

УДК 534.1

## АНАЛИЗ СПЕКТРА ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ МЕТОДОМ СПЛАЙНОВ

В. П. ПАВЛОВ

victor.pavlov.51@yandex.ru

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 05.11.2016

**Аннотация.** Рассматривается методика применения метода сплайн-функций степени 5 для анализа спектра частот собственных колебаний прямого стержня при различных способах закрепления его концов. На примере решения ряда тестовых задач, имеющих точное аналитическое решение, анализируются возможности предлагаемого метода. Показано, что реализованный алгоритм применения метода сплайн-функций степени 5 позволяет определять значения собственных частот с весьма высокой точностью, ограничением которой являются только возможности современных компьютеров.

**Ключевые слова:** стержни, колебания, частоты собственных колебаний, сплайны, математическое моделирование

### ВВЕДЕНИЕ

При проектировании конструкций часто возникает задача определения частот собственных колебаний стержней. Существующие методы их расчета не всегда обеспечивают требуемую точность. В данной статье излагается новый метод расчета частот собственных колебаний стержней, базирующийся на алгебраических сплайнах степени 5 дефекта 1 и позволяющий достигать, как показано ниже, весьма высокой точности расчетов, ограничением которой являются только возможности современных компьютеров.

Автор считает, что метод сплайнов степени 5, возможности которого будут продемонстрированы ниже, весьма перспективен для его применения в современных вычислительных комплексах, и для обоснования этого утверждения написана данная статья.

Возможности предлагаемого метода оцениваются на тестовой задаче о свободных поперечных колебаниях прямого однородного стержня с постоянными жесткостью  $EI = \text{const}$  и погонной массой  $\mu = \text{const}$ , традиционно описываемых дифференциальным уравнением четвертого порядка [1]:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $w = w(x, t)$  – функции от координаты  $x$  и времени  $t$  перемещения точек осевой линии

вдоль оси  $Z$ ;  $\mu = \mu(x)$  – масса единицы длины стержня;  $E$  – модуль упругости материала;  $I$  – момент инерции поперечного сечения стержня относительно центральной оси сечения, перпендикулярной к плоскости колебаний.

Уравнение (1) содержит производные до четвертого порядка включительно, поэтому при его решении целесообразно применять функции без разрывов производных до четвертого порядка включительно.

Такому требованию удовлетворяют сплайны степени 5 дефекта 1, методика построения и применения которых для решения задач о статическом деформировании стержней изложена в работах [2–5]. Отметим, что до настоящего времени сплайны степени 5 дефекта 1 редко применялись для анализа колебаний стержней. Поэтому в данной статье была решена задача оценки их возможностей для расчета частот собственных колебаний прямого стержня. При этом в качестве эталонов при оценке точности выбраны задачи о колебаниях стержней с различными способами закрепления по концам.

Для объективности возможности по точности предлагаемого автором варианта метода сплайнов, сопоставим с возможностями широко распространенного вычислительного комплекса ANSYS, который считается одним из самых мощных в мире.

## 1. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПАКЕТА ANSYS ПРИ РАСЧЕТЕ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ

### 1.1. Тестовый пример и результаты расчетов

В технической документации вычислительного комплекса ANSYS приводится текст программы VM50, на основе которой создатели пакета ANSYS оценивают его точность при решении задачи о свободных колебаниях прямого стержня шарнирно закрепленного по концам.

Исходные данные в задаче VM50 заданы в американской системе единиц: длина стержня  $l = 80 \text{ in}$ , поперечное сечение квадратное  $b \times h$  при  $b = h = 2 \text{ in}$ , модуль упругости материала  $E = 30 \cdot 10^6 \text{ psi}$ , плотность материала  $7,28 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^2/\text{in}^4$ . В документации по ANSYS численное решение сопоставляется с известным точным решением, для которого при рассматриваемых условиях закрепления стержня круговые частоты собственных колебаний определяются формулой [1]:

$$\omega = \frac{\pi^2 m^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где  $m$  – номер формы колебаний;  $l$  – длина стержня;  $I$  – осевой момент инерции поперечного сечения;  $A$  – площадь поперечного сечения стержня;  $E$  – модуль упругости материала стержня;  $\rho$  – плотность материала стержня.

Для объективной оценки точности по программе VM50 были выполнены расчеты частот собственных колебаний  $\omega$  для 1-ой, 2-ой, 3-ей, 5-ой и 10-ой форм колебаний на сетках различной размерности при числе конечных элементов  $M = 2^k$ ,  $k = 2, 3, \dots, 19$ .

Точность расчетов оценим десятичным логарифмом абсолютного значения относительной ошибки  $\lg |\delta\omega|$ :

$$\lg |\delta\omega| = \lg |(\omega_T - \omega) / \omega_T|, \quad (3)$$

где  $\omega$  – расчетное значение круговой частоты собственных колебаний;  $\omega_T$  – точное значение круговой частоты собственных колебаний,

Результаты численных расчетов в пакете ANSYS для различных форм собственных колебаний стержня представлены на рис. 1 графиками зависимостей логарифма относительной ошибки  $\lg |\delta\omega|$  от десятичного логарифма  $\lg M$  числа конечных элементов  $M$  вдоль длины.

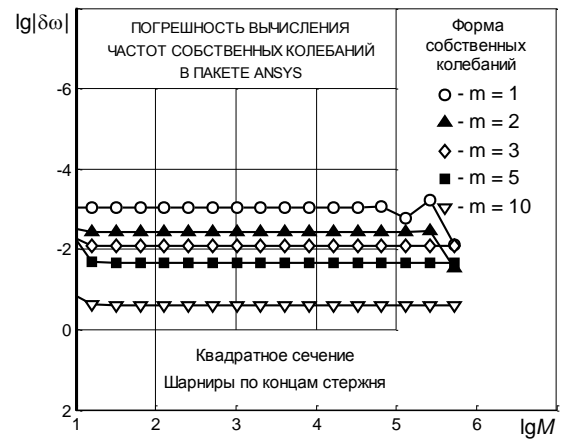


Рис. 1.

### 1.2. Анализ результатов

Из рис. 1 видно, что погрешность расчета частот собственных колебаний практически не зависит от числа конечных элементов  $M$ . При этом для первой формы собственных колебаний ( $m = 1$ ) относительная ошибка имеет порядок  $1 \cdot 10^{-3}$  ( $\lg |\delta\omega| \approx -3$ ), а для десятой формы потери устойчивости ( $m = 10$ ) относительная ошибка больше величины  $1 \cdot 10^{-1}$  ( $\lg |\delta\omega| > -1$ ).

Таким образом, на примере данной конкретной задачи показано, что при решении задачи о собственных колебаниях стержня пакет ANSYS демонстрирует весьма посредственные характеристики:

- максимальная точность расчета частот собственных колебаний стержня в пакете ANSYS по схеме VM50 для первой формы колебаний лишь на уровне трех значащих цифр,
- а для десятой формы – всего лишь одна значащая цифра.

### 1.3. Выводы о возможностях ANSYS

Проведенное исследование показывает, что известный вычислительный комплекс ANSYS, базирующийся на методе конечных элементов, удобен для инженерных расчетов, но не всегда может дать результаты с высокой точностью. Поэтому остается актуальной задачей разработка и других численных методов расчета конструкций на колебания с последующим созданием на их основе соответствующих вычислительных комплексов.

В идеале любую конструкцию необходимо рассчитывать различными методами и сопоставлять полученные результаты, что позволит с большей вероятностью получить действительно верное решение.

## 2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА СПЛАЙНОВ СТЕПЕНИ 5 ДЕФЕКТА 1

При построении сплайна степени 5 дефекта 1 [2] на отрезке  $[a, b]$  формируется сетка  $\Delta$ :

$$\Delta: a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b, \quad (4)$$

имеющая  $N$  узлов. На данной сетке строится сплайн-функция  $\mathbf{W}_{5,1}(x)$  степени 5 дефекта 1, имеющая  $N_s = N + 4$  степеней свободы.

В пределах каждого отрезка  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$  сплайн-функция  $\mathbf{W}_{5,1}(x)$  является многочленом пятой степени

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{5,1}(x) = \sum_{\alpha=0}^5 a_{\alpha}^{(i)} (x - x_i)^{\alpha}, \\ x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \dots, N - 1. \end{cases} \quad (5)$$

Согласно [2], параметры, определяющие сплайн, сведены в вектор-столбец  $\mathbf{Q}$  из  $N_s = N + 4$  параметров сплайна:

$$\mathbf{Q} = (q_k, \quad k = 1, 2, \dots, N + 4)^T, \quad (6)$$

где

$$\begin{cases} q_1 = \mathbf{W}_{5,1}(x_1), & q_2 = \frac{d\mathbf{W}_{5,1}(x_1)}{dx}, \\ q_3 = \frac{d^2\mathbf{W}_{5,1}(x_1)}{dx^2}, & q_4 = \frac{d^3\mathbf{W}_{5,1}(x_1)}{dx^3}, \\ \{q_{i+4} = \frac{d^4\mathbf{W}_{5,1}(x_i)}{dx^4}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (7)$$

В узлах сетки  $\Delta$  рассматриваются значения сплайн-функции  $\mathbf{W}_{5,1}(x)$  и ее производные до четвертого порядка включительно:

$$\begin{cases} f_i = \mathbf{W}_{5,1}(x_i), & f_i^s = \frac{d^s \mathbf{W}_{5,1}(x_i)}{dx^s}, \\ s = 1, \dots, 4, \quad i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (8)$$

Из них формируются векторы-столбцы:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_f = (f_i, \quad i = 1, \dots, N)^T, \\ \mathbf{V}_{df} = (f_i^1, \quad i = 1, \dots, N)^T, \\ \mathbf{V}_{dsf} = (f_i^s, \quad i = 1, \dots, N)^T, \\ s = 2, \dots, 4. \end{cases} \quad (9)$$

Векторы узловых значений сплайн-функции  $\mathbf{W}_{5,1}(x)$  и ее производных определим согласно [2] матричными выражениями:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_f = \mathbf{M}_f \mathbf{Q}, & \mathbf{V}_{df} = \mathbf{M}_{df} \mathbf{Q}, \\ \mathbf{V}_{d2f} = \mathbf{M}_{d2f} \mathbf{Q}, & \mathbf{V}_{d3f} = \mathbf{M}_{d3f} \mathbf{Q}, \\ \mathbf{V}_{d4f} = \mathbf{M}_{d4f} \mathbf{Q}, \end{cases} \quad (10)$$

где  $\mathbf{M}_f, \mathbf{M}_{df}, \mathbf{M}_{d2f}, \mathbf{M}_{d3f}, \mathbf{M}_{d4f}$  – прямоугольные матрицы размера  $N \times (N + 4)$ , формируемые по методике, изложенной в [2].

## 3. МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ, ИМЕЮЩИЕ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

Для оценки точности метода сплайнов при расчете частот собственных колебаний рассмотрим прямой стержень при различных способах его закрепления по концам, имеющий длину  $l = 2$  м и прямоугольное поперечное сечение шириной  $b = 0,03$  м и высотой  $h = 0,02$  м. Модуль упругости материала стержня  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па и плотность  $\rho = 7,85 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

Решение уравнения (1) ищем [1] в виде:

$$w = W(x) \sin \omega t, \quad (11)$$

где  $W(x)$  – форма колебаний.  $\omega$  – частота собственных колебаний.

После подстановки (11) в (1) запишем

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \sin \omega t - \mu \omega^2 \sin \omega t W = 0. \quad (12)$$

После преобразования из (12) получаем:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - a^4 W = 0, \quad (13)$$

где

$$a^4 = \frac{\mu \omega^2}{EI}. \quad (14)$$

Согласно [1], общее решение уравнения (13) имеет вид:

$$W = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + C_3 e^{ax} + C_4 e^{-ax}, \quad (15)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – постоянные интегрирования, определяемые из краевых условий.

### 3.1. Стержень, шарнирно закрепленной по концам

Для рассматриваемого стержня имеем четыре краевых условия:

$$\begin{cases} W(x=0) = \frac{\partial^2 W(x=0)}{\partial x^2} = 0, \\ W(x=l) = \frac{\partial^2 W(x=l)}{\partial x^2} = 0, \end{cases} \quad (16)$$

при которых получаем [1] ряд решений уравнения (13) относительно  $a$ :

$$a_m = m\pi/l, \quad m = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Подставив (17) в (14), после ряда преобразований получим выражение для вычисления собственных частот колебаний  $\omega_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

$$\omega_m = \frac{\pi^2 m^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (18)$$

### 3.2. Стержень, защемленный по концам

Рассматривается стержень, защемленный на левом при  $x = 0$  и правом при  $x = l$  концах. Для такого стержня краевые условия имеют вид:

$$\begin{cases} W(x=0) = \frac{\partial W(x=0)}{\partial x} = 0, \\ W(x=l) = \frac{\partial W(x=l)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (19)$$

При условиях (19) значения  $a_m$  параметра  $a$  являются [1] решением трансцендентного уравнения:

$$\cos al(e^{al} + e^{-al}) - 2 = 0. \quad (20)$$

### 3.3. Стержень, защемленный на левом конце и шарнирно опертый на правом

Рассматривается стержень, защемленный на левом конце при  $x = 0$  и шарнирно опертый на правом при  $x = l$ . Для такого стержня краевые условия имеют вид:

$$\begin{cases} W(x=0) = \frac{\partial W(x=0)}{\partial x} = 0, \\ W(x=l) = \frac{\partial^2 W(x=l)}{\partial x^2} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

При условиях (19) значения  $a_m$  параметра  $a$  являются [1] решением трансцендентного уравнения:

$$\sin al(e^{al} + e^{-al}) - \cos al(e^{al} - e^{-al}) = 0. \quad (22)$$

### 3.4. Стержень с жестким закреплением слева и свободным правым концом

Рассматриваемый стержень жестко закреплен на левом конце при  $x = 0$  и имеет свободный правый конец при  $x = l$ . Для такого стержня краевые условия имеют вид:

$$\begin{cases} W(x=0) = \frac{\partial W(x=0)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial^2 W(x=l)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 W(x=l)}{\partial x^3} = 0. \end{cases} \quad (23)$$

При условиях (23) значения  $a_m$  параметра  $a$  являются [1] решением трансцендентного уравнения:

$$\cos al \operatorname{ch} al + 1 = 0. \quad (24)$$

## 4. ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОГО СТЕРЖНЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ КРУГОВЫХ ЧАСТОТ ЕГО СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

На основе соотношений (10) построим дискретный аналог дифференциального уравнения (13) для вычисления частот  $\omega$  собственных колебаний стержня:

$$\mathbf{M}_{d4f} \mathbf{Q} - \lambda \mathbf{M}_f \mathbf{Q} = 0, \quad (25)$$

где введено обозначение

$$\lambda = a^4. \quad (26)$$

Система уравнений (25) имеет  $N$  уравнений при  $N + 4$  неизвестных.

Дополним (25) уравнениями, учитывающими краевые условия (16):

$$\mathbf{A} \mathbf{Q} = 0, \quad (27)$$

где  $\mathbf{A}$  – прямоугольная матрица размера  $4 \times (N + 4)$ , которая заполняется согласно (16) компонентами из соответствующих строк матриц  $\mathbf{M}_f$  и  $\mathbf{M}_{d2f}$ :

$$\begin{cases} A_{1,j} = M_{1,j}^f, \\ A_{2,j} = M_{1,j}^{d2f}, \\ A_{3,j} = M_{N,j}^f, \\ A_{4,j} = M_{N,j}^{d2f}, \quad j = 1, \dots, N + 4. \end{cases} \quad (28)$$

Преобразуем (25) таким образом, чтобы в полученной системе алгебраических уравнений число неизвестных стало равным  $N$ .

Для этого из первых четырех столбцов матрицы  $\mathbf{A}$  сформируем квадратную матрицу  $\mathbf{B}$  размера  $4 \times 4$ :

$$B_{i,j} = A_{i,j}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, 4. \quad (29)$$

Далее определим матрицу  $\mathbf{C}$ , обратную к матрице  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}. \quad (30)$$

Умножим слева матрицу  $\mathbf{A}$  на матрицу  $\mathbf{C}$  и получим матрицу  $\tilde{\mathbf{A}}$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{C} \mathbf{A}, \quad (31)$$

в которой первые четыре столбца представляют собой единичную матрицу.

Используя матрицу  $\tilde{\mathbf{A}}$ , обнулیم первые четыре столбца матриц  $\mathbf{M}_f$ ,  $\mathbf{M}_{d4f}$ , применяемых в матричном уравнении (25). При этом получим квадратные матрицы  $\tilde{\mathbf{M}}_f$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}_{d4f}$  размера  $N \times N$ :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{M}}_f = (\tilde{M}_{i,j}^f, \quad i, j = 1, \dots, N), \\ \tilde{\mathbf{M}}_{d4f} = (\tilde{M}_{i,j}^{d4f}, \quad i, j = 1, \dots, N). \end{cases} \quad (32)$$

Их коэффициенты формируются по формулам:

$$\begin{cases} \tilde{M}_{i,j}^f = M_{i,j+4}^f - \sum_{k=1}^4 M_{i,k}^f \tilde{A}_{k,j+4}, \\ \tilde{M}_{i,j}^{d4f} = M_{i,j+4}^{d4f} - \sum_{k=1}^4 M_{i,k}^{d4f} \tilde{A}_{k,j+4}, \\ i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (33)$$

Введем в рассмотрение вектор-столбец параметров сплайна

$$\tilde{\mathbf{Q}} = (\tilde{Q}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N)^T, \quad (34)$$

компоненты которого определяются по компонентам вектора  $\mathbf{Q}$ :

$$\tilde{Q}_k = q_{k+4}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (35)$$

На основе  $\tilde{\mathbf{M}}_f$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}_{d4f}$  и вектора  $\tilde{\mathbf{Q}}$  уравнение (25) принимает вид:

$$\tilde{\mathbf{M}}_{d4f} \tilde{\mathbf{Q}} - \lambda \tilde{\mathbf{M}}_f \tilde{\mathbf{Q}} = 0. \quad (36)$$

Умножив уравнение (36) на матрицу  $\tilde{\mathbf{M}}_f^{-1}$ , обратную к матрице  $\tilde{\mathbf{M}}_f$ , получим:

$$\tilde{\mathbf{M}}_f^{-1} \tilde{\mathbf{M}}_{d4f} \tilde{\mathbf{Q}} - \lambda \mathbf{E} \tilde{\mathbf{Q}} = 0, \quad (37)$$

Где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица.

Введем обозначения:

$$\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{M}}_f^{-1} \tilde{\mathbf{M}}_{d4f}, \quad (38)$$

где  $\mathbf{D}$  – квадратная матрица размера  $N \times N$ .

При обозначениях (38) уравнение принимает вид

$$(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{E}) \tilde{\mathbf{Q}} = 0. \quad (39)$$

Система имеет решения только при условии, что  $\lambda$  являются собственными числами матрицы  $\mathbf{D}$ . Определив значения  $\lambda$ , на основе (14) и (26), получим формулу

$$\omega = \sqrt{\lambda EI / \mu} \quad (40)$$

и вычислим частоты  $\omega$  собственных колебаний.

Точность расчетов оценим десятичным логарифмом абсолютного значения относительной ошибки  $\lg |\delta\omega|$ :

$$\lg |\delta\omega| = \lg |(\omega_T - \omega) / \omega_T|, \quad (41)$$

где  $\omega$  – расчетное значение,  $\omega_T$  – точное значение частоты собственных колебаний

Результаты численных расчетов методом сплайнов для первых десяти форм собственных

колебаний представлены на рис. 2 графиком зависимости  $\lg |\delta\omega|$  от десятичного логарифма  $\lg M$ , где  $M$  – число отрезков сетки узлов сплайна, определяемое формулой  $M = N - 1$ .

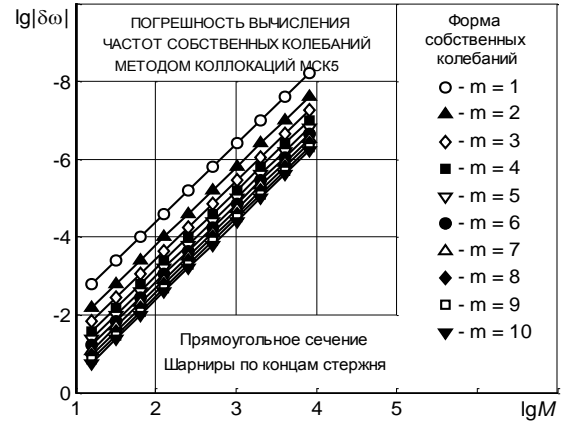


Рис. 2.

Вид зависимости  $\lg |\delta\omega| \sim \lg M$  на рис. 2 показывает, что реализованный метод сплайнов характеризуется вторым порядком сходимости [2].

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ С РАЗЛИЧНЫМИ СПОСОБАМИ ЗАКРЕПЛЕНИЯ ЕГО КОНЦОВ

### 5.1. Стержень, защемленный по концам

На рис. 3 представлены в координатах  $\lg |\delta\omega| \sim \lg M$  зависимости ошибок численного расчета частот собственных колебаний при первых десяти формах для стержня, защемленного по концам.

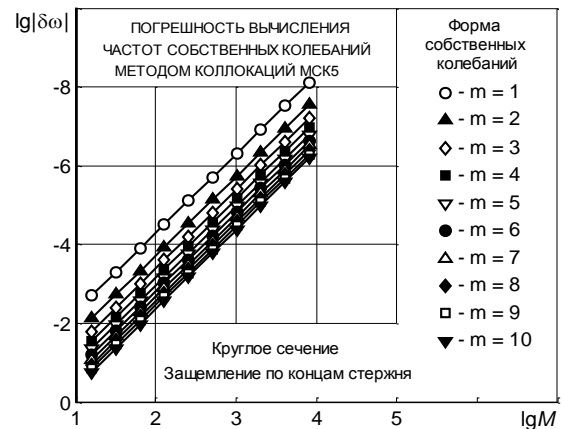


Рис. 3.

Видно (рис. 3), что для данных способов закрепления реализованный метод характеризуется вторым порядком сходимости [2].

### 5.2. Стержень, защемленный на левом конце и шарнирно опертый на правом

На рис. 4 представлены в координатах  $\lg |\delta\omega| \sim \lg M$  зависимости ошибок численного расчета частот собственных колебаний при первых десяти формах для стержня, защемленного на левом конце и шарнирно опертого на правом.

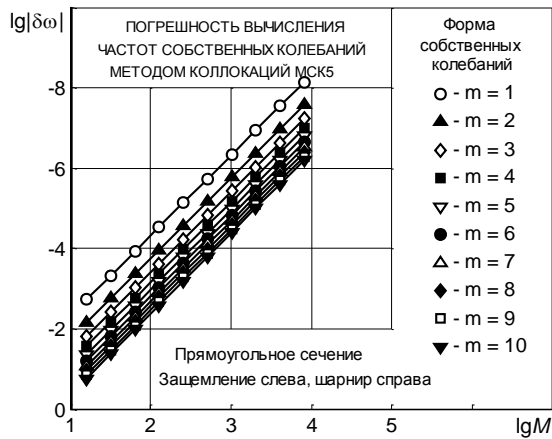


Рис. 4.

Видно (рис. 4), что реализованный метод характеризуется вторым порядком сходимости [2].

### 5.3. Стержень, с жестким закреплением слева и свободным правым концом

На рис. 5 представлены в координатах  $\lg |\delta\omega| \sim \lg M$  зависимости ошибок расчета частот собственных колебаний при первых десяти формах для стержня, защемленного на левом конце и имеющего свободный правый конец.

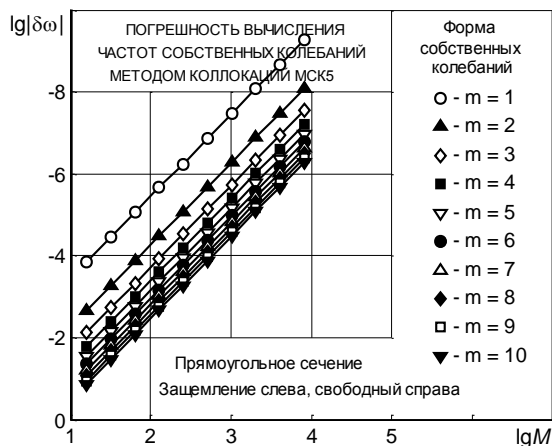


Рис. 5.

Видно (рис. 5), что для данных способов закрепления реализованный метод характеризуется вторым порядком сходимости [2].

Из рис. 2–5 видно, что при всех способах закрепления стержня точность вычисления частот собственных колебаний стержня практически одинакова.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье представлены результаты разработки нового метода расчета частот собственных колебаний стержня, базирующегося на сплайнах степени 5 дефекта 1.

Разработанный метод характеризуется вторым порядком сходимости и высокой точностью, ограничением которой являются только возможности современных компьютеров. Это видно из рис. 2–5, где с увеличением числа отрезков  $M$  сетки узлов имеет место уменьшение вычислительной погрешности  $\delta\omega$  на всем рассмотренном диапазоне  $M$ . В итоге при числе отрезком сетки  $M = 8192$  относительная погрешность  $\delta\omega$  расчета частот собственных колебаний по первым десяти формам не превышает  $1 \cdot 10^{-6}$ . При этом процесс увеличения величины  $M$  был прекращен только из-за ограничения оперативной памяти компьютера и слишком большого времени выполнения расчетов.

Дальнейшие исследования предполагается продолжить в направлении исследования возможности разработанного метода сплайнов для определения частот собственных колебаний стержня при переменном поперечном сечении стержня.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 560 с. [M. Babakov. Teoriya kolebanij (Oscillation theory). Moscow: Nauka, 1965. 560 p.]
2. **Павлов В. П.** Метод сплайнов и другие численные методы решения одномерных задач механики деформируемых твердых тел. Уфа: Уфимск. Гос. Авиац. техн. ун-т Уфа. 2003. 197 с. [V. P. Pavlov. Metod splajnov i drugie chislennye metody reshenija odnomernyh zadach mehaniki deformiruemih tverdyh tel. Ufa: USATU. 2003. 197 p.]
3. **Абдрахманова А. А., Павлов В. П.** Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния стеклопластикового стержня при различных жесткостях опор. Вестник УГАТУ. Уфа. 2007, Т.9. №5(23). С. 87–92. [A. A. Abdrakhmanova, V. P. Pavlov. Mathematical modeling of the stress-strain state of glass-plastic beam with different stiffnesses of supports // Vestnik UGATU, vol. 9, No. 5(23), 2007, pp. 87–92. (rus).]
4. **Павлов В. П.** Оценка возможностей метода сплайн-функций при решении уравнений, описывающих изгиб стержней // Механика деформируемых тел и конструкций: межвуз. сб. науч. тр. Уфа: 1998. С. 15–20. [V. P. Pavlov. Assessment the possibilities of method of spline-functions for solving equations describing the bending of beams. // Mezhvuzovskij nauchn. sb. «Mekhanika deformiruemih tel i konstrukcij». Ufa, 1998, pp. 15-20. (rus).]

5. Павлов В. П., Абдрахманова А. А., Абдрахманова Р. П.

Задача расчета стержней одномерным сплайном пятой степени дефекта два // Математические заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, вып. 1. С. 50–59. [V. P. Pavlov, A. A. Abdrahmanova, R. P. Abdrahmanova. The problem of calculating beams by one-dimensional spline fifth degree of the defect two // Matematicheskie zametki JaGU. vol.20, No.1, Yakutsk, 2013. pp.50-59. (rus.)]

#### ОБ АВТОРЕ

**Павлов Виктор Павлович** проф. каф. сопротивления материалов. Дипл. инж. по авиац. двигателям (УАИ, 1973). Д-р техн. наук по динамике и прочности (УГАТУ, 2005). Иссл. в обл. механики композиционных материалов.

#### METADATA

**Title:** Analysis of the spectrum of frequencies of own fluctuations of a rod by the method of splines

**Author:** V. P. Pavlov

**Affiliation:**

Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

**Email:** victor.pavlov.1951@gmail.com

**Language:** Russian.

**Source:** Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 20, no. 4 (74), pp. 16-22, 2016. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

**Abstract:** The methods of application of the method of spline functions of degree 5 for analyzing the spectrum of frequencies of own fluctuations of a straight rod at different ways of fastening its ends. The prima-re solving several test problems with exact analytical solution, analyzed possible-STI of the proposed method. It is shown that the implemented algorithm is the application of the method of spline functions of degree 5 allows to determine the values of the natural frequencies with very high accuracy, restriction where you are only the possibilities of modern computersKey words: rods, oscillations, natural frequency , splines, mathematical modeling

**About authors:**

**PAVLOV, Victor Pavlovich**, Prof., Dept. of Strength of Materials. Dipl. Engineer for Aircraft Engines (Ufa Aviation Inst., 1973). Dr. of Tech. Sci. (UGATU, 2005).