ISSN 1992-6502 (Print) Вестник УГАТУ ISSN 2225-2789 (Online)
2021. Т. 25, № 4 (94). С. 124–131 http://journal.ugatu.ac.ru

УДК 519 doi 10.54708/19926502_2021_25494124

Применение методов численной фильтрации в задачах интегрирования и суммирования рядов

Н. М. Шерыхалина[1], А. А. Ахмадуллин[2], К. Р. Галлямутдинова[3]

[1] n_sher@mail.ru, [2] akhmadullin.a@internet.ru, [3] s_kamill@mail.ru

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 22.05.2021

Аннотация. Описывается численный эксперимент, проведенный над результатами приближенного решения некоторых задач вычислительной математики. В частности, сравниваются уточненные результаты, полученные различными методами интегрирования. Для нахождения определенного интеграла используются такие численные методы как левых, правых, средних прямоугольников, трапеций и парабол. Также рассмотрена задача суммирования степенного ряда. Для уточнения вычисленных результатов задач численного интегрирования и ускорения сходимости ряда применяются экстраполяционные методы. Численная фильтрация полученных результатов позволяет уточнить их на несколько порядков и провести надежную оценку погрешности.

Ключевые слова: экстраполяция; численная фильтрация; метод Ричардсона; метод Эйткена; численный эксперимент; численное интегрирование.

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день мы все чаще и чаще сталкиваемся с необходимостью «предсказывать» будущее. Например, нам всем нужно знать прогноз погоды на ближайшее время. Это одна из задач, которую решают методы экстраполяции. Предполагается, что данные и наблюдения в будущем будут похожи на те, которые уже известны. Так и происходит нахождение неизвестной информации.

Существует множество методов экстраполяции. Наиболее часто используются линейная экстраполяция, методы Нэвилла, Эйткена, правило Ричардсона, ε-алгоритм, Θ-алгоритм, метод численной фильтрации и другие. В данной статье мы затронем некоторые из них.

ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ И ЧИСЛЕННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКЕ

В современном мире практически все математические задачи решаются с помощью компьютеров. В том числе и задачи экстраполяции. Но с этим возникают и новые трудности, которые необходимо преодолеть.

Представим математическую модель погрешности, которая используется для большинства возможных случаев

$$z_n - z = c_1 n^{-k_1} + \ldots + c_L n^{-k_L} + \Delta(n), \tag{1}$$

где z – точное значение; z_n – приближенный результат, полученный при числе узловых точек равном n; k_j – произвольные действительные числа ($k_1 < k_2 < \ldots < k_n$). Такая зависимость имеет место при применении многих численных методов.

В $\Delta(n)$ может входить остаточный член, погрешность округления и многие другие составляющие, обусловленные как численным методом, так и конкретной программной реализацией. Можно сделать вывод о том, что $\Delta(n)$ не стремится к нулю, поэтому ее нельзя считать малой величиной и пренебрегать ей. Для последовательного устранения компонент погрешности используют такой метод, как численная фильтрация. Если известен показатель степени слагаемого, данная задача решается точно.

УТОЧНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПО ПРАВИЛУ РИЧАРДСОНА

Правило Ричардсона является одним из наиболее распространенных способов экстраполяции, его активно используют в математике, физике, экономике и других науках. Данное правило позволяет повысить порядок точности численных расчетов или ускорить сходимость рядов.

Проведем численный эксперимент для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ для функции $f(x)=\sin(x)$ на отрезке интегрирования $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Разобьем отрезок на n частей, и их количество будем увеличивать в Q раз ($Q = 2$).

Для нахождения определенного интеграла используем такие численные методы как левых, правых, средних прямоугольников, трапеций и парабол.

Нахождение уточненных значений по правилу Ричардсона

$$z = z_n + \frac{z_n - z_{n/Q}}{Q^k - 1} \tag{2}$$

и оценки погрешностей проведем в Excel. Здесь n – количество отрезков; z_n – приближенный результат, полученный численными методами интегрирования при определенном n; Δ – разница между приближенными значениями на текущем и предыдущем шаге; $K_\Delta \approx 2^k$, где k – порядок точности численного метода интегрирования. Значения $z_n^{(1)}$, $z_n^{(2)}$, $z_n^{(3)}$, $z_n^{(4)}$ – отфильтрованные один, два, три, четыре раза значения по формуле (2).

Для удобства результаты фильтрации и оценку погрешности будем представлять на графике, где ось абсцисс – это десятичные логарифмы от n (количество отрезков), а ось ординат – десятичные логарифмы абсолютных величин погрешностей. Цифрой 1 обозначена зависимость погрешностей результатов, отфильтрованных один раз, цифрой 2 – два раза и т.д.

Таблица 1

Уточнение по методу Ричардсона. Метод левых прямоугольников: первая фильтрация (z_n, $z_n^{(1)}$)

n	z_n	Δ_0	$K_{\Delta 0}$	$z_n^{(1)}$	Δ_1	$K_{\Delta 1}$
2	0,555360367					
4	0,79076626	2,35E–01		1,026172153		
8	0,898610401	1,08E–01	2,18E+00	1,006454543	–1,97E–02	
16	0,950109295	5,15E–02	2,09E+00	1,001608189	–4,85E–03	4,07E+00
32	0,975255502	2,51E–02	2,05E+00	1,000401708	–1,21E–03	4,02E+00
64	0,987677954	1,24E–02	2,02E+00	1,000100406	–3,01E–04	4,00E+00
128	0,993851527	6,17E–03	2,01E+00	1,0000251	–7,53E–05	4,00E+00
256	0,996928901	3,08E–03	2,01E+00	1,000006275	–1,88E–05	4,00E+00
512	0,998465235	1,54E–03	2,00E+00	1,000001569	–4,71E–06	4,00E+00
1024	0,999232814	7,68E–04	2,00E+00	1,000000392	–1,18E–06	4,00E+00
2048	0,999616456	3,84E–04	2,00E+00	1,000000098	–2,94E–07	4,00E+00
4096	0,99980824	1,92E–04	2,00E+00	1,000000025	–7,35E–08	4,00E+00
8192	0,999904123	9,59E–05	2,00E+00	1,000000006	–1,84E–08	4,00E+00
16384	0,999952062	4,79E–05	2,00E+00	1,000000002	–4,60E–09	4,00E+00
32768	0,999976031	2,40E–05	2,00E+00	1	–1,15E–09	4,00E+00
65536	0,999988016	1,20E–05	2,00E+00	1	–2,87E–10	4,00E+00
131072	0,999994008	5,99E–06	2,00E+00	1	–7,18E–11	4,00E+00
262144	0,999997004	3,00E–06	2,00E+00	1	–1,79E–11	4,00E+00
524288	0,999998502	1,50E–06	2,00E+00	1	–4,54E–12	3,95E+00
1048576	0,999999251	7,49E–07	2,00E+00	1	–1,13E–12	4,01E+00
2097152	0,999999625	3,75E–07	2,00E+00	1	–1,92E–13	5,90E+00
4194304	0,999999813	1,87E–07	2,00E+00	1	–2,35E–13	8,17E–01
8388608	0,999999906	9,36E–08	2,00E+00	1	2,45E–13	–9,59E–01
16777216	0,999999953	4,68E–08	2,00E+00	1	–3,39E–13	–7,23E–01

Таблица 2

Уточнение по методу Ричардсона. Метод левых прямоугольников: вторая, третья и четвертая фильтрация ($z_n^{(2)}$, $z_n^{(3)}$, $z_n^{(4)}$)

n	$z_n^{(2)}$	Δ_2	$K_{\Delta 2}$	$z_n^{(3)}$	Δ_3	$K_{\Delta 3}$	$z_n^{(4)}$
2							
4							
8	0,999882006						
16	0,999992738	1,11E–04		1,00000012			
32	0,999999548	6,81E–06	1,63E+01	1,000000002	–1,18E–07		1
64	0,999999972	4,24E–07	1,61E+01	1	–1,82E–09	6,50E+01	1
128	0,999999998	2,65E–08	1,60E+01	1	–2,83E–11	6,42E+01	1
256	1	1,65E–09	1,60E+01	1	–4,39E–13	6,45E+01	1
512	1	1,03E–10	1,60E+01	1	–7,77E–15	5,64E+01	1
1024	1	6,46E–12	1,60E+01	1	–1,89E–15	4,12E+00	1
2048	1	4,05E–13	1,59E+01	1	1,89E–15	–1,00E+00	1
4096	1	2,32E–14	1,75E+01	1	–2,22E–15	–8,50E–01	1
8192	1	1,24E–14	1,87E+00	1	1,18E–14	–1,89E–01	1
16384	1	–1,44E–14	–8,62E–01	1	–1,63E–14	–7,21E–01	1
32768	1	5,44E–15	–2,65E+00	1	6,77E–15	–2,41E+00	1
65536	1	1,59E–14	3,43E–01	1	1,67E–14	4,07E–01	1
131072	1	–9,77E–15	–1,63E+00	1	–1,15E–14	–1,44E+00	1
262144	1	1,73E–14	–5,64E–01	1	1,91E–14	–6,05E–01	1
524288	1	–7,17E–14	–2,41E–01	1	–7,76E–14	–2,46E–01	1
1048576	1	4,55E–15	–1,58E+01	1	9,66E–15	–8,03E+00	1
2097152	1	1,21E–13	3,75E–02	1	1,29E–13	7,49E–02	1
4194304	1	–2,49E–13	–4,87E–01	1	–2,74E–13	–4,71E–01	1
8388608	1	4,05E–13	–6,16E–01	1	4,49E–13	–6,10E–01	1
16777216	1	–5,34E–13	–7,59E–01	1	–5,96E–13	–7,52E–01	1

По аналогии будем заполнять таблицы для всех последующих численных методов.

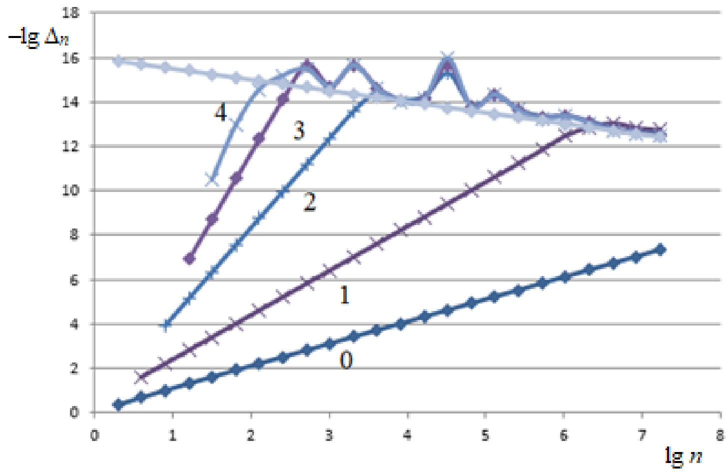

Рис. 1. Экстраполяция по методу Ричардсона. Метод левых прямоугольников

Заметим, что почти приближенное значение к единице мы получаем при разбиении на 8 отрезков и второй фильтрации. А при разбиении на 16 отрезков и третьей фильтрации получается число еще ближе к 1.

Проведем расчет уточненного значения определенного интеграла по методу левых прямоугольников с применением правила Ричардсона. Найдем интеграл с шагом $2h$ и точками x_0, x_2, x_4, а затем с шагом h и точками x_0, x_1, x_2, x_3, x_4. Найдем уточненное значение по формуле (2).

$$z_n^{(1)} = z_{2h} + \frac{z_{2h} - z_h}{0.5^1 - 1} = z_{2h} - 2z_{2h} + 2z_h = -z_{2h} + 2z_h = -2h(f_0 + f_2) + 2h(f_0 + f_1 + f_2 + f_3) = 2h(f_1 + f_3). \quad (3)$$

Уточнение расчета метода левых прямоугольников с порядком точности равным единице привело к формуле средних прямоугольников с порядком точности равным двум.

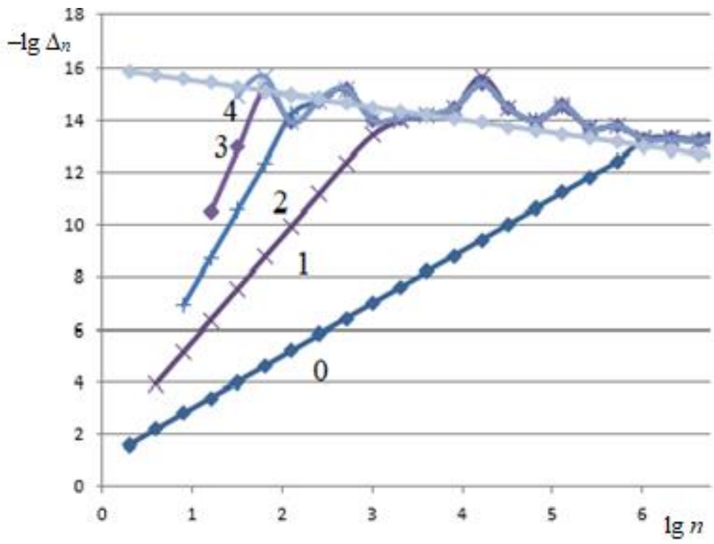

Рис. 2. Экстраполяция по методу Ричардсона. Метод средних прямоугольников

Заметно, что угол наклона прямых относительно оси абсцисс на графике (рис. 2) больше, чем на графике на рис. 1.

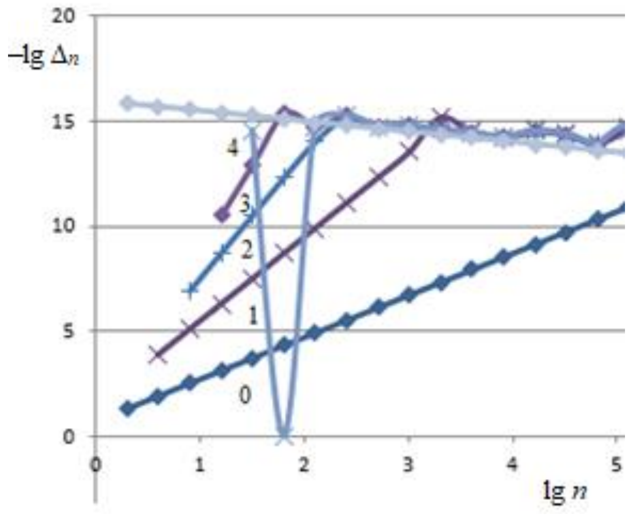

Рис. 3. Экстраполяция по методу Ричардсона. Метод трапеций

Также проведем расчет уточненного значения определенного интеграла по методу трапеций с применением правила Ричардсона. Найдем интеграл с шагом $2h$ и точками x_0, x_2, x_4, а затем с шагом h и точками x_0, x_1, x_2, x_3, x_4. Найдем уточненное значение по формуле (2).

$$z_n^{(1)} = z_{2h} + \frac{z_{2h} - z_h}{0.5^2 - 1} = z_{2h} - \frac{4}{3}(z_{2h} - 2z_h) = \frac{1}{3}(4z_h - z_{2h}) = \frac{1}{3}\left(4h\left[\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + f_3 + \frac{f_4}{2}\right] - 2h\left[\frac{f_0}{2} + f_2 + \frac{f_4}{2}\right]\right).$$

Тогда

$$z_n^{(1)} = \frac{1}{3}h(2f_0 + 4f_1 + 4f_2 + 4f_3 + 2f_4 - f_0 - 2f_2 - f_4) = \frac{1}{3}h(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4). \quad (4)$$

Данное уточнение расчета метода трапеций с порядком точности равным двум привело к формуле парабол с порядком точности равным четырем.

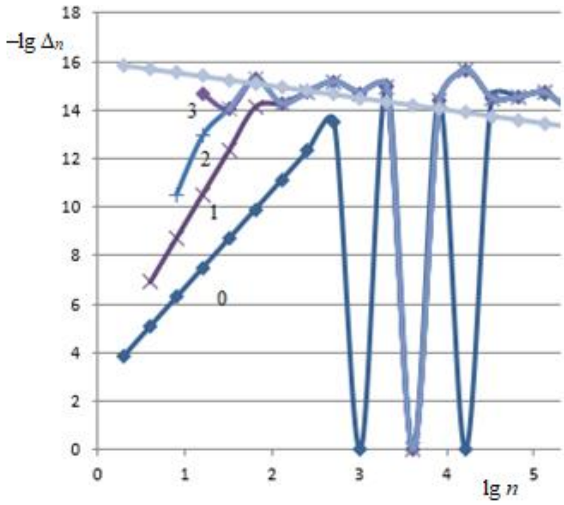

Рис. 4. Экстраполяция по методу Ричардсона. Метод парабол

Угол наклона прямых относительно оси абсцисс на графике (рис. 4) стал еще больше.

Из проведенного выше эксперимента можно сделать вывод о том, что метод Ричардсона довольно эффективный. Численная фильтрация компонент погрешности результатов расчетов позволила увеличить их точность до 10^{-15}.

УТОЧНЕНИЕ ПО ПРАВИЛУ ЭЙТКЕНА

В численном анализе δ^2 – Эйткена или экстраполяция Эйткена – это метод последовательного ускорения, используемый для ускорения скорости сходимости последовательности. Он назван в честь Александра Эйткена, который ввел этот метод в 1926 году.

Но для применения метода Ричардсона должен быть известен порядок точности. В случае, когда это значение неизвестно (предположим, что порядок точности существует, но неизвестен), тогда, имея в распоряжении расчеты на трех и более номерах последовательности, можно использовать модификацию правила Ричардсона, которая называется методом Эйткена или δ^2-алгоритмом.

Если вычислить три значения z_1, z_2, z_3 при трех номерах последовательности n, nQ, nQ^2 ($Q > 1$), можно составить систему уравнений, и найти из нее z.

$$\begin{cases} z_1 = z + c_1 n^{-k}, \\ z_2 = z + c_1 n^{-k} Q^{-k}, \\ z_3 = z + c_1 n^{-k} Q^{-2k}. \end{cases} \quad (5)$$

$$z = z_3 + \frac{z_3 - z_2}{\dfrac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} - 1} = z_3 - \frac{(z_3 - z_2)^2}{z_1 - 2z_2 + z_3}. \quad (6)$$

Таким образом находится экстраполированное (уточненное) значение $z = z_3^{(1)}$, а вместе с ним и оценка погрешности вычисленного значения.

Проведем численный эксперимент, используя процесс Эйткена.

Пусть необходимо найти предел суммы $z_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\alpha}}$, при $n \to \infty$. Возьмем $Q = 2$. Найдем уточненные результаты в Excel.

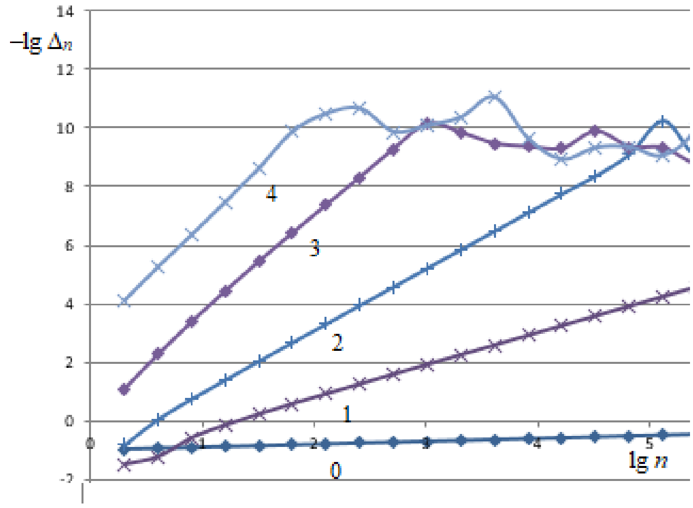

Рис. 5. Экстраполяция по методу Эйткена. Предел суммы ряда

Из эксперимента следует, что для получения уточненного значения с пятью знаками после запятой, нужно либо сложить более 2^{29} частичные суммы, либо сложить 2^{11} частичные суммы и провести уточнение результатов методом Эйткена четыре раза. Из этого понятно, что считать более 2^{29} частичные суммы только для того, чтобы узнать результат с пятью знаками после запятой не целесообразно. Благодаря этому примеру, мы видим, насколько метод Эйткена полезен при вычислениях таких пределов. А из рис. 5 понятно, что данному методу требуется больше слагаемых, чем при фильтрации по методу Ричардсона.

Применяя процесс Эйткена в численном интегрировании, выбираем три сетки с постоянным отношением шагов, т.е. с шагами $h_1 = h$, $h_2 = qh$, $h_3 = q^2h$. Обозначим приближенное значение интеграла на k-ой сетке через z_k и ограничимся главным членом погрешности. Теперь запишем $z = z_k + \alpha h_k^p$ при $k = 1, 2, 3$.

Образуется система из трех уравнений для определения неизвестных z, α, p. Далее вводим вспомогательные обозначения $\beta = \alpha h^p$, $\gamma = q^p$. Преобразуем эту систему к следующему виду: $z - z_1 = \beta$, $z - z_2 = \beta\gamma$, $z - z_3 = \beta\gamma^2$. Получим $Q^{-p} = \gamma = (z_3 - z_2) / (z_2 - z_1)$, где p – эффективный порядок точности

$$p = \frac{\ln((z_3 - z_2)/(z_2 - z_1))}{\ln(Q^{-1})}. \tag{7}$$

Погрешность численного интегрирования при изменении шага в Q^{-1} раз меняется приблизительно в Q^{-p} раз, поэтому если сетки последовательно сгущаются в одно и то же число раз, то ошибка убывает именно по требуемому закону.

Попробуем найти тот же интеграл, полученный при вычислении методом левых прямоугольников, но используем правило Эйткена для ускорения получения более точных результатов. Так как уже при четвертой фильтрации степень разницы между результатами на 2048 и 4096 отрезках достигает –13, зададим $n \in \left[2; 2^{12}\right]$.

Нахождение уточненных значений и оценки погрешностей проведем в Excel. Здесь n – количество отрезков; z_n – приближенный результат, полученный методом интегрирования левых прямоугольников при определенном n; Δ – разница между приближенными значениями на текущем и предыдущем шаге; $K_\Delta \approx 2^k$, $z_n^{(1)}$, $z_n^{(2)}$, $z_n^{(3)}$, $z_n^{(4)}$ – отфильтрованные один, два, три, четыре раза значения по формуле (6), p – эффективный порядок точности, который считаем по формуле (7).

Таблица 3

Уточнение по методу Эйткена. Метод левых прямоугольников: первая фильтрация (z_n, $z_n^{(1)}$)

n	z_n	Δ_0	p_0	$z_n^{(1)}$	Δ_1	p_1
2	0,555360367					
4	0,79076626	2,35E–01				
8	0,898610401	1,08E–01	1,126202632	0,98978474		
16	0,950109295	5,15E–02	1,066334455	0,99717868	7,39E–03	
32	0,975255502	2,51E–02	1,034200672	0,99925046	2,07E–03	1,835468955
64	0,987677954	1,24E–02	1,017390795	0,99980624	5,56E–04	1,89829776
128	0,993851527	6,17E–03	1,008772328	0,9999507	1,44E–04	1,943799321
256	0,996928901	3,08E–03	1,004405957	0,99998756	3,69E–05	1,970486962
512	0,998465235	1,54E–03	1,002207999	0,99999688	9,31E–06	1,984879768
1024	0,999232814	7,68E–04	1,001105263	0,99999922	2,34E–06	1,992347559
2048	0,999616456	3,84E–04	1,000552949	0,9999998	5,87E–07	1,996150507
4096	0,99980824	1,92E–04	1,000276554	0,99999995	1,47E–07	1,99806947
Среднее			1,02614496			1,952437538

Таблица 4

Уточнение по методу Эйткена. Метод левых прямоугольников: вторая, третья и четвертая фильтрация ($z_n^{(2)}$, $z_n^{(3)}$, $z_n^{(4)}$)

n	$z_n^{(2)}$	Δ_2	p_2	$z_n^{(3)}$	Δ_3	p_3	$z_n^{(4)}$
2							
4							
8							
16							
32	1,000056957						
64	1,000009989	–4,70E–05					
128	1,000001441	–8,55E–06	2,45809177	0,99999954			
256	1,000000193	–1,25E–06	2,775262845	0,999999979	4,40E–07		
512	1,000000025	–1,68E–07	2,896021071	0,999999999	1,98E–08	4,471524	1
1024	1,000000003	–2,17E–08	2,949822384	1	1,09E–09	4,1779	1
2048	1	–2,76E–09	2,975337451	1	6,48E–11	4,077764	1
4096	1	–3,48E–10	2,987719554	1	3,93E–12	4,042946	1
Среднее			2,840375846			4,192534	

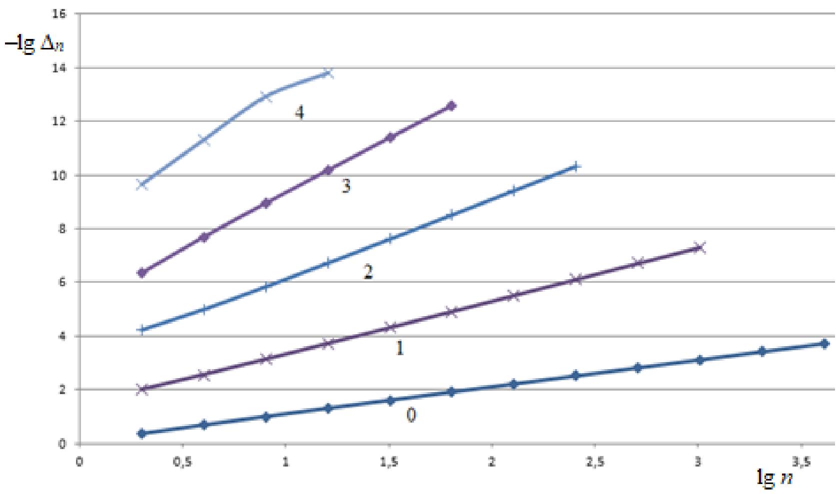

Рис. 6. Экстраполяция по методу Эйткена. Метод левых прямоугольников

Заметим, что эффективные порядки точности, вычисленные после проведения фильтрации меньше, чем порядки точности, которые мы получили при использовании метода Ричадсона. Можно предположить, что так как метод Эйткена не учитывает порядок точности при фильтрации, погрешность возрастает.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исходя из всего вышесказанного, можно сделать вывод о том, что методы экстраполяции позволяют существенно быстрее получить результат. Но так как в компьютере нет бесконечно малых и не бывает сходимости, то на практике решается задача численной фильтрации, т.е. последовательного исключения компонент погрешности. Эта задача решается точно, если известен показатель степени очередного слагаемого. Таким образом, результаты могут уточняться на несколько порядков, и их высокая точность достигается при достаточно малом числе узлов или слагаемых суммы. Также важно учитывать то, что именно нужно экстраполировать и каким методом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Житников В. П., Шерыхалина Н. М.** Обоснование методов фильтрации результатов численного эксперимента // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9, № 3 (21). С. 71–79. **[** V. P. Zhitnikov, N. M. Sherykhalina, “Substantiation of filtration methods for the results of a numerical experiment”, (in Russian), in *Vestnik UGATU,* vol. 9, no. 3 (21), pp. 71-79, 2007. **]**

2. **Житников В. П., Шерыхалина Н. М., Соколова А. А.** Оценка погрешности и ее обоснование с помощью фильтрации численных результатов, полученных при разных числах узловых точек сетки // Известия Самарского научного центра РАН. 2017. Т. 19, № 1 (2). С. 401–405. **[** V. P. Zhitnikov, N. M. Sherykhalina, A. A. Sokolova, “The error estimation and its justification by the filtration of numerical results obtained with different numbers of nodes”, (in Russian), in *Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra RAN,* vol. 19, no. 1 (2), pp. 401-405. **]**

3. **Исследование** свойств численных методов с помощью вычислительного эксперимента: учеб. пособие / В. П. Житников [и др.]. Уфа: РИК УГАТУ, 2019. 287 с. **[** V. P. Zhitnikov, *et al., Investigation of the properties of numerical methods using a computational experiment: a tutorial,* (in Russian). Ufa: RIK UGATU, 2019. **]**

ОБ АВТОРАХ

ШЕРЫХАЛИНА Наталия Михайловна, проф. каф. ВМиК. Дипл. инж.-системотехн. (УГАТУ, 1993). Д-р техн. наук по мат. моделированию, числ. методам и комплексам программ (УГАТУ, 2012). Иссл. в обл. волновых течений жидкости, разработки числ.-аналит. методов, методов оценки погрешности и достоверности числ. результатов.

АХМАДУЛЛИН Аскар Артурович, студент ПРО ФИРТ УГАТУ.

ГАЛЛЯМУТДИНОВА Камилла Ринатовна, студент ПРО ФИРТ УГАТУ.

METADATA

Title: Application of numerical filtration methods in problems of integration and series summing.

Authors: N. M. Sherykhalina[1], A. A. Akhmadullin[2], K. R. Gallyamutdinova[3]

Affiliation: Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

Email: [1] n_sher@mail.ru, [2] akhmadullin.a@internet.ru, [3] s_kamill@mail.ru

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 25, no. 4 (94), pp. 124-131, 2021. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: In this paper, some extrapolation methods are considered and numerical experiments are performed. In particular, the results obtained by different integration methods are compared. The convergence of the series is also accelerated in foundation of the sum. The Richardson and the Aitken extrapolation methods are applied to refine the numerical results. The analysis of numerical filtration results allows estimating its high accuracy.

Key words: extrapolation; numerical filtering; Richardson method; Aitken method; numerical experiment; numerical integration.

About authors:

SHERYKHALINA, Nataliya Mikhailovna, Prof., Dept. of Computer Sci. and robotics. Dipl. Engineer-system master (UGATU, 1993). Cand. of Phys.-Math. Sci. (BGU, 1996), Dr. of Tech. Sci. (UGATU, 2012).

AKHMADULLIN, Askar Arturovich, Student of UGATU.

GALLYAMUTDINOVA, Kamilla Rinatovna, Student of UGATU.