. 2), необходимо написать ее математическую модель. Каждый элемент системы описывается некоторым уравнением. Это уравнение характеризует работу данного элемента. Точность математичес-

кого описания системы определяется выбранными допущениями. Чем меньше будет учитываться допущений, тем сложнее получится математическая модель. Поэтому необходимо найти оптимальный баланс между точностью описания системы и сложностью ее математической модели.

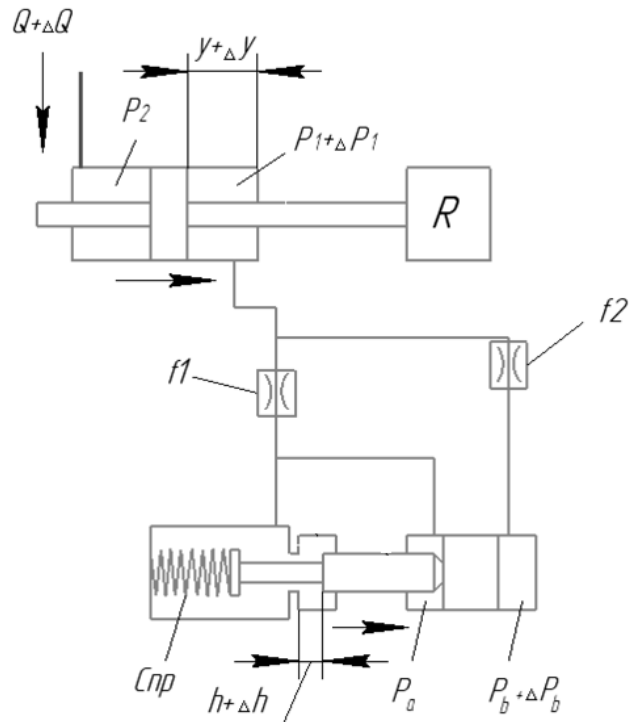


Рис. 2. Расчетная схема регулятора расхода

Приняты следующие допущения:

1. Люфт и зона нечувствительности отсутствуют.
2. Коэффициенты расхода клапана и дросселя постоянны.
3. Температура топлива не изменяется.
4. Потерями в системе пренебрегаем.
5. Плотность жидкости не изменяется.
6. Модуль объемной упругости рабочей жидкости постоянен.
7. Пульсация давления не учитывается.
8. Случайные разбросы значений параметров не учитываются.

Уравнение баланса сил в полостях гидроцилиндра:

$$F \cdot P_1 = F \cdot P_2 + R.$$

Уравнение баланса сил в золотнике:

$$C_{пр} \cdot h + P_2 \cdot F_1 = P \cdot F_2.$$

Уравнение расхода через дроссельную шайбу 1:

$$\mu \cdot f_1 \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho} |P_1 - P_a|} = \mu \cdot b \cdot h \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho} |P_1 - P_c|}.$$

Уравнение расхода через дроссель 6:

$$Q = \mu \cdot f_1 \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho} |P_1 - P_a|} + \mu \cdot f_2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho} |P_1 - P_b|}.$$

В результате статистического моделирования системы были получены численные значения искомых величин (рис. 3).

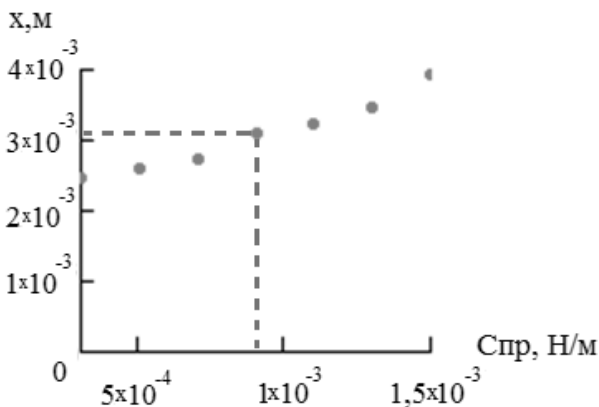


Рис. 3. График зависимости перемещения золотника от жесткости пружины

Полученная статистическая характеристика позволяет выбрать оптимальные значения параметров расчетной схемы.

Простейшая нелинейная математическая модель регулятора расхода представлена ниже.

Приняты следующие допущения:

1. Люфт и зона нечувствительности отсутствуют.
2. Коэффициенты расхода клапана и дросселя постоянны.
3. Температура топлива не изменяется.
4. Потерями в системе пренебрегаем.
5. Плотность жидкости не изменяется.
6. Модуль объемной упругости рабочей жидкости постоянен.
7. Пульсация давления не учитывается.
8. Случайные разбросы значений параметров не учитываются.

Уравнение движения поршня:

$$m_{\text{п}} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = F \cdot P_{\text{п}} - F \cdot P_2 + K_{v_2} \cdot \frac{dy}{dt} - R.$$

Уравнение движения золотника:

$$m_3 \cdot \frac{d^2 h}{dt^2} = F_3 \cdot P_4 - F_2 \cdot P_3 - C_{\text{тр}} \cdot \Delta h - K_v \cdot V_3.$$

Уравнение баланса расхода в правой полости гидроцилиндра:

$$\frac{dP_2}{dt} = \frac{E}{V} \cdot (Q - \Delta Q - \mu \cdot f_1 \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_2 - P_3)} - \mu \cdot f_2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_2 - P_4)} - F_3 \cdot \Delta h).$$

Уравнение баланса расхода в левой полости золотника:

$$\frac{dP_3}{dt} = \frac{E}{V} \cdot (\mu \cdot f_1 \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_2 - P_3)} + F_2 \cdot V_3 - \mu \cdot b \cdot \Delta h \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_3 - P_{\text{сл}})}).$$

Система уравнений решается с помощью метода Рунге – Кутты четвертого порядка. В результате численного моделирования были получены зависимости от времени для золотника и гидроцилиндра (рис. 4–7).

Из рис. 5 видно, что гидроцилиндр выходит на режим через  $t = 0,25$  с, устанавливая постоянную скорость перемещения поршня, поэтому на рис. 4 наблюдаем непрерывное плавное перемещение.

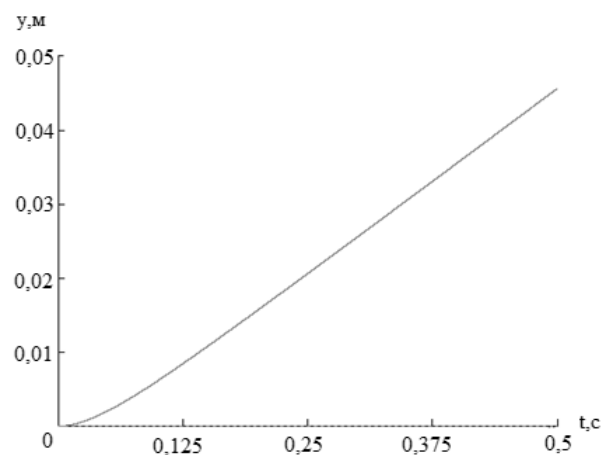


Рис. 4. График зависимости перемещения гидроцилиндра от времени

На рис. 6 наблюдаем небольшую задержку по времени  $t = 0,010$  с в реагировании золотника на внешнее возмущение.

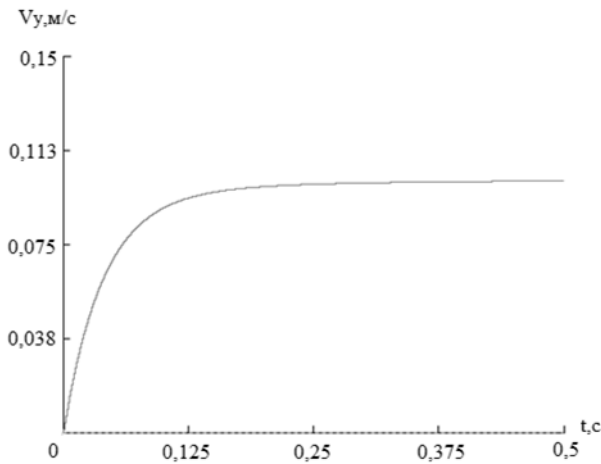


Рис. 5. График зависимости скорости гидроцилиндра от времени

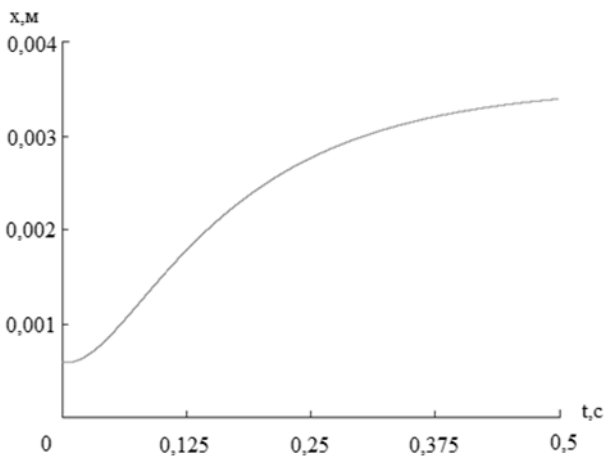


Рис. 6. График зависимости перемещения золотника от времени

Из рис. 7 видно, что при воздействии сигнала возмущения золотник максимально приближается к заданному значению в течение 0,07 с, а затем происходит постепенное достижение указанного режима.

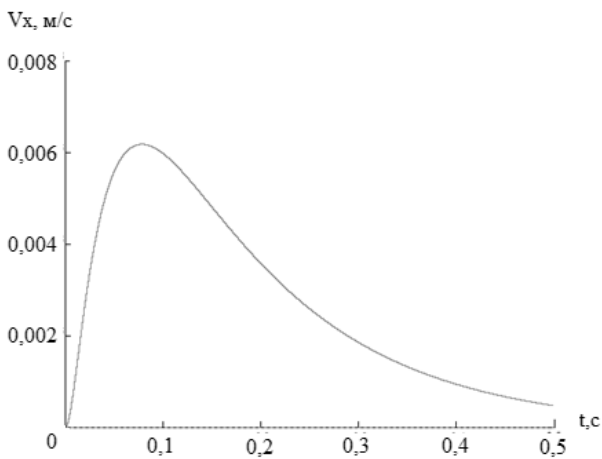


Рис. 7. График зависимости скорости золотника от времени

### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАЗМЕРНОЙ МОДЕЛИ

Обобщенные переменные позволяют по-новому взглянуть на исследуемую систему, существенно облегчают численный эксперимент, результатом которого являются обобщенные экспериментальные характеристики точности, устойчивости, управляемости и быстродействия [3].

Относительные переменные представляют собой частное от деления переменных на масштабы преобразования:

$T_0$  – относительный масштаб времени;

$\bar{P}_2 = \frac{P_2}{P_n}$  – относительное давление в левой полости гидроцилиндра;

вой полости гидроцилиндра;

$\bar{P}_3 = \frac{P_3}{P_n}$  – относительное давление в левой полости поршня золотника;

вой полости поршня золотника;

$\bar{P}_4 = \frac{P_4}{P_n}$  – относительное давление в правой полости поршня золотника;

вой полости поршня золотника;

$\bar{P}_{сл} = \frac{P_{сл}}{P_n}$  – относительное давление слива;

$\xi_1, \xi_2$  – коэффициенты относительного затухания;

$\Delta \bar{x} = \frac{\Delta x}{x_{max}}$  – относительное перемещение

золотника;

$\bar{T}_m = \frac{T_m}{T_0}$  – относительная механическая

постоянная времени гидропривода;

$\bar{T}_{гп} = \frac{T_{гп}}{T_0}$  – относительная гидравлическая

постоянная времени гидропривода;

$\bar{T}_v = \frac{T_v}{T_0}$  – относительная постоянная

времени гидропривода;

$\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3, \bar{R}_5$  – относительная нагрузка.

Уравнение движения поршня:

$$\frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} = \frac{1}{\bar{T}_{m1}^2} \cdot (\bar{R}_3 - \bar{R}_3 \cdot \bar{P}_2 - \bar{R}_5 - 2 \cdot \bar{\xi}_1 \cdot \bar{T}_m \cdot \bar{V}_{гп}).$$

Уравнение движения золотника:

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \frac{1}{\bar{T}_{m2}^2} \cdot (\bar{R}_1 \cdot \bar{P}_4 - \bar{R}_2 \cdot \bar{P}_3 - \Delta \bar{x} - 2 \cdot \bar{\xi}_2 \cdot \bar{T}_{m2} \cdot \bar{V}_3).$$

Уравнение баланса расхода в правой полости гидроцилиндра:

$$\frac{d^2 \bar{P}_2}{dt^2} = \frac{1}{\bar{T}_v} \cdot (\bar{Q} - \Delta \bar{Q} - \bar{Q}_1 \cdot \sqrt{\bar{P}_2 - \bar{P}_3} - \bar{Q}_2 \cdot \sqrt{\bar{P}_2 - \bar{P}_4} - \bar{T}_{гн} \cdot \bar{V}_3) -$$

Уравнение баланса расхода в левой полости золотника:

$$\frac{d^2 \bar{P}_3}{dt^2} = \frac{1}{\bar{T}_v} \cdot (\bar{Q}_1 \cdot \sqrt{\bar{P}_2 - \bar{P}_3} + \bar{T}_{гн} \cdot \bar{V}_3 - \bar{Q}_3 \cdot \Delta \bar{x} \cdot \sqrt{\bar{P}_3 - \bar{P}_{сл}}).$$

Основными обобщенными аргументами задачи являются относительный коэффициент вязкого демпфирования  $\xi_1$ , относительные постоянные времени  $\bar{T}_m, \bar{T}_v$  и относительные величины нагрузки  $\bar{R}_3, \bar{R}_5$ .

Далее проводится анализ работы математической модели под влиянием внешних и внутренних факторов.

По рис. 8 видно, что увеличение  $T_v$  приводит к уменьшению быстродействия. Это объясняется тем, что увеличение объема внутренней полости  $V_0$  при том же расходе жидкости  $Q_0$  ведет к увеличению времени заполняемой полости гидроцилиндра, следовательно, уменьшает быстродействие гидропривода.

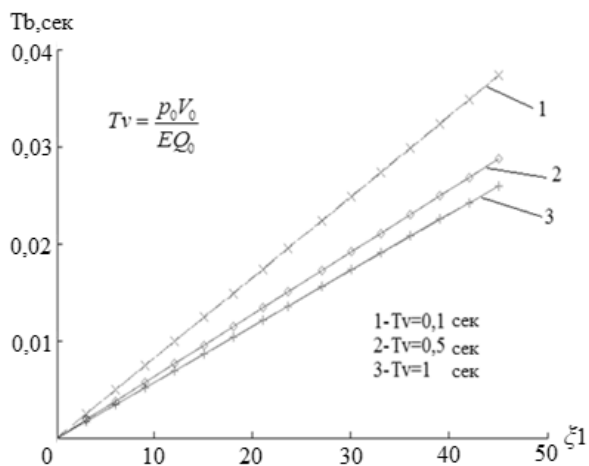


Рис. 8. Влияние емкостной постоянной времени на быстродействие системы

На рис. 9 показано, что увеличение  $T_m$  приводит к уменьшению быстродействия. Это следствие того, что увеличение массы гидроцилиндра ведет к увеличению времени разгона и торможения, тем самым к увеличению выхода на установленный режим.

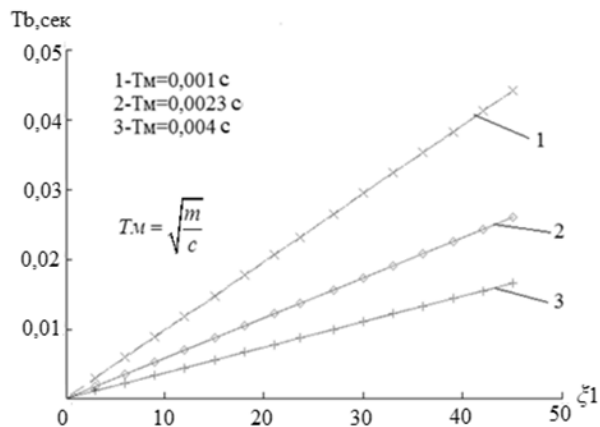


Рис. 9. Влияние механической постоянной времени на быстродействие системы

По рис. 10 видно, что увеличение  $\bar{R}_3$  приводит к уменьшению быстродействия системы.

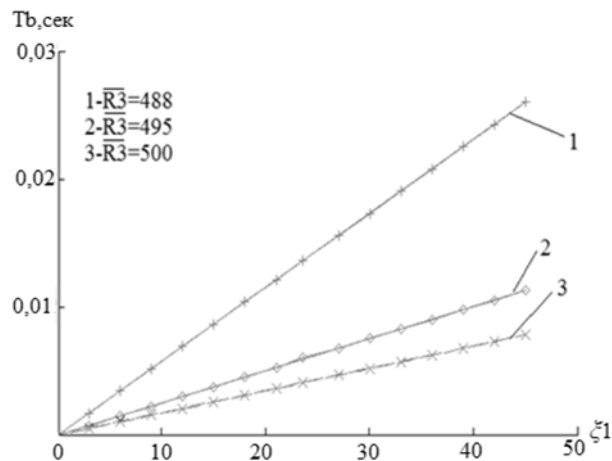


Рис. 10. Влияние относительной нагрузки на быстродействие системы

На рис. 11 показано, как увеличение  $\bar{R}_5$  – относительной величины нагрузки на поршне гидроцилиндра – приводит к увеличению быстродействия всей системы.

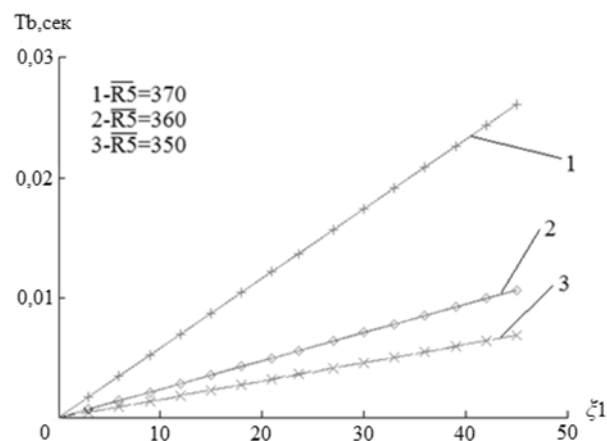


Рис. 11. Влияние относительной нагрузки на быстродействие системы

В ходе исследования безразмерной модели было выявлено, что на работу системы влияют три безразмерных комплекса  $T_{m2}$ ,  $T_v$ ,  $\xi_2$ . Таким образом, рассмотрев влияние этих комплексов на рабочие параметры регулятора расхода, можно определить режимы, на которых система работает наиболее эффективно (рис. 12–19).

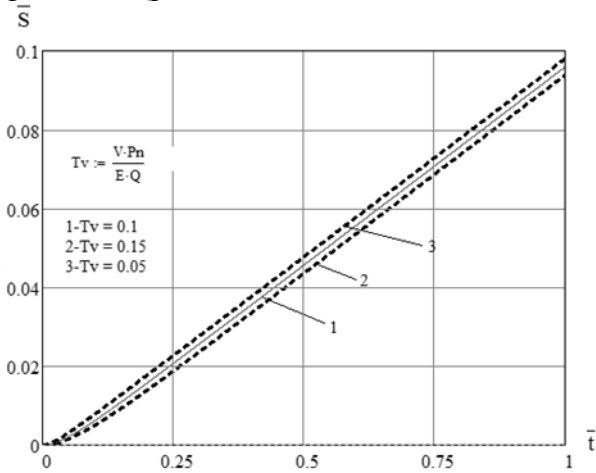


Рис. 12. Влияние комплекса  $T_v$  на перемещение гидроцилиндра

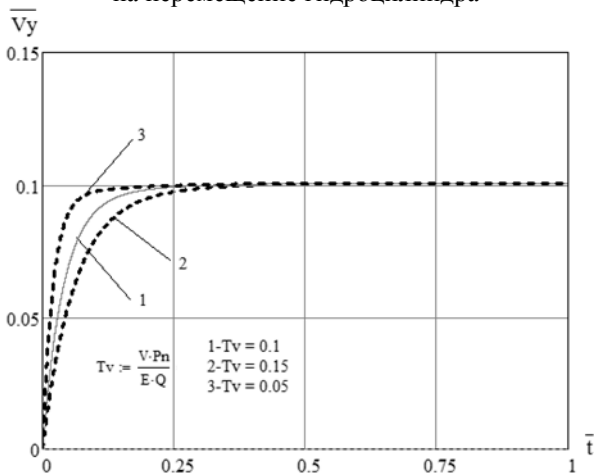


Рис. 13. Влияние комплекса  $T_v$  на скорость гидроцилиндра

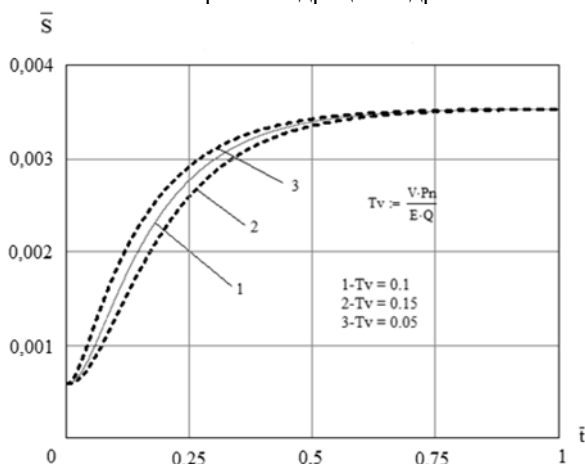


Рис. 14. Влияние комплекса  $T_v$  на перемещение золотника

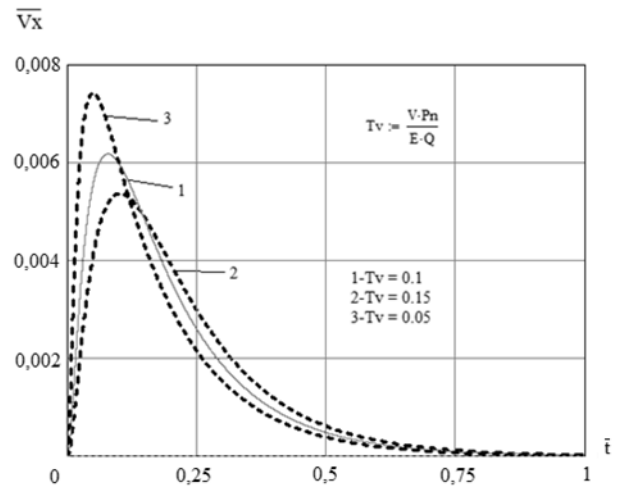


Рис. 15. Влияние комплекса  $T_v$  на скорость золотника

По графикам 12–15 видно, что уменьшение значения  $T_v$  приводит к уменьшению быстродействия. Это объясняется тем, что увеличение объема внутренней полости  $V_0$  при том же расходе жидкости  $Q_0$  ведет к увеличению времени заполняемой полости гидроцилиндра, следовательно, уменьшает быстродействие гидропривода.

По графикам 16–19 видно, что увеличение значения  $T_{m2}$  и уменьшение  $\xi_2$  приводит к уменьшению быстродействия. Это следствие того, что увеличение массы гидроцилиндра ведет к увеличению времени разгона и торможения, тем самым к увеличению выхода на установленный режим.

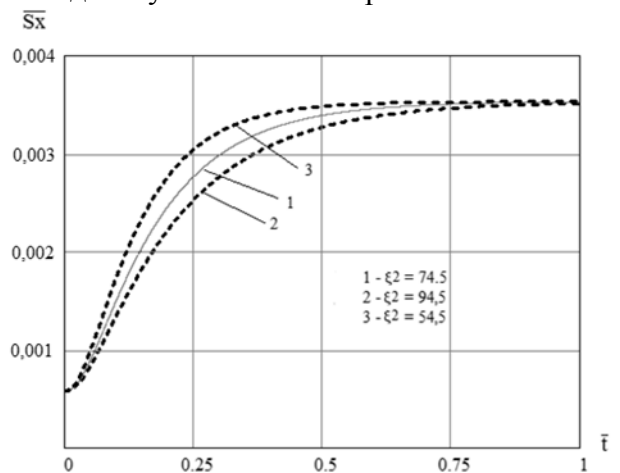


Рис. 16. Влияние комплекса  $\xi_2$  на перемещение золотника

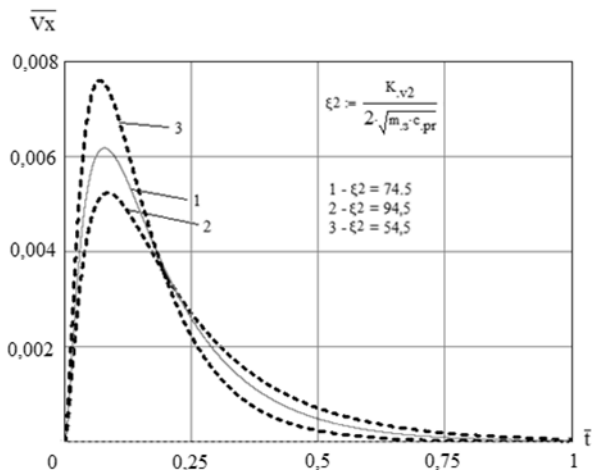


Рис. 17. Влияние комплекса  $\xi_2$  на скорость золотника

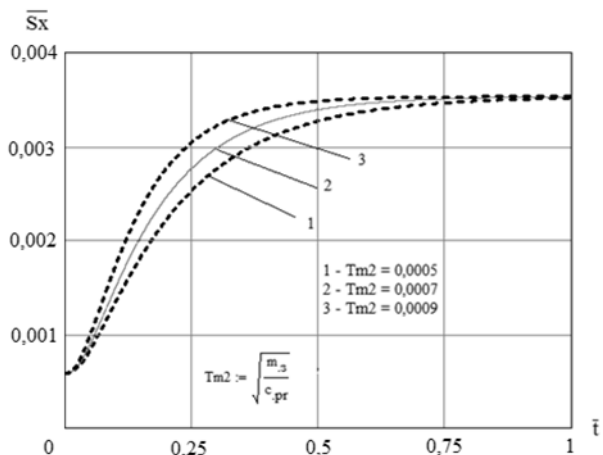


Рис. 18. Влияние комплекса  $T_{m2}$  на перемещение золотника

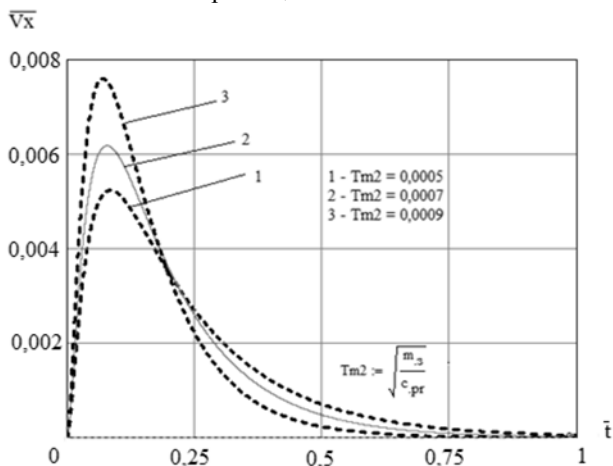


Рис. 19. Влияние комплекса  $T_{m2}$  на скорость золотника

### ВЕРИФИКАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Целью натурального эксперимента является снятие статических и динамических характеристик клапанов на примере клапана постоянного расхода. В качестве эксперименталь-

ного оборудования был взят клапан HYDAC SRVR-10-01 (рис. 20).

Эксперимент проводился по схеме, изображенной на рис. 21.

Устройства, подключенные к стенду:

- ДД1, ДД2 – датчики давления;
- КР1 – клапан регулируемый;
- ДР1 – дроссель;
- Д1 – датчик расхода.

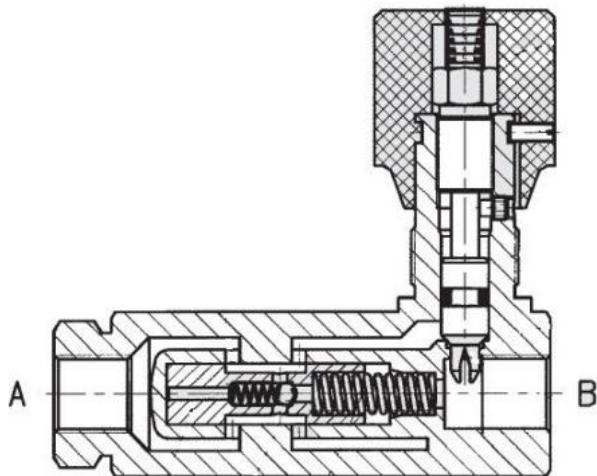


Рис. 20. Клапан HYDAC SRVR-10-01

Регулируемый дроссель ДР1 (рис. 21) используется для имитации нагрузки на цилиндре: при закрытом положении нагрузка на шток цилиндра максимальна, при открытом положении – минимальна, в промежуточных положениях данные расхода через дроссель и давления также фиксируются.

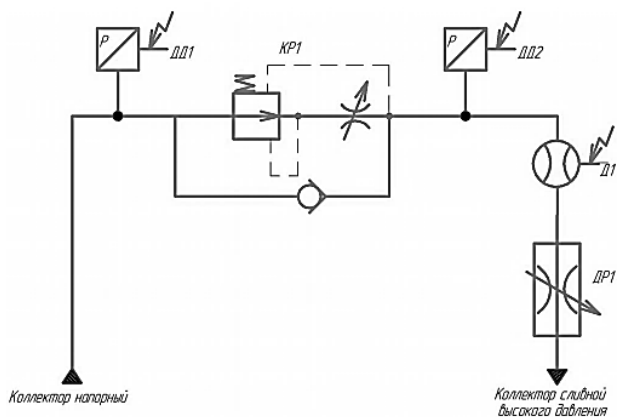


Рис. 21. Схема подключения к стенду

Испытания проводились при изначально полностью закрытом дросселе ДР1, который затем постепенно открывался до макси-

мального значения, при этом клапан КР1 был настроен на расход 5 литров в минуту.

В результате проведенного стендового испытания были получены данные, изображенные на рис. 22.

Полученные в результате натурального эксперимента данные были аппроксимированы с помощью квадратичной зависимости. Таким образом, была получена линейная зависимость, представленная на рис. 23.

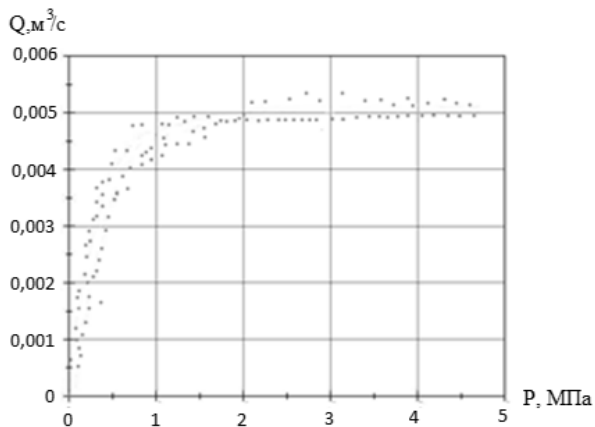


Рис. 22. Результаты натурального эксперимента до обработки

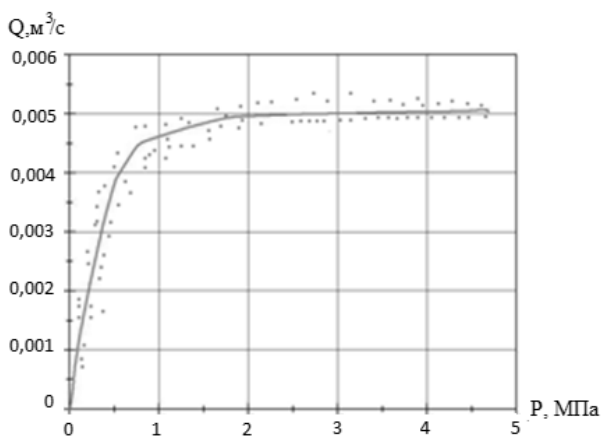


Рис. 23. Результаты натурального эксперимента после обработки

В итоге были получены статическая (рис. 24) и динамическая (рис. 25) характеристики клапана постоянного расхода.

На рис. 25 видно, что происходит небольшой скачок давления, связанный с перерегулированием.

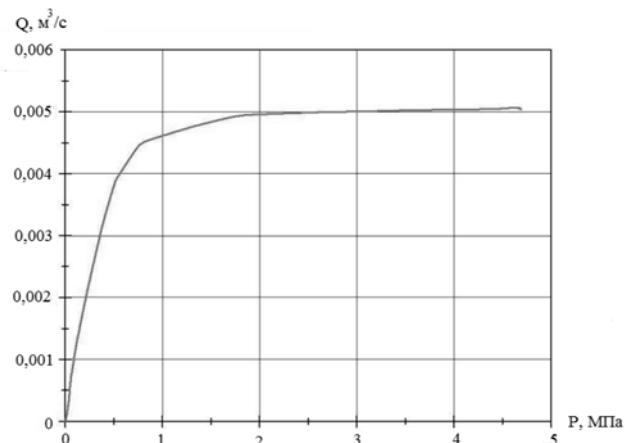


Рис. 24. Статическая характеристика

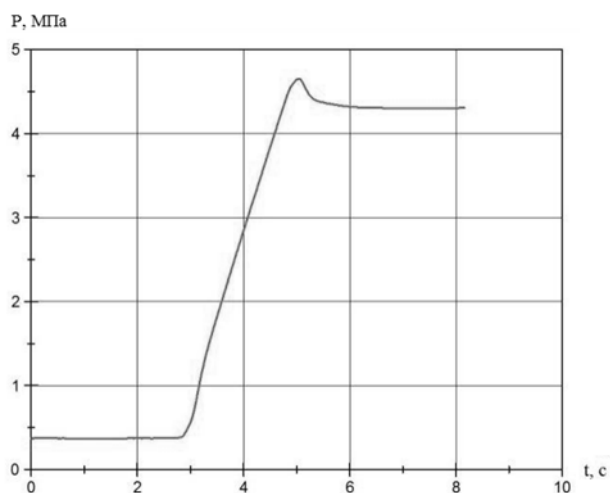


Рис. 25. Динамическая характеристика

Верификация результатов численного и натурального экспериментов (рис. 26, 27) проводилась по динамическим характеристикам регулятора расхода, т. е. по характеру изменения расхода во времени. Из рисунков видно, что соответствие расчетных и экспериментальных данных достаточно хорошее (разница в результатах составляет не более 5–7 %), что говорит об адекватности модели, разработанной на основе метода численного моделирования.



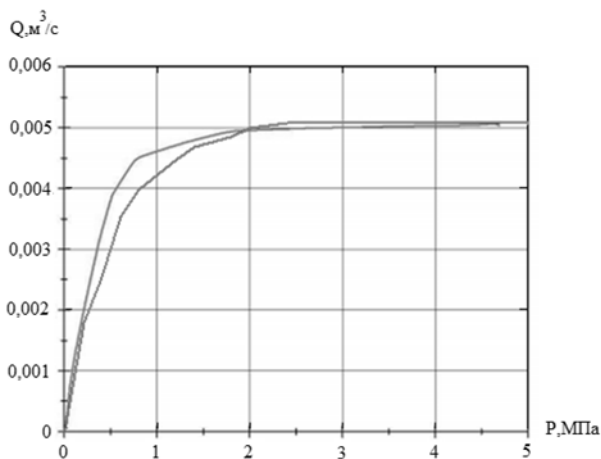


Рис. 26. Сопоставление статических характеристик

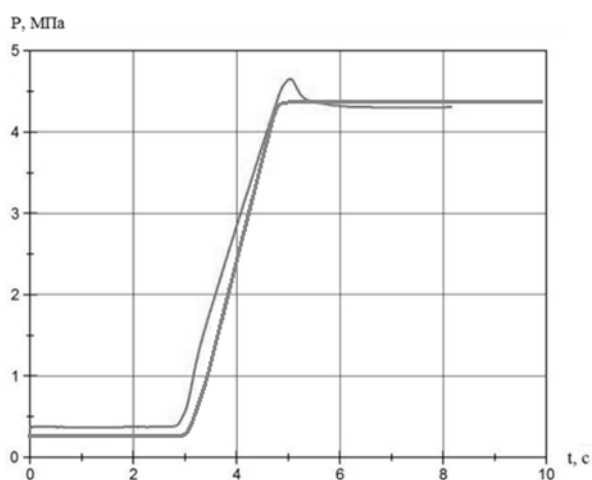


Рис. 27. Сопоставление динамических характеристик

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье представлены результаты исследования регулятора расхода в размерном и безразмерном видах, способ перехода от размерных параметров к безразмерным.

В ходе выполнения системного анализа процесса разработки математической модели гидромеханического регулятора исследуемая система рассматривалась в виде подсистем, состоящих из более мелких процессов. Исходя из метода анализа иерархий для принятия рационального решения проблемы, выявлено, что для увеличения адекватности модели оптимальным вариантом является переход к безразмерным величинам.

В результате была составлена безразмерная модель системы, проведены исследования на быстродействие системы и получены обобщенные характеристики. Проведенное исследование влияния безразмер-

ных комплексов на работу системы регулятора расхода отличается тем, что за основу были взяты три безразмерных комплекса  $T_v$ ,  $T_{m2}$  и  $\xi_2$ , при использовании которых были построены графики влияния комплексов на характеристики.

При проверке адекватности модели с помощью эмпирических данных выявлено, что расхождение значений составляет не более 7 %. Таким образом, разработанная математическая модель регулятора практически в полной мере адекватна реальному объекту.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров П. В., Сунарчин Р. А., Целищев В. А. Технология вычислительного эксперимента // Вестник УГАТУ. 2008. Т. 10, № 1 (26). С. 30–35. [ P. V. Petrov, R. A. Sunarchin, V. A. Tselishev, "The method of computational experiment", (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 10, no. 1 (26), pp. 30-35, 2008. ]
2. Петров П. В., Целищев В. А., Коева А. А. Обобщенный анализ динамических характеристик электрогидроусилителя // Вестник УГАТУ. 2014. Т. 18, № 3 (64). С. 40–47. [ P. V. Petrov, V. A. Tselishev, A. A. Koeva, "The generalised analysis of electrohydraulic booster dynamic characteristics", (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 18, no. 3 (64), pp. 40-47, 2014. ]
3. Петров П. В., Целищев В. А. Основы автоматизированного проектирования гидромеханических устройств. Уфа: РИК УГАТУ, 2019. 241 с. [ P. V. Petrov, V. A. Tselishev, *Basics of automated design engineering of hydromechanical devices*, (in Russian). Ufa: RIK UGATU, 2019. ]

### ОБ АВТОРАХ

**ПЕТРОВ Павел Валерьевич**, доц. каф. прикладной гидромеханики. Дипл. магистр техники и технологии по гидравл., вакуум. и компрес. технике (УГАТУ, 2006). Канд. техн. наук по гидравл. машинам и гидропневмоагрег. (УГАТУ, 2009). Иссл. в обл. гидромехан. систем автоматики ЛА и двигательных установок.

**СОЛОВЬЕВА Анна Александровна**, ст. препод. каф. прикладной гидромеханики. Дипл. магистр техники и технологии по гидравл., вакуум. и компрес. технике (УГАТУ, 2009). Иссл. в обл. моделир. и диагностики устройств гидроавтоматики.

### METADATA

**Title:** Study and verification of nonlinear mathematical model of flow rate regulator in dimensional and dimensionless types.

**Authors:** P. V. Petrov<sup>1</sup>, A. A. Solovyeva<sup>2</sup>

**Affiliation:**

Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

**Email:** <sup>1</sup>pgl.petrov@mail.ru, <sup>2</sup>kerargirit@rambler.ru

**Language:** Russian.

**Source:** Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 24, no. 2 (88), pp. 88-97, 2020. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

**Abstract:** The necessity to adjust dynamic modes of operation and to select rational parameters of hydromechanical devices requires the creation of dynamic models based on non-linear fundamental equations, which allow to reproduce transient processes of the device as accurately and promptly as possible on the computer. The article proposed the development of a flow rate regulator design methodology based on the rationalization of computer modeling technology. It is demonstrated how the quality of numerical experiment results can be significantly improved by transiting from original to generalized variables.

**Key words:** flow rate regulator; mathematical model; static mode; dynamic model; assumptions; dimensionless parameters.

**About authors:**

**PETROV, Pavel Valerievich**, Assoc. Prof., Dept. of Applied hydromechanics. Master of Technics & Technology (UGATU, 2006). Cand. of Tech. Sci. (UGATU, 2009).

**SOLOVYEVA, Anna Alexandrovna**, Assis. Prof., Dept. of Applied hydromechanics. Master of Technics & Technology (UGATU, 2009).