

О НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

А. Д. НИЗАМОВА¹, В. Н. КИРЕЕВ², С. Ф. УРМАНЧЕЕВ³

¹adeshka@yandex.ru, ²kireev@anrb.ru, ³said@anrb.ru

^{1,3} Институт механики им. Р. Р. Мавлютова – обособленное структурное подразделение
Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (ИМех УФИЦ РАН)
² ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (БашГУ)

Поступила в редакцию 26.04.2021

Аннотация. Рассмотрено влияние характера изменения зависимости вязкости от температуры на устойчивость течения 45 %-го водного раствора пропиленгликоля в плоском канале с линейным распределением температуры. Исследование гидродинамической устойчивости было сведено к решению обобщенного уравнения Орра – Зоммерфельда спектральным методом. Построены спектры собственных значений и собственные функции для обоих участков зависимости вязкости от температуры, определены соответствующие критические числа Рейнольдса. Результаты исследования свидетельствуют о том, что ламинарно-турбулентный переход зависит не только от наличия зависимости вязкости от температуры, но и от интенсивности ее изменения.

Ключевые слова: уравнение Орра – Зоммерфельда; термовязкая жидкость; собственные значения; собственные функции; число Рейнольдса; спектральный метод; полиномы Чебышева; фазовая скорость; волновое число; водный раствор пропиленгликоля; теплообменник.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных задач теоретической гидродинамики является предсказание режимов течения жидкостей и газов, а ее решение сводится к определению устойчивости ламинарного режима при заданных граничных условиях. В классической теории гидродинамической устойчивости физические коэффициенты считаются постоянными, а влияние внешних полей считается пренебрежимо малым. При столь идеализированных предположениях трудно ожидать хорошего соответствия теоретических результатов экспериментальным. Тем не менее, развитие концепции гидродинамической устойчивости дает надежные основания для практических выводов, разумеется, с поправками на сделанные допущения. Основываясь на экспериментальных данных Рейнольдса (O. Reynolds, 1883) [1], сначала Orr (W.M.F. Orr, 1907), а затем и Зоммерфельд (A. Sommerfeld, 1908), рассмотрели возмущенное состояние плоскопараллельного течения вязкой жидкости на основе уравнений Навье – Стокса и получили уравнение для определения спектра собственных значений соответствующей задачи [2].

Численное значение критического числа Рейнольдса, полученное для течения Пуазейля, оказалось равным $Re_c = 5772$. Практические расчеты обычно предполагают использование значений, лежащих в интервале: $Re_c \sim 2100 \div 2300$ [3, 4]. Наша задача заключалась в уста-

новлении влияния температурного поля на гидродинамическую устойчивость реальной жидкости, в качестве примера которой был выбран раствор пропиленгликоля – вещества, широко применяемого в холодильной промышленности. Ранее некоторые аспекты гидродинамической устойчивости жидкостей с учетом зависимости вязкости от температуры были рассмотрены в работах [5, 6].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу об устойчивости ламинарного течения термовязкой жидкости в плоском канале с линейным профилем температуры. Будем также полагать, что более холодной будет нижняя стенка канала во избежание возникновения тепловой конвекции. Математическая модель течения вязкой теплопроводной жидкости при отсутствии массовых сил состоит из уравнения неразрывности, уравнений Навье – Стокса, дополненных уравнением сохранения энергии в форме притока тепла для определения распределения температурного поля.

После приведения уравнений модели к безразмерному виду осуществим стандартную для гидродинамической устойчивости процедуру представления искомым переменных задачи в форме суммы невозмущенной и возмущенной частей, после чего исследование системы уравнений проведем относительно возмущенных значений этих переменных. Далее, проведя линеаризацию, будем искать решение полученной системы уравнений в виде прогрессивных волн. После соответствующих алгебраических преобразований исходная задача об устойчивости течения термовязкой жидкости в плоском канале с неоднородным температурным полем может быть сведена к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитуд возмущений поперечной скорости и температуры. В настоящей работе задача рассмотрена в приближении достаточно больших значений числа Пекле. В этом случае задача сводится к анализу модифицированного уравнения Орра – Зоммерфельда, представленного в следующем виде [8–11]:

$$\mu_0 \cdot [\varphi^{IV} - 2k^2\varphi'' + k^4\varphi] - ik \operatorname{Re}[(u_0 - c) \cdot (\varphi'' - k^2\varphi) - u_0''\varphi] + 2\mu_0' \cdot (\varphi''' - k^2\varphi') + \mu_0''(\varphi'' + k^2\varphi) = 0,$$

с граничными условиями:

$$\varphi(-1) = \varphi(1) = 0, \quad \varphi'(-1) = \varphi'(1) = 0.$$

где $\mu_0(x, y)$ – возмущение вязкости; $u_0 = u_0(y)$ – невозмущенный профиль скорости; Re , – число Рейнольдса; i – мнимая единица; $c = \frac{w}{k}$ – фазовая скорость волны вдоль оси x (собственное значение); w – частота; k – проекция волнового вектора на ось x (волновое число); $c = c_r + ic_i$ – фазовая скорость волны вдоль оси канала (скорость распространения возмущений).

Для решения поставленной задачи был применен спектральный метод разложения функций, содержащихся в уравнении (2) по полиномам Чебышева первого рода [4].

ДААННЫЕ ДЛЯ РАСЧЕТОВ

В качестве конкретного примера жидкости рассмотрим водный раствор пропиленгликоля, который широко применяется в промышленности в качестве теплоносителя в системах охлаждения и кондиционирования.

Теплофизические характеристики пропиленгликоля хорошо известны [7]. В частности, изменение вязкости 45 % водного раствора пропиленгликоля в зависимости от температуры представлено на рис. 1.

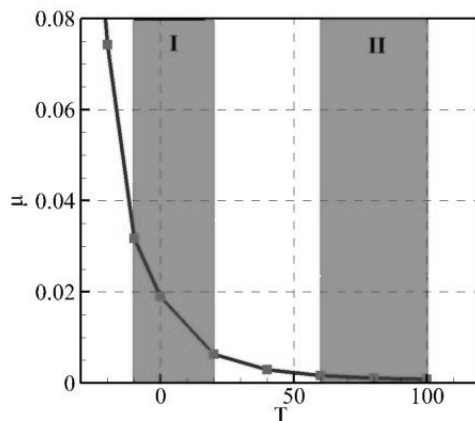


Рис. 1. Зависимость вязкости от температуры для раствора пропиленгликоль 45 %

Выбранный алгоритм решения задачи предполагает задание аналитической формулы для зависимости вязкости от температуры [8–11].

Рассмотрим два интервала изменения температуры:

I – от $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ до $20\text{ }^{\circ}\text{C}$; II – от $60\text{ }^{\circ}\text{C}$ до $100\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Можно сказать, что на I промежутке происходит изменение вязкости примерно в 5 раз, в отличие от II промежутка – примерно в 2 раза.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Решение задачи по определению спектра собственных значений модифицированного уравнения Орра – Зоммерфельда при заданных граничных условиях позволило получить критические значения чисел Рейнольдса для каждого из двух рассмотренных интервалов изменения вязкости в зависимости от температуры. Для интервала I: $Re_{cr} = 2950$, $k = 1,07$; для интервала II: $Re_{cr} = 3684$, $k = 1,05$. Фиксированные значения числа Рейнольдса и волнового числа выбраны такими, чтобы течение было устойчивым.

Спектры собственных значений для I и II интервалов приведены на рис. 2. Собственные значения при заданных волновом числе и числе Рейнольдса стремятся к оси вещественных частей, группируясь в вертикальную ветвь, а при приближении к нулевым мнимым частям – делятся на отдельные ветви. По представленным графикам видно, что спектры качественно схожи для рассматриваемых интервалов. Увеличивается количество собственных значений на интервале II, т.е. больше нетривиальных решений задачи (ненулевые собственные функции) и, таким образом, появление дополнительных возмущений поперечной скорости течения.

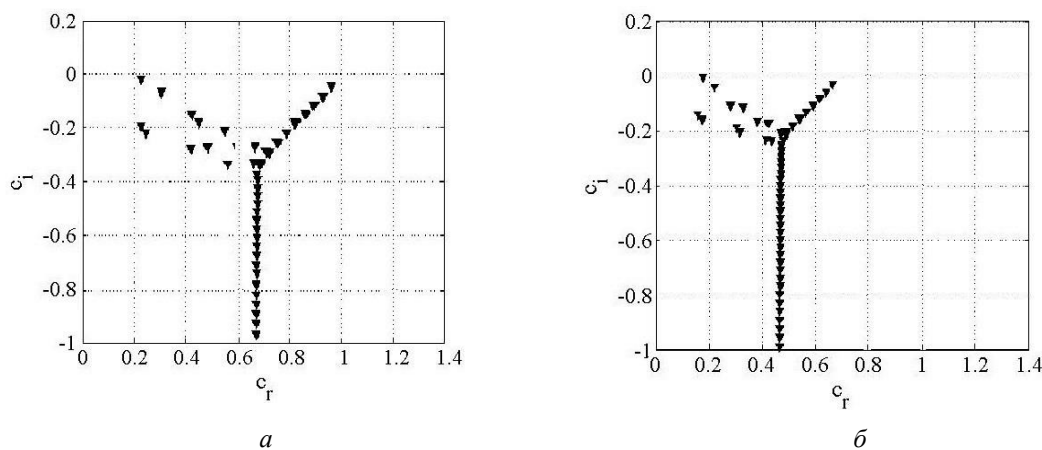


Рис. 2. Спектры собственных значений:
а – интервал I; б – интервал II

Вещественные и мнимые части собственных функций для первого собственного значения представлены на рис. 3 для двух рассматриваемых интервалов.

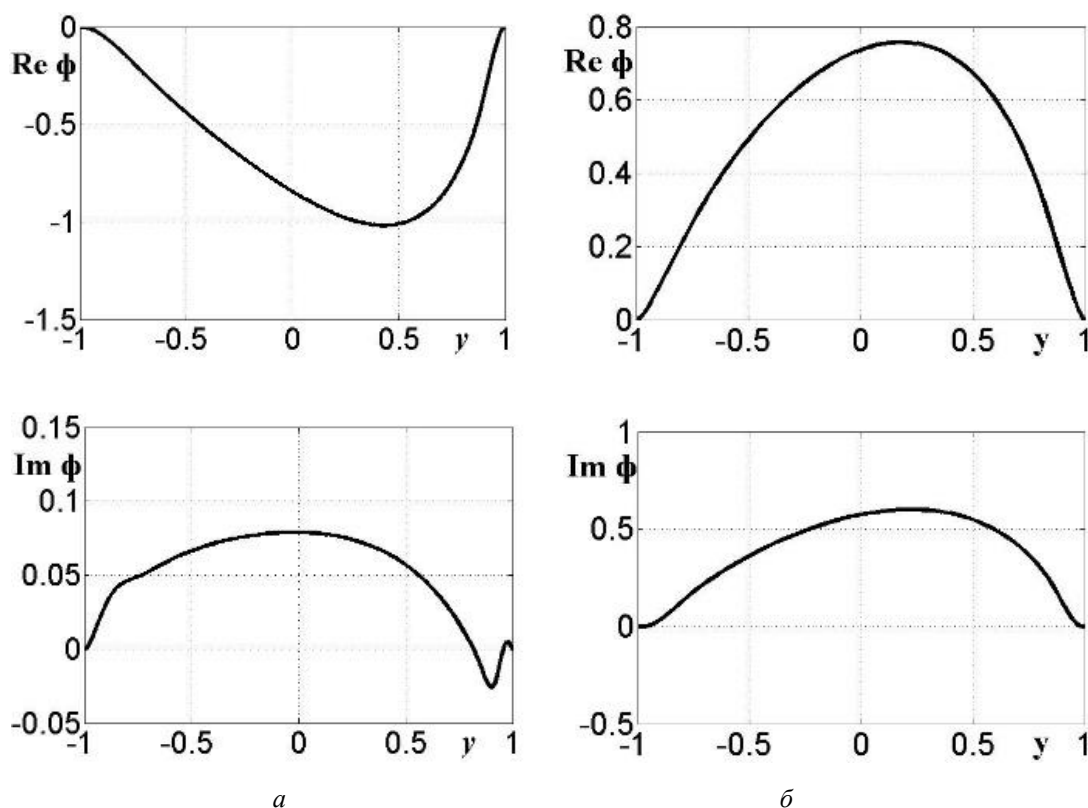


Рис. 3. Вещественная и мнимая части собственных функций для первого собственного значения:
а – интервал I; б – интервал II

Из представленных результатов можно заметить, что собственная функция для течения не обладает симметрией относительно оси Oy , что объясняется отсутствием симметрии у профиля скорости в невозмущенном состоянии.

Сравним возмущения поперечной скорости для первого собственного значения на I и II интервалах и на разных промежутках времени t (рис. 4). Кривые на каждом графике соответствуют различным поперечным сечениям канала.

Вещественная часть возмущения поперечных скоростей течения жидкости с экспоненциальной зависимостью (рис. 3) – затухает, что свидетельствует об устойчивости течения. Возмущения поперечной скорости имеют характер симметрии, аналогичный соответствующим собственным функциям.

Нейтральные кривые течения водного раствора пропиленгликоля (45 %) для двух рассмотренных выше диапазонов температур представлены на рис. 5. Из полученных результатов видно, что для постоянной вязкости критическое число Рейнольдса Re_{cr} равно 5772 для любого температурного интервала. Однако, при рассмотрении температурной зависимости вязкости существенное значение имеет конкретный температурный интервал. Например, для интервала температуры от -10 °C до 20 °C: $Re_{cr} = 2950$ при $k = 1,07$; а для диапазона температуры от 60 °C до 100 °C: $Re_{cr} = 3684$ при $k = 1,05$.

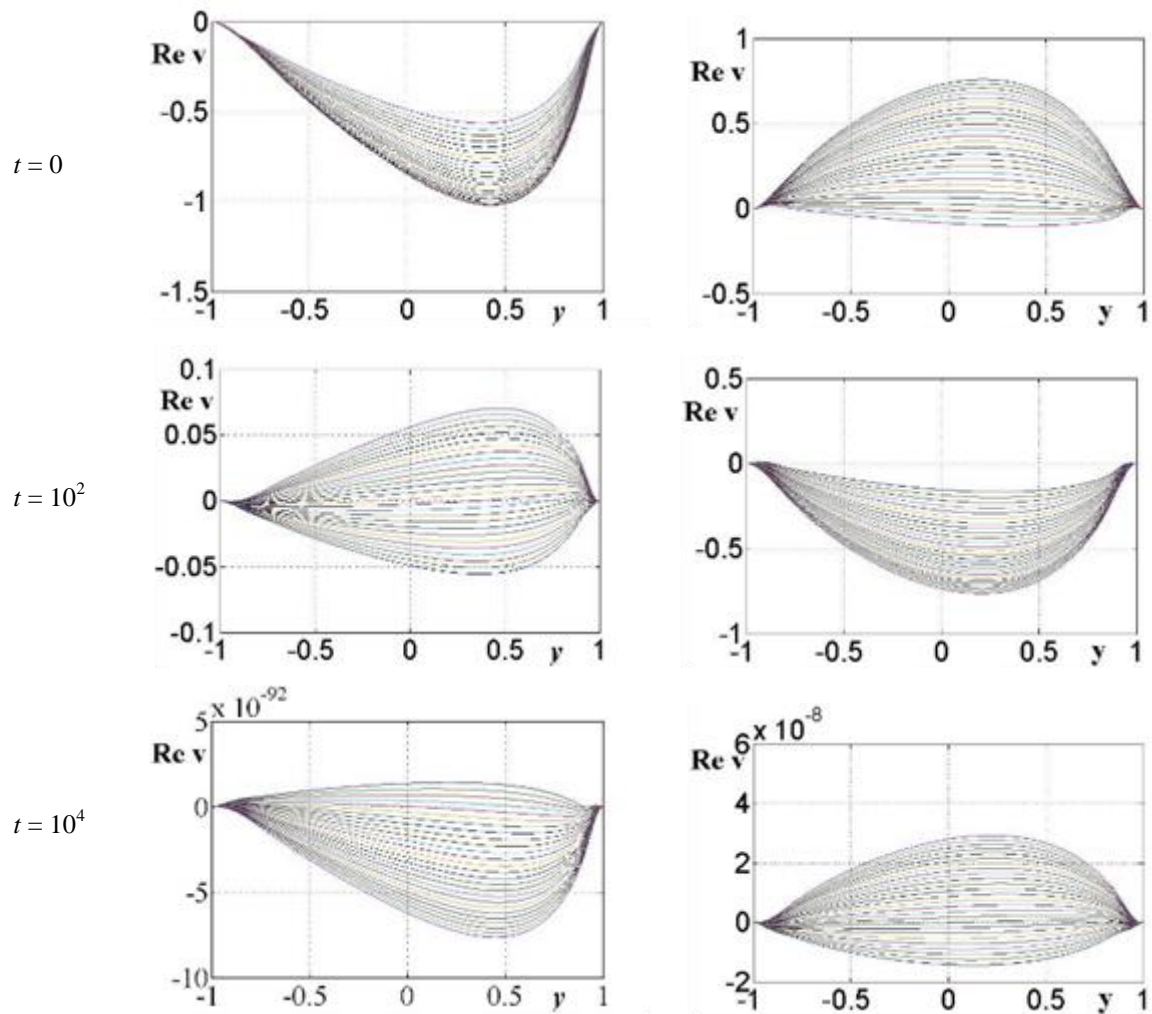


Рис. 4. Возмущения поперечной скорости с течением времени:
a – интервал I; *б* – интервал II

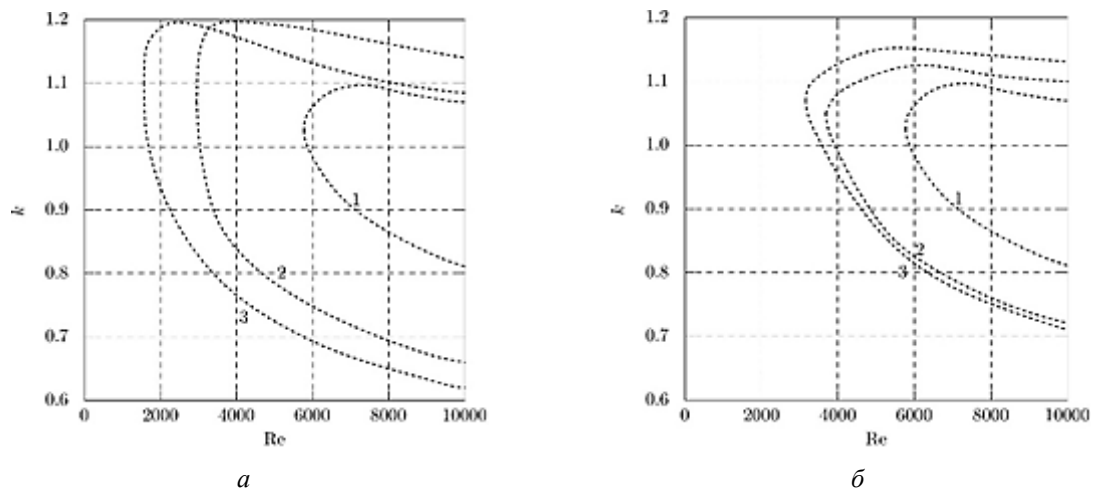


Рис. 5. Нейтральные кривые течения водного раствора пропиленгликоля (45 %) на интервалах температур I (*a*) и II (*б*):
 изотермическое течение (1), течение жидкости с линейной (2) и экспоненциальной (3) зависимостями вязкости

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты численных исследований позволили установить значительное влияние неоднородного распределения температуры на режимы течения термовязкой жидкости. Обнаружено, что учет зависимости вязкости от температуры снижает величину критического числа Рейнольдса и увеличивает область неустойчивых режимов течения. Сравнение двух различных участков функции вязкости от температуры для раствора пропиленгликоля, отличающихся значениями производной показало, что граница раздела устойчивых и неустойчивых режимов потока зависит и от интенсивности изменения вязкости: чем она выше, тем меньше область устойчивых ламинарных течений. Следует добавить, что осреднение вязкости по области ее изменения приводит к классическому уравнению Орра – Зоммерфельда и соответствующим ему результатам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kulikov Y. M., Son E. E.** Stability of thermoviscous fluid flow under high temperature gradients // *High Temp.* 2017. Vol. 55. Pp. 131-138. [Y. M. Kulikov, E. E. Son, "Stability of thermoviscous fluid flow under high temperature gradients", in *High Temp*, vol. 55, pp. 131-138, 2017.]
2. **Drazin P. G.** Introduction to hydrodynamic stability. Cambridg: Cambridge University Press, 2002. 288 p. [P. G. Drazin, *Introduction to hydrodynamic stability*, (in Russian). Cambridg: Cambridge University Press, 2002.]
3. **Orszag S. A.** Accurate solution of the Orr–Sommerfeld equation // *J. Fluid Mech.* 1971. Vol. 50. Pp. 689-703. [S. A. Orszag, "Accurate solution of the Orr–Sommerfeld equation", in *J. Fluid Mech.*, vol. 50, pp. 689-703, 1971.]
4. **Skorokhodov S. L.** Numerical analysis of the spectrum of the Orr-Sommerfeld problem // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2007. Vol. 47, No. 10. Pp. 1603-1621. [S. L. Skorokhodov, "Numerical analysis of the spectrum of the Orr-Sommerfeld problem", in *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 47, no. 10, pp. 1603-1621, 2007.]
5. **Potter M. C., Graber E.** Stability of plane Poiseuille flow with heat transfer // *Phys. Fluids.* 1972. Vol. 15, Iss. 3. Pp. 387-391. [M. C. Potter, E. Graber, "Stability of plane Poiseuille flow with heat transfer", in *Phys. Fluids*, vol. 15, Iss. 3, pp. 387-391, 1972.]
6. **Wall D. P., Wilson S. K.** The linear stability of channel flow of fluid with temperature-dependent viscosity // *J. Fluid Mech.* 1996. Vol. 323. Pp. 107-132. [D. P. Wall, S. K. Wilson, "The linear stability of channel flow of fluid with temperature-dependent viscosity", in *J. Fluid Mech.*, vol. 323, pp. 107-132, 1996.]
7. **Melinder A., Granryd E.** Secondary Refrigerants for Heat Pumps and Low Temperature Refrigeration – A comparison of thermodynamic properties of aqueous solutions and non-aqueous liquids. Dept. of Applied Thermodynamics and Refrigeration, The Royal Institute of Technology. Sweden, 1992. [A. Melinder, E. Granryd, *Secondary Refrigerants for Heat Pumps and Low Temperature Refrigeration – A comparison of thermodynamic properties of aqueous solutions and non-aqueous liquids*, in Dept. of Applied Thermodynamics and Refrigeration, The Royal Institute of Technology. Sweden, 1992.]
8. **Низамова А.Д., Киреев В. Н., Урманчиев С. Ф.** Влияние зависимости вязкости от температуры на спектральные характеристики уравнения устойчивости течения термовязких жидкостей // *Многофазные системы.* 2019. Т. 14, № 1. С. 52–58. [A. D. Nizamov, V. N. Kireev, S. F. Urmancheev, "Influence of the dependence of viscosity on temperature on the spectral characteristics of the equation of stability of the flow of thermoviscous liquids", (in Russian), in *Mnogofaznie sistemi*, vol. 14, no. 1, pp. 52-58, 2019.]
9. **Низамова А. Д., Киреев В. Н., Урманчиев С. Ф.** Исследование собственных функций возмущения поперечной составляющей скорости потока термовязких жидкостей // *Многофазные системы.* 2019. Т. 14, № 2. С. 132–137. [A. D. Nizamov, V. N. Kireev, S. F. Urmancheev, "Investigation of the eigenfunctions of the perturbation of the transverse component of the flow velocity of thermoviscous liquids", (in Russian), in *Mnogofaznie sistemi*, vol. 14, no. 2, pp. 132-137, 2019.]
10. **Kireev V. N., Nizamova A. D., Urmancheev S. F.** Some Features of Hydrodynamic Instability of a Plane Channel Flow of a Thermoviscous Fluid // *Fluid Dynamics.* 2019. Vol. 54, No. 7. Pp. 978-982. [V. N. Kireev, A. D. Nizamov, S. F. Urmancheev, "Some Features of Hydrodynamic Instability of a Plane Channel Flow of a Thermoviscous Fluid", in *Fluid Dynamics*, vol. 54, no. 7, pp. 978-982, 2019.]
11. **Kireev V. N., Nizamova A. D., Urmancheev S. F.** Instabilities in stratified two thermoviscous liquids flow in a plane channel // *Proc. 9th Int. Conf. Multiphase Flow (Florence, Italy CD 4).* 2016. [V. N. Kireev, A. D. Nizamov, S. F. Urmancheev, "Instabilities in stratified two thermoviscous liquids flow in a plane channel", in *Proc. 9th Int. Conf. Multiphase Flow*, Florence, Italy CD 4, 2016.]

ОБ АВТОРАХ

НИЗАМОВА Аделина Димовна, науч. сотр. Дипл. матем., сист. программист (УГАТУ, 2012). Канд. физ.-мат. наук по механике жидкости, газа и плазмы.

КИРЕЕВ Виктор Николаевич, доц. каф. прикладной физики. Дипл. математик (БГУ, 1997). Канд. физ.-мат. наук по теплофизике и теор. теплотехн. Численное моделирование динамики дисперсных и аномально термовязких сред.

УРМАНЧЕЕВ Саид Федорович, гл. науч. сотр. Дипл. инж.-исследователь (МЭИ, 1975). Д-р физ.-мат. наук по механике жидкости, газа и плазмы. Иссл. в обл. механики многофазных систем, волновых процессов в пористых средах, термогидродинамики, матем. моделировании технологических процессов.

METADATA

Title: On a nonisothermal stability problem for a viscous fluid flow in a plane channel.

Authors: A. D. Nizamova¹, V. N. Kireev², S. F. Urmancheev³

Affiliation:

^{1,3} Mavlutov Institute of Mechanics of RAS, Ufa Investigation Center (IMech RAS), Russia.

² Bashkir State University, Russia.

Email: ¹ adeshka@yandex.ru, ² kireev@anrb.ru, ³ said@anrb.ru

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 25, no. 4 (94), pp. 76-82, 2021. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: The paper considers the influence of the nature of the change in the dependence of viscosity on temperature on the stability of the flow of a 45 % aqueous solution of propylene glycol in a flat channel with a linear temperature distribution. The solution of the hydrodynamic stability problem was reduced to the determination of the spectra of the generalized Orr – Sommerfeld equation. Spectra of eigenvalues and eigenfunctions were constructed for both sections of the dependence of viscosity on temperature, the corresponding critical Reynolds numbers were determined. The results of the study indicate that the laminar-turbulent transition depends not only on the presence of a dependence of viscosity on temperature, but also on the intensity of its change.

Key words: Orr – Sommerfeld equation; thermoviscous liquid; eigenvalues; eigenfunctions; Reynolds number; spectral method; Chebyshev polynomials; phase velocity; wavenumber; propylene glycol aqueous solution; heat exchanger.

About authors:

NIZAMOVA, Adelina Dimovna, Researcher, Mathematician and system programmer (USATU, 2012). Cand. of Phys. and Math. Sci. (BSU, 2019).

KIREEV, Victor Nikolaevich, Assoc. Prof. Dipl. Mathematician (BSU, 1997). Cand. of Phys. and Math. Sci. (BSU, 2004).

URMANCHEEV, Said Fedorovich, Research. Dipl. Research Engineer (MPEI, 1975). Dr. of Phys. and Math. Sci.