

TORSIONAL VIBRATIONS OF THE CONSTANT ROD SECTIONS

V. P. Pavlov ^a, L. R. Nusratullina ^b

Ufa State Aviation Technical University (USATU)

^a *victor.pavlov.51@yandex.ru*, ^b *mardliliya@yandex.ru*

Submitted 2021, December 19

Abstract. The article presents a method of algebraic polynomials of the third degree for solving the differential equation of torsional vibrations of a rod with geometric and physical characteristics alternating along its length. By comparing the numerical results with the exact analytically obtained values of the torsional vibration frequencies, the error of the algebraic polynomial method is estimated. Calculations for various coefficients of the exponentially varying polar moment of inertia of the rod are made with an accuracy of up to five significant digits.

Keywords: rods of variable cross-section; torsional vibrations of the rod; frequencies of natural vibrations; characteristics of the rod.

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ НЕПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

В. П. Павлов ^a, Л. Р. Нусратуллина ^b

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

^a *victor.pavlov.51@yandex.ru*, ^b *mardliliya@yandex.ru*

Поступила в редакцию 19.12.2021

Аннотация. Представлен метод алгебраических полиномов третьей степени для решения дифференциального уравнения крутильных колебаний стержня с переменными вдоль его длины геометрическими и физическими характеристиками. Сравнением численных результатов с точными, аналитически полученными значениями частот крутильных колебаний проведена оценка погрешности метода алгебраических полиномов. Показано, что предложенный численный метод позволяет вычислять с точностью до пяти значащих цифр значения частот крутильных колебаний при различных экспоненциальных законах изменения полярного момента инерции поперечного сечения стержня.

Ключевые слова: стержни переменного сечения; крутильные колебания стержня; частоты собственных колебаний; характеристики стержня.

ВВЕДЕНИЕ

Стержневые конструкции имеют широкое применение в инженерной практике при расчете объектов машино-, авиа- и судостроения, биомеханики, промышленного и гражданского строительства и т.д. В этих конструкциях, входящих в состав разного рода механизмов и конструкций, наблюдаются явления крутильных колебаний, которые могут являться следствием технологического процесса или результатом внешних воздействий [1–3].

Свободные крутильные колебания стержня можно описать дифференциальным уравнением второго порядка вида [1]:

$$\bar{I}(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(GI_p(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0, \quad (1)$$

где $\theta(x, t)$ – угол поворота сечения стержня с координатой x в момент времени t ; $I_p(x)$ – полярный момент инерции поперечного сечения, $G = \text{const}$ – модуль сдвига материала; $\bar{I}(x)$ – погонный момент инерции стержня относительно оси x .

Если для конструкции имеется возможность теоретически оценивать спектр ее собственных частот и сопоставлять его с экспериментальным спектром, наблюдающимся при реальной эксплуатации конструкции, то со значительной долей вероятности можно оценивать характер механических повреждений, деформацию и износ данной конструкции. Это реализуется при решении обратных задач.

Так исследование параметров структуры и дефектов стержневых конструкций на основе анализа значений первых частот собственных крутильных колебаний рассматривается в статьях [4–6]. В работе [7] по конечному числу собственных частот крутильных колебаний определяются начальные координаты и размеры поперечных надрезов стержневых конструкций. В работе [8] по первым двум частотам колебаний определяются место и размеры поперечного надреза в вертикальной штанге, растянутой под действием собственного веса и внешней силы.

Ограничением перечисленных выше методов является то, что они основываются на известных аналитических решениях, имеющих место лишь для стержней постоянного поперечного сечения.

В то же время непрерывный рост скорости, удельной мощности машин и механизмов, забота о снижении веса и объема конструкций при сохранении ее надежности в эксплуатации, а также широкое внедрение в современную технику новых композиционных материалов требует рассмотрение более сложных математических моделей стержневой теории колебаний, в которых геометрические и физические характеристики стержня изменяются вдоль длины стержня [9]. При решении таких задач возникают дифференциальные уравнения, которые не имеют аналитических решений [10] и должны решаться численными методами [11].

В данной статье предлагается эффективный и высокоточный метод численного решения уравнения вида (1) методом алгебраических полиномов степени 3 (МАП) [12–16].

Проблема крутильных колебаний рассматривается как в рамках самостоятельной спектральной задачи, так и при исследовании параметров напряженно-деформированного состояния стержневых систем в результате динамических воздействий и внешних нагрузок.

МЕТОД АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ СТЕПЕНИ 3
 ДЛЯ РАСЧЕТА ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ

Согласно формуле (1), крутильные колебания стержня описываются в развернутой форме дифференциальным уравнением:

$$\bar{I}(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - G \frac{\partial I_p(x)}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} - GI_p(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0. \quad (2)$$

Решение дифференциального уравнения (2) будем искать в виде:

$$\theta(x, t) = \Theta(x) \sin \omega t, \quad (3)$$

где $\Theta(x)$ – функция, определяющая непрерывную совокупность амплитудных угловых отклонений сечений стержня от их равновесных положений; ω – круговая частота собственных колебаний.

После подстановки (3) в (2) и ряда преобразований получаем:

$$GI_p(x) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + G \frac{\partial I_p(x)}{\partial x} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \bar{I}(x) \omega^2 \Theta = 0. \quad (4)$$

В результате получаем однородное дифференциальное уравнение (4) для определения частот собственных крутильных колебаний ω .

При решении уравнения (4) методом МАП степени 3 решение ищется в некоторых узлах сетки Δ , формируемой на отрезке $[a, b]$:

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$$

с шагом $h_i = x_{i+1} - x_i, i = \overline{1, N-1}$.

Внутри каждого отрезка $[x_i, x_{i+1}], i = \overline{1, N-1}$ рассматриваются функции $P_3^{(i)}(x)$, являющиеся полиномами третьей степени:

$$\begin{cases} P_3^{(i)}(x) = \sum_{\alpha=0}^3 a_{\alpha}^{(i)} (x - x_i)^{\alpha}, \\ x \in [x_i, x_{i+1}], i = \overline{1, N-1}. \end{cases}$$

Полиномы $P_3^{(i)}(x)$ определяются своими коэффициентами $a_{\alpha}^{(i)}, \alpha = \overline{0, 3}, i = \overline{1, N-1}$, количество которых равно $N_{\alpha} = 4(N-1)$:

$$\{ a_{\alpha}^{(i)} \}, \alpha = 0, \dots, 3, i = 1, \dots, N-1,$$

которые для удобства занесем в вектор-столбец \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q} = (q_k, k = \overline{1, 4(N-1)})^T.$$

На многочлены $P_3^{(i)}(x)$ и их производные до второго порядка включительно накладываются условия их непрерывности в узлах x_i сетки Δ :

$$\begin{cases} \frac{d^s P_3^{(i-1)}(x_i)}{dx^s} = \frac{d^s P_3^{(i)}(x_i)}{dx^s}, \\ s = \overline{0, 2}, i = \overline{2, N-1}. \end{cases}$$

В любой точке отрезка $[a, b]$ значения полиномов $\mathbf{P}_3^{(i)}(x)$ и их производных определяются выражением:

$$\begin{cases} \frac{d^s \mathbf{P}_3^{(i)}(x)}{dx^s} = \sum_{\alpha=s}^3 \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} a_\alpha^{(i)} (x-x_i)^{\alpha-s}, \\ i = \overline{1, N-1}, \\ s = \overline{0, 2}, \\ x \in [x_i, x_{i+1}]. \end{cases} \quad (5)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} \frac{d^s \mathbf{P}_3^{(i)}(x)}{dx^s} = \mathbf{R}_s^{(i)}(x) \\ i = \overline{1, N-1}, \\ s = \overline{0, 2}, \\ x \in [x_i, x_{i+1}]. \end{cases} \quad (6)$$

Тогда с учетом (6) из (5) получим:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_s^{(i-1)}(x_i) = \sum_{\alpha=s}^3 \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} a_\alpha^{(i-1)} h_{i-1}^{\alpha-s}, \\ h_{i-1} = x_i - x_{i-1}, \quad x_i \in \Delta, \\ \mathbf{R}_s^{(i)}(x_i) = s! a_s^{(i)}, \\ i = \overline{2, N-1}, \quad s = \overline{0, 3}. \end{cases}$$

Приравняв $\mathbf{R}_s^{(i-1)}(x_i)$ и $\mathbf{R}_s^{(i)}(x_i)$, получим $3(N-2)$ уравнений непрерывности во внутренних узлах сетки $x_i, i = \overline{2, N-1}$.

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=s}^3 \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} a_\alpha^{(i-1)} h_i^{\alpha-s} - s! a_s^{(i)} = 0, \\ i = \overline{2, N-1}, \quad s = \overline{0, 3}. \end{cases}$$

На основе функций $\mathbf{P}_3^{(i)}(x) i = \overline{1, N-1}$ построим полином 3 степени $\mathbf{P}_3(x)$:

$$\begin{cases} \mathbf{P}_3(x) = \mathbf{P}_3^{(i)}(x) \text{ при } x \in [x_i, x_{i+1}), \\ \mathbf{P}_3(x) = \mathbf{P}_3^{(N-1)}(x_N) \text{ при } x = x_N, \\ i = \overline{1, N-1} \end{cases}$$

и ее производные

$$\mathbf{R}_s = \frac{d^s \mathbf{P}_3(x)}{dx^s}, \quad s = \overline{0, 2}. \quad (7)$$

Заменив в (4) искомую функцию $\Theta = \Theta(x)$ аппроксимирующим полиномом $\mathbf{P}_3(x)$ и с учетом (7), получим дискретный аналог уравнения (4):

$$GI_\rho(x_i) \mathbf{R}_2(x_i) + G \frac{\partial I_\rho(x_i)}{\partial x_i} \mathbf{R}_1(x_i) + \bar{I} \omega^2 \mathbf{R}(x_i) = 0. \quad (8)$$

Для левых концов x_i сетки Δ , $i = \overline{1, N-1}$ уравнение (8) с учетом (5) примет вид:

$$2GI_\rho(x_i)a_2^{(i)} + G \frac{\partial I_\rho(x_i)}{\partial x} a_1^{(i)} + \bar{I}\omega^2 a_0^{(i)} = 0. \quad (9)$$

Для правого конца отрезка $[a, b]$ при $x = x_N$:

$$GI_\rho(x_i) \sum_{\alpha=2}^3 \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} a_\alpha^{(N-1)} h_{N-1}^{\alpha-2} + G \frac{\partial I_\rho(x_i)}{\partial x} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} a_\alpha^{(N-1)} h_{N-1}^{\alpha-1} + \bar{I}(x_i)\tilde{\omega}^2 \sum_{\alpha=0}^2 \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} a_\alpha^{(N-1)} h_{N-1}^{\alpha-s} = 0. \quad (10)$$

Коэффициенты N линейных алгебраических уравнений (9), (10) и $3(N-2)$ уравнений непрерывности занесем в матрицу \mathbf{A} .

В результате получим систему уравнений:

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} = 0.$$

Для определения коэффициентов полинома $\mathbf{P}_3(x)$ не хватает $4(N-1) - 3(N-2) - N = 2$ уравнения, которые определим из краевых условий.

Рассмотрим крутильные колебания стержня с одним жестко закрепленным ($x = 0$) и другим свободным ($x = l$) концами. Для заданного стержня краевые условия задаются выражениями:

$$\Theta(0) = 0, \Theta'(l) = 0. \quad (11)$$

Краевые условия (11) дадут нам 2 уравнения, коэффициенты которых также занесем в матрицу \mathbf{A} .

Таким образом, задача нахождения частот собственных крутильных колебаний ω сводится к решению следующей задачи:

$$\det \mathbf{A} = 0. \quad (12)$$

ТЕСТОВАЯ ЗАДАЧА С ТОЧНЫМ АНАЛИТИЧЕСКИМ РЕШЕНИЕМ ДЛЯ СТЕРЖНЯ С ПОСТОЯННЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Для анализа точности предлагаемого метода алгебраических полиномов рассмотрим прямой стержень, имеющий длину $l = 1$ м, круглое поперечное сечение диаметром $d = 0,02$ м. Стальной стержень с модулем сдвига $G = 0,76 \cdot 10^{11}$ Н/м²·рад и плотностью $\rho = 7,85 \cdot 10^3$ кг/м³. При этих данных у сечения стержня моменты инерции будут равны:

$$\begin{cases} I_\rho = \pi d^4 / 32 = 1,57 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 \\ \bar{I} = \rho I_\rho = 1,23 \cdot 10^{-4} \text{ (кг} \cdot \text{м}^2\text{)/м.} \end{cases}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение (4), когда $I_\rho = \text{const}$:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\omega^2 \bar{I}}{GI_\rho} \Theta(x) = 0.$$

Для удобства введем обозначение $a^2 = \omega^2 \bar{I} / GI_\rho$.

Тогда последнее уравнение примет вид:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + a^2 \Theta(x) = 0. \quad (13)$$

Согласно [1], аналитическое решение уравнения (12) имеет вид:

$$\Theta = C_1 \sin a x + C_2 \cos a x,$$

где C_1, C_2 – постоянные, определяемые из краевых условий (11). В [1] показано, что частоты собственных колебаний являются решением уравнения $\cos al = 0$ и выражаются формулой:

$$\omega_m = \frac{(2k-1)\pi}{2l} \sqrt{\frac{GI_p}{I}}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Найденные по формуле (13) точные значения частот крутильных колебаний стержня обозначим $\omega_m^{(T)}$, $m = 1, 2, \dots$

Кроме этого, первые пять частот были найдены методом алгебраических полиномов при размерности сетки N . Найденные численно расчетные собственные частоты обозначим через $\omega_m^{(P)}$, $m = 1, \dots, 5$. При решении уравнения (12) точность ϵ нахождения ω_i задавалась равной 10^{-6} .

Погрешность численных расчетов предлагаемым МАП оценим десятичным логарифмом абсолютного значения относительной ошибки:

$$\lg |\delta \omega_m| = \lg \left| \frac{\omega_m^{(T)} - \omega_m^{(P)}}{\omega_m^{(T)}} \right|, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где $\omega_m^{(T)}$ – точное значение собственной частоты, определяемое по формуле (14), $\omega_m^{(P)}$ – расчетное значение, найденное МАП степени 3.

Результаты численных расчетов приведены на рис. 1 графиком зависимости $\lg |\delta \omega|$ от десятичного логарифма $\lg M$, где M – число отрезков сетки Δ , определяемое формулой $M = N - 1$. Расчеты проводились для $N = 11, 21, 51, 101, 201, 501, 1001$. Вид зависимости $\lg |\delta \omega| \sim \lg |M|$ на рис. 1 показывает, что реализованный МАП для тестовой задачи характеризуется вторым порядком сходимости.

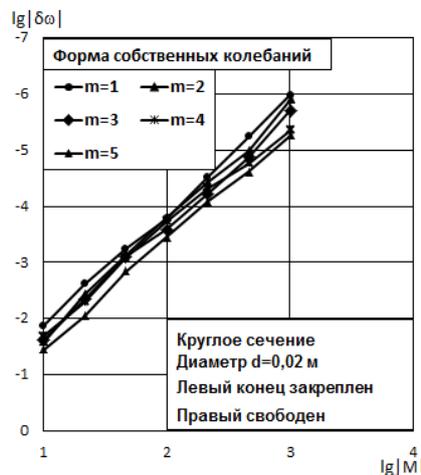


Рис. 1. Погрешность расчета собственных частот стержня постоянного круглого сечения

**ТЕСТОВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СТЕРЖНЯ НЕПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ,
ЗАКРЕПЛЕННОГО НА ЛЕВОМ КОНЦЕ И СВОБОДНОГО НА ПРАВОМ**

При построении точного решения дифференциального уравнения (4) при непостоянном сечении выражения для осевого момента \bar{I} и полярного момента инерции I_ρ выберем в экспоненциальной форме:

$$\bar{I}(x) = \bar{I}_0 e^{\delta \frac{x}{l}}, \quad I_\rho(x) = I_{\rho_0} e^{\delta \frac{x}{l}}, \quad (15)$$

где l – длина стержня, δ , \bar{I}_0 и I_{ρ_0} – некоторые постоянные.

Подставив (15) в уравнение (2) и перейдя к обозначениям:

$$x = l\tilde{x}, \quad \Theta = \Theta_0 \tilde{\Theta}, \quad \tilde{x} \in [0, 1], \quad \tilde{\Theta} \in [0, 1],$$

где Θ_0 – масштабный коэффициент с размерностью перемещения, уравнение (2) приводится к безразмерному виду:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Theta}}{\partial \tilde{x}^2} + \delta \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\bar{I}_0 l^2}{GI_{\rho_0}} \omega^2 \tilde{\Theta} = 0. \quad (16)$$

Введем обозначение $\tilde{\omega}^2 = \bar{I}_0 l^2 \omega^2 / GI_{\rho_0}$, тогда (16) примет вид:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Theta}}{\partial \tilde{x}^2} + \delta \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{\omega}^2 \tilde{\Theta} = 0. \quad (17)$$

Точное решение уравнения (17) для $\delta^2 \leq 4\tilde{\omega}^2$ имеет вид:

$$\tilde{\Theta} = e^{-\frac{\delta}{2}\tilde{x}} (C_1 \sin(\lambda\tilde{x}) + C_2 \cos(\lambda\tilde{x})), \quad (18)$$

где $\lambda = \sqrt{\tilde{\omega}^2 - \delta^2/4}$, C_1, C_2 – постоянные, определяемые из краевых условий.

Подставив (18) в краевые условия, приведенных к безразмерному виду, получим систему из двух нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{\Theta}(0) = C_2 = 0, \\ \tilde{\Theta}'(1) = -\frac{\delta}{2}(C_1 \sin(\lambda\tilde{x}) + C_2 \cos(\lambda\tilde{x})) + (C_1 \lambda \cos(\lambda\tilde{x}) - C_2 \lambda \sin(\lambda\tilde{x})) = 0. \end{cases}$$

Решениями данных уравнений являются точные значения $\tilde{\omega}_m^{(T)}$ $m = 1, 2, \dots$ частот колебаний стержня. На основе МАП были найдены расчетные значения первых 5 собственных частот $\tilde{\omega}_m^{(P)}$ при $\delta = -1, \delta = 1$ и $M = 1001$. В табл. 1 сопоставлены $\tilde{\omega}_m^{(P)}$ и $\tilde{\omega}_m^{(T)}$ значения частот колебаний для рассматриваемого стержня.

Таблица 1. Относительная погрешность точных и расчетных значений собственных колебаний

m	$\delta = -1$			$\delta = 1$		
	Точные частоты $\omega_m^{(T)}$, рад/с	Расчетные частоты $\omega_m^{(P)}$, рад/с	Относительная погрешность $\delta_m = \left \frac{\omega_m^{(T)} - \omega_m^{(P)}}{\omega_m^{(T)}} \right $	Точные частоты $\omega_m^{(T)}$, рад/с	Расчетные частоты $\omega_m^{(P)}$, рад/с	Относительная погрешность $\delta_m = \left \frac{\omega_m^{(T)} - \omega_m^{(P)}}{\omega_m^{(T)}} \right $
1	1,90344152	1,90344992	$4,414 \cdot 10^{-6}$	1,26827953	1,26828990	$8,179 \cdot 10^{-6}$
2	4,84172877	4,84176660	$7,813 \cdot 10^{-6}$	4,63128615	4,63128588	$5,796 \cdot 10^{-6}$
3	7,93282572	7,93286675	$5,171 \cdot 10^{-6}$	7,80591364	7,80596673	$6,802 \cdot 10^{-6}$
4	11,05214569	11,05219990	$4,905 \cdot 10^{-6}$	10,96135333	10,96139992	$4,251 \cdot 10^{-6}$
5	14,18124926	14,18120010	$3,466 \cdot 10^{-6}$	14,11058651	14,11056675	$1,401 \cdot 10^{-6}$

Данные таблицы позволяют анализировать погрешность описываемого в статье численного метода и могут быть использованы для оценки погрешности вновь разрабатываемых численных методов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В статье излагается численный МАП 3 степени, позволяющий рассчитывать частоты собственных крутильных колебаний стержней с переменными вдоль оси характеристиками.

2. На двух тестовых задачах проведен анализ точности МАП: при решении задач о крутильных колебаниях стержней постоянного и переменного сечений, имеющих точное аналитическое решение.

3. Показано, что метод характеризуется вторым порядком сходимости при увеличении числа узлов по длине стержня.

4. Анализ точности показал, что при числе узлов $N = 1001$ обеспечивается точность расчетов первых пяти собственных частот крутильных колебаний с относительной погрешностью, не превышающей 10^{-5} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабак** И. М. Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 560 с. [I. M. Babakov, *Oscillation theory*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1965.]
2. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с. [Yu. N. Rabotnov, *Mechanics of a Deformable Solid Body*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1988.]
3. **Феодосьев В. И.** Соппротивление материалов. М.: Наука, 1979. 560 с. [V. I. Feodósiev, *Strength of materials*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1979.]
4. **Ватульян А. О., Денина О. В.** Об одном способе определения упругих характеристик для неоднородных тел // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53, № 2 (312). С. 137–147. [A. O. Vatul'yan, O. V. Denina, "One method of determining the elastic properties of inhomogeneous solids", (in Russian), in *Prikladnaya mehanika i tehniceskaya fizika*, vol. 53, no. 2 (312), pp. 137-147, 2012.]
5. **Хакимов А. Г.** О собственных колебаниях вала с моделью искусственного дефекта // Дефектоскопия. 2010. № 6. С. 93–98. [A. G. Khakimov, "On the natural vibrations of a shaft with an artificial defect", (in Russian), in *Defektoskopiya*, no. 6, pp. 93-98, 2010.]
6. **Хакимов А. Г., Сатыев Э. И.** О собственных крутильных колебаниях буровой колонны // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». 2014. № 6. С. 120–153. [A. G. Khakimov, E. I. Satyev, "On drill-string natural torsional vibrations", (in Russian), in *Elektronnyj nauchnyj zhurnal "Neftegazovoe delo"*, no. 6, pp. 120-153, 2014.]
7. **Хакимов А. Г.** О собственных частотах вала турбокомпрессора с искусственным дефектом // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника: Научно-технический журнал. 2011. № 1. С. 71–73. [A. G. Khakimov, "On the natural vibrations of the turbocompressor shaft with an artificial defect", (in Russian), in *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Aviacionnaya tehnika: Nauchno-tehnicheskij zhurnal*, no. 1, pp. 71-73, 2011.]
8. **Ильгамов М. А.** Диагностика повреждений вертикальной штанги // Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. 2007. Вып. 5. С. 201–211. [M. A. Ilgamov, "Diagnostics of Damage of a Vertical Rod", (in Russian), in *Trudy Instituta mehaniki Ufmskogo nauchnogo centra RAN*, iss. 5, pp. 201-211, 2007.]
9. **Гусев Б. В., Саурин В. В.** О колебаниях неоднородных балок // Инженерный вестник Дона. 2017. № 3 (46). С. 50. [B. V. Gusev, V. V. Saurin, "On vibrations of inhomogeneous beams", (in Russian), in *Inzhenernyj vestnik Dona*, no. 3 (46), p. 50, 2017.]
10. **Павлов В. П., Нусратуллина Л. Р.** Точные решения уравнения, описывающего поперечные колебания стержня с переменным поперечным сечением и их применение // Вестник Башкирского университета. 2019. Т. 24, № 4. С. 774–781. [V. P. Pavlov, L. R. Nusratullina, "Exact solutions of the equation describing transverse vibrations of the rod with variable cross – section and their application", (in Russian), in *Vestnik Bashkirskogo universiteta*, vol. 24, no. 4, pp. 774-781, 2019.]
11. **Pliability** Identification of Elastic Support for Elastic Cantilevered Rod Based on Eigenfrequencies of its Oscillations / V. S. Zhernakov, et al. // Atlantis Highlights in Computer Sciences: Proceedings of the 21st International Workshop on Computer Science and Information Technologies (CSIT 2019). 2019. Vol. 3. Pp. 303-309.
12. **Pavlov V. P., Nusratullina L. R., Kudoyarova V. M.** Eigenfrequency spectrum analysis of bending vibrations for naturally swirled rod // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2020. Iss. 709. Article number 022059.
13. **Нусратуллина Л. Р.** Влияние коэффициента жесткости опор на спектр собственных частот поперечных колебаний стержня переменного сечения // Фундаментальные и прикладные проблемы науки: материалы XIV Международного симпозиума. М.: РАН, 2019. С. 53–61. [L. R. Nusratullina, "The effect of the stiffness coefficient of the supports on the spectrum

of natural frequencies of transverse vibrations of the rod of variable cross-section”, (in Russian), in *Fundamental and Applied Problems of Science: materials of the XIV International Symposium*, 2019, pp. 53-61.]

14. Павлов В. П., Нусратуллина Л. Р. Метод расчета собственных частот и форм поперечных колебаний стержня переменного сечения с упругим закреплением // Вестник УГАТУ. 2019. Т. 23, № 3 (85). С. 24–38. [V. P. Pavlov, L. R. Nusratullina, “The method of calculating natural frequencies and forms the transverse vibrations of a rod variable cross-section with elastic securing”, (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 23, no. 3 (85), pp. 24-38, 2019.]

15. Павлов В. П., Нусратуллина Л. Р. Собственные изгибные колебания естественно закрученного стержня // Вестник УГАТУ. 2019. Т. 23, № 4 (86). С. 33–41. [V. P. Pavlov, L. R. Nusratullina, “Natural bending vibrations of naturally twisted rod”, (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 23, no. 4 (86), pp. 33-41, 2019.]

16. Нусратуллина Л. Р. Оценка влияния инерции вращения стержня на вычисление частот собственных колебаний // Научные технологии в машиностроении: материалы Всероссийской научно-практической конференции. Уфа: РИК УГАТУ, 2020. С. 184–190. [L. R. Nusratullina, “Evaluation of the effect of rod rotation inertia on the calculation of the natural frequencies”, (in Russian), in *High-tech technologies in mechanical engineering: materials of the All-Russian Scientific and Practical Conference*, 2020, pp. 184-190.]

ОБ АВТОРАХ

ПАВЛОВ Виктор Павлович, проф. каф. сопротивления материалов. Дипл. инж. по авиац. двигателям (УАИ, 1973). Д-р техн. наук по динамике и прочности (УГАТУ, 2005). Иссл. в обл. динамики и прочности конструкций из композиционных материалов.

НУСРАТУЛЛИНА Лилия Ринатовна, ст. преп. каф. математики. Дипл. математик (БашГУ, 2003). Готовит дис. о колебаниях упруго закрепленных стержней с переменным сечением.

PAVLOV, Victor Pavlovich, Prof., Dept. of Strength of Materials. Dipl. Engineer for Aircraft Engines (UAI, 1973). Dr. of Tech. Sci. (USATU, 2005).

Nusratullina, Liliya Rinatovna, Senior teacher of the chair Mathematics. Dipl. of specialist in mathematics (BSU, 2003).

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 26, no. 1 (95), pp. 22-30, 2022. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).