ISSN 1992-6502 (Print) Вестник УГАТУ ISSN 2225-2789 (Online)
2017. Т. 21, № 1 (75). С. 167–172 http://journal.ugatu.ac.ru

УДК 519.9

О корректности функции принадлежности решения дифференциальных уравнений с нечеткими начальными данными

Д. В. Кузнецов[1], **В. В. Водопьянов**[2]

[1] kuznetsov.denis2495@yandex.ru, [2] vodop@yandex.ru

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 26.12.2016

Аннотация. Рассматриваются условия корректности построения функции принадлежности решений дифференциальных уравнений с нечеткими начальными данными. Также рассматриваются вопросы сходимости по различным метрикам. Показано, что найденный ранее в ряде работ аналитический вид функции принадлежности, удовлетворяет введенным условиям корректности лишь в частных случаях.

Ключевые слова: нечеткие дифференциальные уравнения, функция принадлежности, математическая модель

ВВЕДЕНИЕ

Нечеткие дифференциальные уравнения опираются на методы теории нечетких множеств и нечетких чисел, впервые предложенные Л. А. Заде в середине 60-ых гг. В последние годы дифференциальные уравнения с нечеткими или неопределенными коэффициентами используются в математических моделях, описывающих разнообразные физико-химические процессы и, в частности, физико-химические процессы распространения загрязнений [1].

В данной статье рассматриваются вопросы корректного нахождения функции принадлежности для решений дифференциальных уравнений с нечеткими начальными данными.

ПОНЯТИЕ НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА И ЕГО СВОЙСТВА

Основные понятия теории нечетких множеств можно найти в [2]. Напомним некоторые из них.

Пусть $conv(\mathbb{R}^n)$ $\left(comp(\mathbb{R}^n)\right)$ − пространство, состоящее из всех непустых выпуклых (компактных) подмножеств $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ с метрикой Хаусдорфа:

$$h(A,B) = min\begin{Bmatrix} r \geq 0: A \subset B + S_r(0), \\ B \subset A + S_r(0) \end{Bmatrix},$$

где $S_r(a)$ − шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса $r \geq 0$ с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1. Пусть E − некоторое множество. Тогда нечетким подмножеством A множества E называется множество упорядоченных пар $\left\{\left(x, \mu_A(x)\right): x \in E\right\}$, где $\mu_A(x): E \to [0,1]$ − функция принадлежности.

Функция принадлежности характеризует степень принадлежности произвольного элемента к нечеткому множеству A.

Определение 2. Функция $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ называется полунепрерывной сверху (снизу) по Бэру в точке $x_0 \in \mathbb{R}^m$, если

$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) \leq f(x_0), \left(\underline{\lim_{x\to x_0}} f(x) \geq f(x_0)\right)$$

т. е. для $\forall \varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $\|x - x_0\| < \delta$ справедливо неравенство $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, $(f(x_0) < f(x) + \varepsilon)$.

Введем в рассмотрение пространство $\mathbb{E}^n$ функций принадлежности $u: \mathbb{R}^n \to [0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. u полунепрерывно сверху по Бэру;
2. u нормально, т. е. существует вектор $y_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что $u(y_0) = 1$;
3. u нечетко выпукло, т.е. для любых $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ и любого $\lambda \in [0,1]$ справедливо неравенство $u(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \geq min\{u(y_1), u(y_2)\}$;
4. замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n: u(y) > 0\}$ компактно.

Пространство E^1 называется пространством нечетких чисел.

Определение 3. Множество $[u]^{\alpha} = \{y \in \mathbb{R}^n : u(y) \geq \alpha\}$ при $0 < \alpha \leq 1$ называется $\alpha -$ срезкой нечеткого множества u.

Через $[u]^0$ обозначим замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n : u(y) > 0\}$.

Нулем в пространстве $\mathbb{E}^n$ является элемент

$$\hat{0} = \begin{cases} 1, & y = 0 \\ 0, & y \in \mathbb{R}^n \backslash 0 \end{cases}.$$

Определим в пространстве $\mathbb{E}^n$ метрику

$$D(x, v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} h([x]^{\alpha}, [v]^{\alpha}).$$

МЕТОД УЧЕТА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДАННЫХ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Рассмотрим математическую модель биологической популяции, которая описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad (1)$$

где $t \in \mathbb{R}^+ -$ параметр времени, $\mathbb{R} -$ множество действительных чисел, $x = x(t) \in D \subset \mathbb{R}_+^n -$ вектор численности видов в сообществе.

К системе уравнений (1) добавим начальные условия

$$x(0) = x^0. \qquad (2)$$

Получим задачу Коши (1)–(2). Будем предполагать, что решение задачи (1)–(2) существует и единственно для всех $t \in \mathbb{R}$.

Предположим теперь, что начальные условия являются неопределенными и заданы в виде нечеткого числа.

Обозначим через $\varphi(t, x)$ функцию принадлежности состояния сообщества заданному значению x в момент времени t. Функция $\varphi: \mathbb{R}_+^{n+1} \to \mathbb{R}_+$ предполагается непрерывной по x.

Обозначим через $\chi(t, \tau, x^{\tau})$ решение $x(t)$ системы уравнений (1) в момент времени t при условии $x(\tau) = x^{\tau}$. Пусть G – компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Σ. Обозначим

$$G_t = \chi(t, 0, G). \qquad (3)$$

При наших условиях множество G_t компактно и имеет гладкую границу $\Sigma_t = \chi(t, 0, \Sigma)$.

Следующее условие установлено в [3].

Теорема 1. Пусть $\varphi(t, x) \in C^1(\mathbb{R}_+^{n+1})$ и $\int_{G_t} \varphi(t, x) dx$ не зависит от t. Тогда $\varphi(t, x)$ подчиняется уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + div(\varphi f) = 0. \qquad (4)$$

В теории нечетких множеств (см., напр., [2]) функции принадлежности очень часто имеют треугольный или трапецевидный вид. Следующие утверждения распространяют результаты статьи [3] и на этот случай.

Теорема 2. Пусть $\varphi(t, x) \in C^1(\mathbb{R}_+^{n+1})$ за исключением конечного числа точек, в которых она непрерывна и $\int_{G_t} \varphi(t, x) dx$ не зависит от t. Тогда равенство (4) остается верным, т.е. $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + div(\varphi f) = 0$ для любых точек, для которых $\varphi(t, x) \in C^1(\mathbb{R}_+^{n+1})$.

Доказательство.

Пусть $x_k -$ точки, не являющиеся точками непрерывных производных, $k = \overline{1, n}$. Рассмотрим область $G_0 = G \backslash \bigcup_{k=1}^{n} O_{\varepsilon}(t_k, x_k), \varepsilon > 0$. Тогда по аналогии с доказательством утверждения 1, приведенным в статье [3], мы приходим к следующему равенству

$$\int_{G_{0t}} \left[\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + div\big(\varphi(t, x) f(t, x)\big)\right] \Delta t + o(\Delta t) dx = 0,$$

где $G_{0t} = \chi(t, 0, G_0)$. В силу произвольности G, при $\Delta t \to 0$ получаем уравнение (4) для точек из множества G_0. Так как малый параметр $\varepsilon > 0$ произвольный, то отсюда и следует доказываемое утверждение.

Таким образом, можно сформулировать утверждение, аналогичное утверждению из [3].

Теорема 3. Пусть задано начальное условие $\varphi(0, x) = \varphi_0(x)$, $\varphi_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$ за исключением некоторого конечного числа точек, в которых φ_0 является непрерывной. Тогда решение уравнения (4) имеет вид:

$$\varphi(t, x) = \varphi_0\big(\chi(0, t, x)\big) \times \times e^{-\int_0^t div\, f(\tau, \chi(\tau, t, x)) d\tau}. \qquad (5)$$

Рассмотрим решения (1) при разных начальных условиях $\chi(t, 0, x^0)$ и $\chi(t, 0, x^1)$. Может случится, что $\varphi(0, x^0) = \varphi(0, x^1)$, в этом случае часто говорят, что решения $\chi(t, 0, x^0)$ и $\chi(t, 0, x^1)$ в точке $t = 0$ имеют равную надежность. Вполне естественно предположить, что и в дальнейшем, хотя и меняясь, функции принадлежности на этих решениях также принимают равные значения в один и тот же момент времени. В связи с этим дадим следующее определение.

Определение 3. Будем говорить, что функция принадлежности для решений системы (1) $x_1(t)$ и $x_2(t)$ задана корректно, если выполнено условие: если $\exists \tau: \varphi\big(\tau, x_1(\tau)\big) = \varphi\big(\tau, x_2(\tau)\big) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi\big(t, x_1(t)\big) = \varphi\big(t, x_2(t)\big) \text{ для } \forall t. \qquad (6)$$

Отметим также, что разрабатываемые численные методы решения дифференциальных уравнений с нечеткими начальными данными практически в неявном виде содержат требования корректности функции принадлежности.

Теорема 4. Условие корректности (6) выполнено тогда и только тогда, когда для решений выполнены:

$$x_1(t), x_2(t): \varphi\big(0, x_1(0)\big) = \varphi\big(0, x_2(0)\big) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi\big(t, x_1(t)\big) = \varphi\big(t, x_2(t)\big) \text{ для } \forall t; \quad (7)$$
$$x_1(t), x_2(t): \varphi\big(0, x_1(0)\big) < \varphi\big(0, x_2(0)\big) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi\big(t, x_1(t)\big) < \varphi\big(t, x_2(t)\big) \text{ для } \forall t. \quad (8)$$

Доказательство:

Введем еще условие:

$$\forall x_1(t), x_2(t): \varphi\big(0, x_1(0)\big) \neq \varphi\big(0, x_2(0)\big) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall t\ \varphi\big(t, x_1(t)\big) \neq \varphi\big(t, x_2(t)\big). \quad (9)$$

Заметим, что (7), (8) ⇔ (7), (9). При выполнении (7) очевидно, что из (8) ⇒ (9).

Обозначим:

$$\varphi_1(t) = \varphi\big(t, x_1(t)\big), \varphi_2(t) = \varphi\big(t, x_2(t)\big).$$

Пусть (9) выполнено:

$$\forall x_1(t), x_2(t): \varphi_1(0) < \varphi_2(0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall t\ \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t).$$

В силу непрерывности $\varphi(t, x)$:

$$\varphi_1(0) - \varphi_2(0) < 0, \forall t\ \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \neq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall t\ \varphi_1(t) - \varphi_2(t) < 0 \Rightarrow (8).$$

Покажем, что (6) ⇔ (7), (8). Очевидно, что (6) ⇒ (7).

Если $\exists \tau: \varphi_1(\tau) \neq \varphi_2(\tau)$, то из (6) следует $\forall t\ \ \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)$, то есть выполнено (9).

Пусть (7), (9) выполнены, тогда

$$\forall x_1(t), x_2(t): \exists \tau: \varphi_1(\tau) = \varphi_2(\tau) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \Rightarrow \forall t\ \varphi_1(t) = \varphi_2(t).$$

Таким образом утверждение доказано.

Теорема 5. Условие (7) выполнено тогда и только тогда, когда выполнено:

$$\forall x_1(t), x_2(t): \varphi\big(0, x_1(0)\big) = \varphi\big(0, x_2(0)\big) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall t \frac{d\varphi\big(t, x_1(t)\big)}{dt} = \frac{d\varphi\big(t, x_2(t)\big)}{dt}. \quad (10)$$

Доказательство

Продифференцировав равенство из (7), получим (10). Обратное можно получить путем интегрирования от 0 до t.

$$\forall x_1(t), x_2(t): \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall t \frac{d\varphi_1(t)}{dt} = \frac{d\varphi_2(t)}{dt}$$
$$\Rightarrow \forall t\ \varphi_1(t) - \varphi_1(0) = \varphi_2(t) - \varphi_2(0) \Rightarrow (7).$$

Теорема 6. Для того чтобы функция принадлежности с выполненными условиями корректности (6) удовлетворяла равенству

$$\varphi(t, x) = \varphi_0\big(\chi(0, t, x)\big) e^{-\int_0^t \operatorname{div} f(\tau, \chi(\tau, t, x)) d\tau},$$

необходимо и достаточно, чтобы $\nabla div\ f(t, x) = 0$.

Необходимость.

Рассмотрим функцию принадлежности

$$\varphi(t, x) = \varphi_0\big(\chi(0, t, x)\big) e^{-\int_0^t div\ f(\tau, \chi(\tau, t, x)) d\tau}.$$

$$\frac{d\varphi\big(t, x(t)\big)}{dt} = -\varphi\big(t, x(t)\big)\ div\ f(t, x)\big|_{x = x(t)}.$$

Пусть (6) выполнено, из (10) получим условие:

$$\forall x_1(t), x_2(t): \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\varphi_1(t) div\ f(t, x)\big|_{x = x_1(t)} =$$
$$= -\varphi_1(t) div\ f(t, x)\big|_{x = x_2(t)},$$

при этом $\forall t\ \varphi_1(t) = \varphi_2(t) \neq 0$. Тогда

$$div\ f(t, x)\big|_{x = x_1(t)} = div\ f(t, x)\big|_{x = x_2(t)}$$
$$\forall t, x_1^t, x_2^t\ \exists \varphi_0(x): \varphi_0\big(\chi(0, t, x_2^t)\big) \neq 0$$
$$\Rightarrow div\ f(t, x)\big|_{x = x_1^t} = div\ f(t, x)\big|_{x = x_2(t)}$$
$$\Rightarrow \nabla div\ f(t, x) = 0.$$

Достаточность.

Пусть $\nabla div f(t, x) = 0$,тогда $div f(t, x) = p(t)$ – некоторая функция, зависящая от t.

$$\varphi(t, x) = \varphi_0\big(\chi(0, t, x)\big) e^{-\int_0^t p(\tau) d\tau} ==$$
$$\varphi_0\big(\chi(0, t, x)\big) e^{q(t)},$$

где $q(t) = \int_0^t p(\tau) d\tau$.

$\forall x_1(t), x_2(t): \exists \varphi\big(\tau, x_1(\tau)\big) = \varphi\big(\tau, x_2(\tau)\big)$ выполняется

$$\varphi_0\big(x_1(0)\big) e^{q(\tau)} = \varphi_0\big(x_2(0\,)\big) e^{q(\tau)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi_0\big(x_1(0)\big) = \varphi_0\big(x_2(0)\big) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall t\ \varphi\big(t, x_1(t)\big) = \varphi\big(t, x_2(t)\big),$$

т. е. (6) выполнено. Утверждение доказано.

Из доказанной теоремы следует, что в случае, когда $x \in \mathbb{R}^1$ равенство $\nabla div f(t, x) = 0$ выполняется только для функций $f(t, x) = C_1 x(t) + C_2$. В случае же, когда $x \in \mathbb{R}^2$ равенство выполняется при следующем виде функций из правой части уравнений

$$f_1(t, x_1, x_2) = C_1 x_1(t) + +\omega\big(x_1(t) -$$
$$-x_2(t)\big) + g\big(x_2(t)\big),$$
$$f_2(t, x_1, x_2) = h\big(x_1(t)\big) + \omega\big(x_1(t) -$$
$$-x_2(t)\big),$$

где *ω(z)* – произвольная дифференцируемая функция одной переменной, а константы могут зависеть от *t* (см.[4]).

МОДЕЛЬ ФЕРХЮЛЬСТА–ПИРЛА С НЕЧЕТКИМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

В работе [3] функция принадлежности выводится в предположении о постоянстве по времени интеграла

$$\int_{G_t} \varphi(t, x) dx. \quad (11)$$

Приведенный интеграл также называется уровнем неопределенности в процессе динамики системы (см. [5]). Постоянство уровня неопределенности также приводит к некоторым противоречиям, связанным с предельным поведением систем. Рассмотрим это на конкретном примере модели Ферхюльста–Пирла.

Итак, возьмем математическую модель, которая описывает ограниченный рост некоторой популяции.

$$\dot{x} = \frac{rx(K-x)}{K}, \tag{12}$$

где в качестве параметров примем точные значения $r = 0{,}3 -$ удельная скорость популяции, $K = 20 -$ максимально возможная численность популяции, $x -$ численность популяции в момент времени t. Начальное состояние системы будем считать заданным с помощью функции принадлежности $\varphi_0(x_0)$.

В статье [3] было показано, что для систем вида (12) функция принадлежности состояния системы при условии постоянства интеграла (11) можно вычислить, используя следующую формулу

$$\varphi(t,x) = \varphi_0\big(\chi(0,t,x)\big)\left[\frac{\chi(0,t,x)}{x}\right]^2 e^{rt} \ . \tag{13}$$

Однако, уравнение (12) имеет стационарное состояние $x_c = K$, которое является аттрактором. Последнее означает, что при любых положительных начальных значениях численность популяции со временем будет приближаться к значению $x_c = K$. Таким образом, носитель функции принадлежности должен сужаться и начиная с некоторого момента попадать в ε-окрестность $(K - \varepsilon, K)$. То есть начиная с некоторого момента $G_t \subset (K - \varepsilon, K)$. Это означает, что максимальное значение функции принадлежности будет неограниченно расти, так как интеграл от этой функции остается постоянным по времени. Это иллюстрирует рис. 1, на котором начальная численность популяции задана в виде нечеткого числа с функцией принадлежности:

$$\varphi(x_0) = \begin{cases} 0, \ x < 13, \\ \frac{1}{2}(x-13), \ 13 \le x < 15, \\ \frac{1}{2}(-x+17), \ 15 \le x < 17, \\ 0, \ x > 17. \end{cases} \tag{14}$$

В принципе, в теории нечетких множеств и допускается, что функция принадлежности может принимать произвольные значения и не только числовые (см. [6]). Однако теория нечетких дифференциальных уравнений в настоящее время развивается в условиях классического определения функции принадлежности (см. [2]).

Вернемся к вопросу о сохранении уровня неопределенности (11) по времени. Если в пространстве функций принадлежности $\mathbb{E}^1$ рассмотреть стационарное состояние $x_c = K$, то оно является четким числом и его функция принадлежности совпадет с характеристической функцией одноточечного множества $\{x_c\}$. Для этой функции принадлежности уровень неопределенности равен нулю. Построенная функция принадлежности по формуле (13) естественно сходится по метрике $D(x, v)$ к характеристической функции $\chi_{\{x_c\}}$, так как носитель функции принадлежности в этом случае сужается и сближается с точкой $\{x_c\}$. Однако уровень неопределенности у нее остается постоянным и не сходится к уровню неопределенности функции $\chi_{\{x_c\}}$, у которой он равен 0. Это означает, что если рассматривать расстояние между этими функциями принадлежности по метрике Хемминга [5]:

$$d(A,B) = \int\limits_U |\varphi_A(u) - \varphi_B(u)| du,$$

то сходимости уже не будет (здесь $\varphi_A(u)$ и $\varphi_B(u)$ – функции принадлежности нечетких подмножеств A и B из универсального множества U).

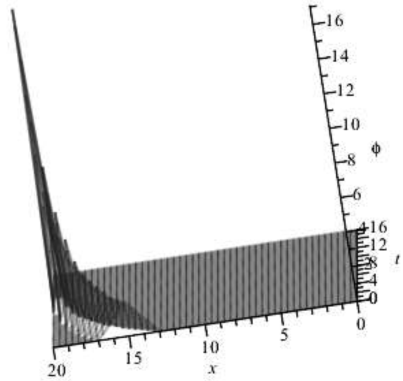

Рис. 1. Функция принадлежности численности популяции, построенная по формуле (13)

В последние годы интенсивно развиваются методы численного решения нечетких дифференциальных уравнений. Эти методы достаточно сложны и специфичны. Однако для систем дифференциальных уравнений с нечеткими начальными данными вида

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y), \ x(t_0) = X_0 \\ \dot{y} = g(x,y), \ y(t_0) = Y_0 \end{cases}, \tag{15}$$

где $f, g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции и начальные условия заданы в виде нечетких чисел $X_0, Y_0 \in \mathbb{E}^1$ в работе [7] был предложен достаточно простой алгоритм, позволяющий построить множества уровня для функции принадлежности. Численный алгоритм решения системы (15) основан на методе Рунге–Кутта четвертого порядка:

$$x_{i+1} = F_h(x_i, y_i) = x_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + \\ +K_4),$$
$$y_{i+1} = G_h(x_i,\, y_i) = y_i + \frac{h}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + \\ +L_4),$$
$$K_1 = f(x_i, y_i),$$
$$K_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}K_1,\, y_i + \frac{h}{2}L_1\right),$$
$$K_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}K_2,\, y_i + \frac{h}{2}L_2\right),$$
$$K_4 = f\big(x_i + hK_3,\, y_i + hL_2\big),$$
$$L_1 = g(x_i, y_i),$$
$$L_2 = g\left(x_i + \frac{h}{2}K_1,\, y_i + \frac{h}{2}L_1\right),$$
$$L_3 = g\left(x_i + \frac{h}{2}K_2,\, y_i + \frac{h}{2}L_2\right),$$
$$K_4 = f\big(x_i + hK_3,\, y_i + hL_2\big),$$
$$X_{i+1} = F_h(X_i, Y_i),$$
$$Y_{i+1} = G_h(X_i, Y_i),$$
$$x^{\alpha}_{1,\, i+1} = F_h\big(x^{\alpha}_{1,i}, y^{\alpha}_{1,i}\big),$$
$$x^{\alpha}_{2,i+1} = F_h(x^{\alpha}_{2,i},\, y^{\alpha}_{2,i}),$$
$$y^{\alpha}_{1,\, i+1} = G_h\big(x^{\alpha}_{1,i}, y^{\alpha}_{1,i}\big),$$
$$y^{\alpha}_{2,i+1} = G_h(x^{\alpha}_{2,i},\, y^{\alpha}_{2,i}).$$

Данный алгоритм позволял численно восстановить множества уровня для функции принадлежности решений системы (15). Так как функция принадлежности по множествам уровня восстанавливается однозначно [2], была написана программа по приведенному выше алгоритму и построению функции принадлежности по ее α −уровням.

Результаты численного расчета функции принадлежности показаны на рис. 2, 3. Из рисунков видно, что при приближении численности популяции к своему максимальному значению с ростом времени носитель функции принадлежности существенно сужается. Отсюда нетрудно видеть, что происходит сходимость функций принадлежности при стремлении времени к бесконечности как по метрике $D(x, v)$, так и по метрике Хемминга.

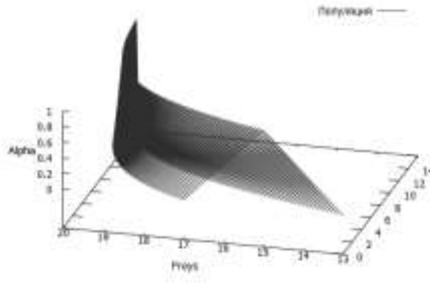

Рис. 2. Функция принадлежности численности популяции, построенная численно для уравнения (12) при начальной функции (14)

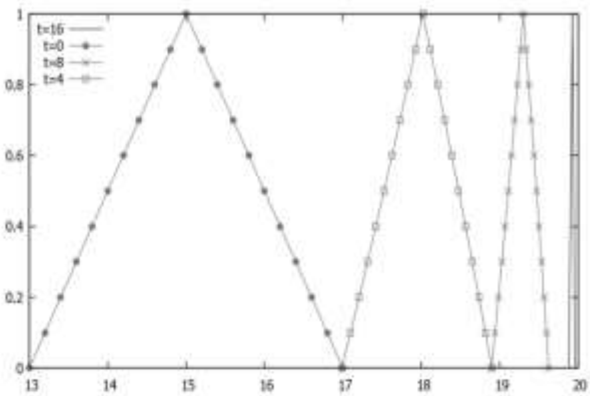

Рис. 3. Вид функции принадлежности для численности популяции в моменты времени $t = 0;\ 4;\ 8;\ 16.$

Численно построенная функция принадлежности в отличии от функции, заданной равенством (13) сходится к характеристической функции $\chi_{\{x_c\}}$ как по метрике $D(x, v)$, порождаемой метрикой Хаусдорфа, так и по интегральной метрике Хемминга. Выполняется также и поточечная сходимость.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в работе результаты показывают, что нахождение аналитического вида функций принадлежности для решений дифференциальных уравнений с нечеткими начальными данными является столь же сложной задачей, как и отыскание аналитических решений дифференциальных уравнений. Представляется важным развитие методов численного нахождения вида функций принадлежности решений дифференциальных уравнений с нечеткими начальными данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Попов Д. В.** Нечетко-дифференциальные модели, алгоритмы и комплекс программ анализа распространения радиоактивных загрязнений в окружающей среде. Автореф. дисс. канд. техн.н. М.: 2013. 16 с. [D. V. Popov, Fuzzy-differential models, algorithms and program analysis of radioactive contamination in the environment, (in Russian) Extended abstract of PhD dissertation, Moscow, 2013]

2. **Плотников А. В. , Скрипник Н. В.** Дифференциальные уравнения с «четкой» и нечеткой многозначной правой частью: асимптотические методы: Одесса: Астропринт, 2009. 192 с. [A. V. Plotnikov and N. V. Skripnik, Differential equations with a "crisp" and fuzzy multi-valued right-hand side: asymptotic methods, (in Russian). Odessa: Astroprint, 2009]

3. **Абакумов А. И.** Неопределенность данных в математической экологии, // Дальневосточный математический журнал. 2000, Т. 1, №1. С. 38–42. [A. I. Abakumov, “Indefinite of date on mathematical ecology”, (in Russian) in Far Eastern Mathematical Journal, vol. 1, no. 1, pp. 38-42, 2000]

4. **Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.**. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с. **[** V. F. Zaitsev and A. D. Polyanin, Handbook of ordinary differential equations, (in Russian). Moscow: Fizmatlit, 2001 **]**

5. **Рыжов А. П.** Элементы теории нечетких множеств и ее приложений. М.: Диалог-МГУ, 1998, 116 с. **[** A. P. Ryzhov, Elements of the theory of fuzzy sets and its applications, (in Russian). Moscow: Dialog-MSU, 1998 **]**

6. **Кофман А.** Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982. 432 с. **[** A. Kaufman, Introduction to the theory of fuzzy sets, (in Russian). Moscow: Radio i svyaz, 1992 **]**

7. **Ahmad M. Z., De Baets B**. A predator-prey model with fuzzy initial populations. // Proceeding of the Joint 13th IFSA World Congress and 6th EUSFLAT Conference. 2009. P.1311–1314 **[** Ahmad, M.Z. and De Baets B. “A predator-prey model with fuzzy initial populations,” in *Proceeding of the Joint 13th IFSA World Congress and 6th EUSFLAT Conference* (IFSA-EUSFLAT 2009),2009, pp. 1311-1314**]**

ОБ АВТОРАХ

КУЗНЕЦОВ Денис Вячеславович, маг-т каф. математ., б-р прикл. математ. (УГАТУ, 2016)

ВОДОПЬЯНОВ Владимир Васильевич, проф. каф. математ. Дипл. математика (Казанский гос. ун-т, 1972). Д-р техн. наук по математ. моделированию (УГАТУ, 2008). Иссл. в обл. математ. моделирования биологических систем.

METADATA

Title: About the correctness of the membership functions of solution of differential equations with fuzzy initial data

Authors: D. V. Kuznetsov[1], V. V. Vodopyanov[2]

Affiliation:
Ufa State Aviation Technical University (USATU), Russia.

Email: [1]kuznetsov.denis2495@yandex.ru, [2]vodop@yandex.ru

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 21, no. 1 (75), pp. 167-172, 2017. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: In this paper deals with conditions for the construction of the membership functions of solutions of differential equations with fuzzy initial data. It is shown that previously found in several studies the analytical form of the membership function is valid only in special cases.

Key words: fuzzy differential equations; membership function, mathematical model.

About authors:

KUZNETSOV, Denis Vyacheslavovich, Undergraduate, Dept. of Math. Bachelor of Applied Mathematics (USATU, 2016)

VODOPYANOV, Vladimir Vasilevich, Prof., Dept. of Math. Dipl. Math. (Kazan State Univ., 1972). Dr. of Tech. Sci. (USATU, 2008).