ISSN 1992-6502 (Print)
2016. Т. 20, № 4 (74). С. 92–96
Вестник УГАТУ
ISSN 2225-2789 (Online)
http://journal.ugatu.ac.ru

УДК 531.388

О влиянии диссипативных сил на устойчивость движения гироскопических систем при параметрических возмущениях

Р. Р. Исламов[1], Р. Р. Исламов (мл.) [2]

r.islamov@inbox.ru

[1] ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

[2] ООО «РН-УфаНИПИнефть»

Поступила в редакцию 28.12.2016

Аннотация. Исследуется устойчивость решений определенного класса дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами с учетом диссипации. Для данной системы дифференциальных уравнений установлена теорема о расширении области неустойчивости при наличии малой диссипации в случае комбинационного параметрического резонанса. Полученные результаты иллюстрируются численными расчетами и графиками.

Ключевые слова: параметрический резонанс; устойчивость; диссипация; уравнения движения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе рассматривается линейная модель движения динамической системы с гироскопической структурой при параметрических возмущениях. Линеаризованные дифференциальные уравнения движения таких систем с учетом диссипативных сил можно записать в виде

$$\mathbf{A}\ddot{X} + \mathbf{G}\dot{X} + \mathbf{B}X = \varepsilon\mathbf{D}\dot{X} + \varepsilon\mathbf{M}(\theta t)X, \qquad (1)$$

где $X = \{x_1, \dots, x_{2n}\}$ – вектор, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$ – постоянные диагональные вещественные матрицы:

$$\begin{gathered} \mathbf{A} = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_{2n}), \\ \mathbf{B} = \mathrm{diag}(b_1, \dots, b_{2n}), \\ \mathbf{D} = \mathrm{diag}(-d_1, \dots, -d_{2n}) \\ a_k > 0,\ b_k > 0, d_k > 0 \quad (k = 1, \dots, 2n); \end{gathered} \qquad (2)$$

$\mathbf{G}$ – постоянная кососимметрическая матрица вида

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & H_1 & \dots & 0 & 0 \\ -H_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -H_{2n-1} \\ 0 & 0 & 0 & -H_{2n-1} & 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

$$H_{2m-1} > 0, \qquad (m = 1, 2, \dots, n);$$

$\mathbf{M}(\theta t)$ – вещественная симметрическая периодическая $2n \times 2n$ матрица с периодом $T = 2\pi\theta^{-1}$, элементы матрицы представимы в виде

$$\begin{gathered} \mathbf{M}(\theta t) = \left\| \kappa_{rs}(\theta t) \right\|_1^{2n}, \\ \kappa_{rs}(\theta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \kappa_{rs}^{(k)} e^{ik\theta t}. \end{gathered} \qquad (4)$$

Системой типа (1) описывается линеаризованные дифференциальные уравнения движения гиромаятника, четырехгироскопной вертикали, однороторного гирокомпаса при линейных вибрациях основания с учетом сил трения в осях подвесов.

Целью данной работы является изучение влияния малых диссипативных сил в случае простого и комбинационного параметрического резонанса для систем с гироскопическим членом $\mathbf{G}\dot{X}$. Влияние диссипативных сил при параметрическом резонансе для гироскопических систем мало изучено.

Так, данная задача без учета гироскопических членов $\mathbf{G}\dot{X}$ рассмотрена в работе К. Г. Валеева [1]. В данной работе для систем вида (1) получены новые результаты о расширении области неустойчивости при комбинационном параметрическом резонансе.

2. НАХОЖДЕНИЕ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТЕЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Приведем дифференциальные уравнения (1) на основании работы [2] к специальной форме:

$$\ddot{Y} + \varepsilon\mathbf{N}(\theta t)\dot{Y} + \left(\mathbf{C} + \varepsilon\mathbf{P}(\theta t)\right)Y = 0, \quad (5)$$

где $Y = \{y_1, \ldots, y_{2n}\}$ – вектор;

$$\mathbf{C} = \mathrm{diag}\left(\omega_1^2, \ldots, \omega_{2n}^2\right);$$
$$\left(\omega_s^2 > 0, \quad s = 1, \ldots, 2n\right);$$
$$\mathbf{N}(\tau + 2\pi) \equiv \mathbf{N}(\tau);\ \mathbf{N}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbf{N}_k e^{ik\tau};$$
$$\mathbf{N}_k = \left\|\nu_{js}^{(k)}\right\|_1^{2n},$$
$$\mathbf{P}(\tau + 2\pi) \equiv \mathbf{P}(\tau);\ \mathbf{P}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbf{P}_k e^{ik\tau}; \qquad (6)$$
$$\mathbf{P}_k = \left\|\pi_{js}^{(k)}\right\|_1^{2n},$$
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|k\mathbf{N}_k\right| < \infty; \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\mathbf{P}_k\right| < \infty;$$
$$\left(j,\ s = 1, \ldots, 2n\right).$$

Здесь элементы матриц $\mathbf{N}(\theta t)$ и $\mathbf{P}(\theta t)$ выражаются через элементы матриц $\mathbf{D}$, $\mathbf{M}(\theta t)$ исходной системы (1).

Найдем в первом приближении области неустойчивости для системы (5) в случае параметрического резонанса с учетом диссипативных сил. Все результаты для системы (5), будет распространяться на систему (1), так как они эквивалентны с точностью до $O(\varepsilon^2)$.

Параметрический резонанс в системе (5) возможен при критических значениях частоты θ, определяемых из равенств [1]

$$\theta_0 = \theta_{\gamma,l,m} = \frac{\omega_l + \omega_m}{\gamma}$$
$$\theta_0^* = \theta_{\gamma,l,m}^* = \frac{\left|\omega_l - \omega_m\right|}{\gamma} \qquad (7)$$
$$(\omega_l \geq \omega_m > 0; l, m = 1, \ldots, 2n; \gamma = 1, 2, \ldots)$$

Если $l = m$, то имеет место простой (основной) резонанс, при $l \neq m$ – комбинационный резонанс. Частоты θ_0, θ_0^* (7) будем называть сопряженными. В дальнейшем предполагается, что равенство (7) для данных θ_0 и θ_0^* выполняется лишь при единственном наборе номеров γ, l, m.

Границы областей неустойчивости $\theta_- < \theta < \theta_+$ для системы (5) на плоскости параметров ε, θ в первом приближении [1] будут

$$\theta_{\pm} = \theta_0 + \varepsilon\lambda_{\pm},\ \theta_0 = \frac{\omega_l + \omega_m}{\gamma}. \qquad (8)$$

Здесь коэффициенты выражения λ_+, λ_- для системы (5) без трения $\nu_{ss}^{(0)} = 0$ и с трением $\nu_{ss}^{(0)} \neq 0$ $(s = 1, \ldots, 2n)$ имеют вид [1]

$$\lambda_{\pm} = \pm\frac{\sqrt{g(l,m)}}{\gamma}, \qquad (9)$$

и

$$\lambda_{\pm} = \pm\frac{\alpha(l,m)}{2\gamma}\left(\sqrt{g(l,m) - \nu_{ll}^{(0)}\nu_{mm}^{(0)}}\right), \quad (10)$$

где

$$\alpha(l,m) = \frac{\nu_{ll}^{(0)} + \nu_{mm}^{(0)}}{\sqrt{\nu_{ll}^{(0)}\nu_{mm}^{(0)}}},$$
$$g(l,m) = \left(\frac{\pi_{ml}^{(-\gamma)}}{\omega_l} + i\nu_{ml}^{(-\gamma)}\right)\left(\frac{\pi_{lm}^{(\gamma)}}{\omega_m} - i\nu_{lm}^{(\gamma)}\right), \quad (11)$$
$$\left(l, m = 1, \ldots, 2n;\quad \gamma = 1, 2, \ldots; i = \sqrt{-1}\right).$$

Здесь величины $\pi_{js}^{(k)}, \nu_{js}^{(k)}$ определяются из равенств (6).

При простом резонансе $l = m = s$, тогда из формулы (10) находим значения для λ_+ и λ_-

$$\lambda_{\pm} = \pm\frac{1}{\gamma}\left(\sqrt{g(s,s) - \left(\nu_{ss}^{(0)}\right)^2}\right). \qquad (12)$$

3. О РАСШИРЕНИИ ГРАНИЦ ОБЛАСТИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРИ КОМБИНАЦИОННЫХ РЕЗОНАНСАХ

Перейдем к вопросу о влиянии малых диссипативных сил при параметрическом резонансе. Из анализа формул (9) и (10), замечаем, что расширение области неустойчивости возможно за счет изменения соотношения между $\nu_{ll}^{(0)}$ и $\nu_{mm}^{(0)}$ и только при комбинационном резонансе. При этом величина $\alpha(l,m)$ (11) может быть сколь угодно большой. Предварительно найдем квадраты собственных частот системы (1) при $\varepsilon = 0$. Они выражаются формулами

$$\omega_{2s-1,2s}^2 = \frac{H_{2s-1}^2}{2a_{2s-1}a_{2s}}\left(1 + \mu_{2s-1} + \mu_{2s} \pm \pm\sqrt{\left(1 + \mu_{2s-1} + \mu_{2s}\right)^2 - 4\mu_{2s-1}\mu_{2s}}\right), \quad (13)$$

где введены безразмерные параметры

$$\mu_{2s-1} = \frac{b_{2s-1}a_{2s}}{H_{2s-1}^2},$$

$$\mu_{2s} = \frac{b_{2s}a_{2s-1}}{H_{2s-1}^2}, \tag{14}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n).$$

Здесь H_{2s-1} – кинетический момент ротора гироскопа, $a_k, b_k \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n)$ – элементы матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ (2). Для быстровращающихся гироскопов выполняются условия

$$\mu_{2s-1} << 1; \qquad \mu_{2s} << 1, \tag{15}$$

так как при этом H_{2s-1} – большая величина.

Частоты ω_{2s-1} и ω_{2s} $(s = 1, 2, \ldots, n)$ будем называть частотами нутационных и прецессионных колебаний. Для частоты ω_{2s-1} в формуле (13) перед корнем следует взять знак «+». Для быстровращающихся гироскопов имеют место соотношения

$$\omega_{2s} << \omega_{2s-1} \quad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{16}$$

Используя формулы работы [2], преобразующие уравнения (1) к нормальным координатам, затем приводя полученные уравнения к специальному виду (5), найдем выражение для элементов $\nu_{ss}^{(0)}$ матрицы $\mathbf{N}(\theta t)$:

$$\nu_{2j-1,2j-1}^{(0)} = \frac{d_{2j-1}}{a_{2j-1}}\left(1 - \mu_{2j}\right) + \frac{d_{2j}}{a_{2j}}\left(1 - \mu_{2j-1}\right) + O(\mu_{2j-1,2j}^2), \tag{17}$$

$$\nu_{2h,2h}^{(0)} = \mu_{2h}\frac{d_{2h-1}}{a_{2h-1}} + \mu_{2h-1}\frac{d_{2h}}{a_{2h}} + O(\mu_{2h-1,2h}^2),$$

где d_k – элементы матрицы $\mathbf{D}$ (2), являющиеся коэффициентами трения в уравнении (1).

Учитывая, что $\mu_k << 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$ (15), из выражений (17) находим

$$\nu_{2h,2h}^{(0)} << \nu_{2j-1,2j-1}^{(0)} \ (h, j = 1, \ldots, n). \tag{18}$$

Соотношение (18) выполняется для быстровращающихся гироскопов.

Так как величина $\lambda_\pm$ означает угловой коэффициент касательной, проведенной к границе области неустойчивости в точке $(0, \theta_0)$ на плоскости ε, θ, то на основании формул (9), (10), (12) заключаем, что расширение области неустойчивости может происходить только на комбинационной частоте при наличии в системе достаточно малого трения и при выполнении определенного условия. А именно:

$$\frac{\alpha(l,m)}{2\gamma}\left(\sqrt{g(l,m) - \nu_{ll}^{(0)}\nu_{mm}^{(0)}}\right) > \frac{\sqrt{g(l,m)}}{\gamma}, \tag{19}$$

и

$$g(l,m) > \nu_{ll}^{(0)}\nu_{mm}^{(0)} \qquad \left(\nu_{ll}^{(0)} > 0, \nu_{mm}^{(0)} > 0\right). \tag{20}$$

В статье [3] даны формулы для $g(l,m)$ (11), выраженные через элементы матрицы исходной системы. Как показано в работе [3], величина $g(l,m)$ всегда положительна для частот вида $\theta_0 = \gamma^{-1}(\omega_l + \omega_m)$ в случае симметрической вещественной матрицы $\mathbf{M}(\theta t)$. Учитывая равенство (11), неравенства (19) приводим к виду

$$g(l,m) > \nu_{ll}^{(0)}\nu_{mm}^{(0)}\frac{\left(\nu_{ll}^{(0)} + \nu_{mm}^{(0)}\right)^2}{\left(\nu_{ll}^{(0)} - \nu_{mm}^{(0)}\right)^2}, \quad \left(\nu_{ll}^{(0)} \neq \nu_{mm}^{(0)} > 0\right). \tag{21}$$

Если выполняется неравенство (21), то выполняется неравенство (20).

В данной работе устойчивость (неустойчивость) решений дифференциальных уравнений определяется по Ляпунову.

Введем понятие сильно неустойчивой частоты θ_0.

Определение. Частоту θ_0 будем называть сильно неустойчивой, если при произвольных, но достаточно мало измененных матрицах $N_1(\theta\, t)$, $P_1(\theta\, t)$ и удовлетворяющих неравенствам

$$\left|N(\theta t) - N_1(\theta t)\right| < \varepsilon,$$

$$\left|M(\theta t) - M_1(\theta t)\right| < \varepsilon \ (-\infty < t < \infty)$$

и оставляющих систему (5) в том же классе, что при любых $\varepsilon > 0, \delta > 0$ найдутся числа θ и μ, удовлетворяющих условию $|\theta - \theta_0| < \delta$, $0 \le \mu < \delta$, при которых решения системы (5) будут неустойчивы, где ε, δ – некоторые положительные числа.

На основании формул (8), (9) и неравенства (21), приходим к утверждению.

Теорема.

Если в системе (1) с положительно определенными диагональными матрицами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, кососимметрической матрицей $\mathbf{G}$ комбинационная частота $\theta_0 = \gamma^{-1}(\omega_l + \omega_m)$ $(l, m = 1, \ldots, 2n;\ l \neq m;\ \gamma = 1, 2, \ldots)$ является сильно неустойчивой $\left(g(l,m) > 0\right)$, то введение в систему малого трения при условии (21) приводит к расширению области неустойчивости.

Замечание. Особую опасность представляет параметрический резонанс в гироскопических системах для комбинационных частот $\theta_0 = \gamma^{-1}\left(\omega_{2j-1} + \omega_{2h}\right)$ $(j, h = 1, \ldots, n; \quad \gamma = 1, 2, \ldots)$ при наличии в системе малого трения, где ω_{2j-1} и ω_{2h} – частоты нутационных и прецессионных колебаний (13). Это следует из того, что в формуле (10) величина

$$\alpha(2j-1, 2h) = \frac{\nu^{(0)}_{2j-1,2j-1} + \nu^{(0)}_{2h,2h}}{\sqrt{\nu^{(0)}_{2j-1,2j-1}\nu^{(0)}_{2h,2h}}}$$

при условии (18) принимает достаточно большие значения, а именно

$\alpha(2j-1, 2h) \approx \sqrt{\dfrac{\nu^{(0)}_{2j-1,2j-1}}{\nu^{(0)}_{2h,2h}}} >> 1$, так как из (18) имеем $\nu^{(0)}_{2h,2h} << \nu^{(0)}_{2j-1,2j-1}$.

Это явление не имеет места в случае простого резонанса.

Итак, получен важный результат о расширении области неустойчивости в случае параметрического комбинационного резонанса при наличии в системе с гироскопической структурой достаточно малого трения. Найдены условия, при которых это явление имеет место. В нелинейной постановке решена задача о комбинационном параметрическом резонансе для гиромаятника при вибрации основания методом интегральных многообразий в специальной форме, разработанного Р. Р. Исламовым в работе [4]. Найдены условия существования стационарного решения и условия устойчивости нулевого решения системы.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть динамическая система описывается уравнениями вида

$$\begin{cases} a_1\ddot{q}_1 + H_1\dot{q}_2 + b_1 q_1 = \varepsilon\,\kappa_{11}\cos(\theta t)q_1 - \varepsilon d_{11}\dot{q}_1, \\ a_2\ddot{q}_2 - H_1\dot{q}_1 + b_2 q_2 = \varepsilon\,\kappa_{22}\cos(\theta t)q_2 - \varepsilon d_{22}\dot{q}_2. \end{cases} \quad (22)$$

Ниже на рис. 1, 2 приведены результаты численного нахождения границ области неустойчивости уравнения при значениях параметров $a_1 = 4$, $a_2 = 1$, $b_1 = b_2 = 1$, $H_1 = 9$, и диагональной матрице возмущений $\kappa_{11} = \kappa_{22} = 1$ и наличии трения $d_{11} = d_{22} = 0{,}01$ и в случае отсутствия трения $d_{11} = d_{22} = 0$. Критические частоты колебаний системы равны $\theta_0 = 2\omega_1 = 4{,}6$; $\theta_0 = 2\omega_2 = 0{,}11$, $\theta_0 = \omega_1 + \omega_2 = 2{,}35$.

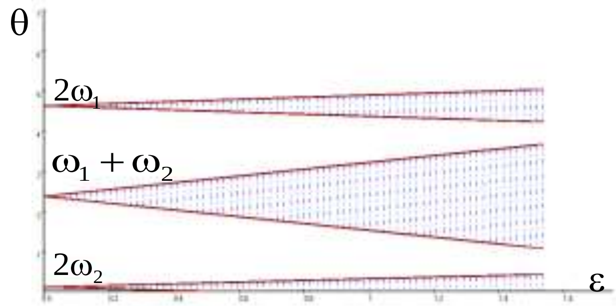

Рис. 1. Границы области неустойчивости для системы с трением

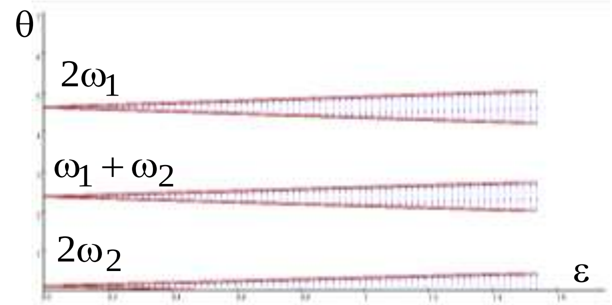

Рис. 2. Границы области неустойчивости для системы без трения

Как видно из рис. 1 и 2, введение трения расширяет границы области неустойчивости для комбинационного резонанса на частоте $\theta_0 = \omega_1 + \omega_2$.

Для рассмотренной системы выполняется критерий расширения границ области неустойчивости (21)

$$g(1,2) > \nu^{(0)}_{11}\nu^{(0)}_{22}\frac{\left(\nu^{(0)}_{11} + \nu^{(0)}_{22}\right)^2}{\left(\nu^{(0)}_{11} - \nu^{(0)}_{22}\right)^2} \quad (23)$$

на комбинационной частоте $\theta_0 = \omega_1 + \omega_2$ при $l = 1, m = 2, \gamma = 1$. Действительно, поскольку $\nu^{(0)}_{11} = 0{,}01225$, $\nu^{(0)}_{22} = 0{,}00025$, $g(1,2) = 0{,}04939$, то, подставляя эти значения в неравенство (23), имеем $0{,}04939 > 3{,}279 \cdot 10^{-6}$. Неравенство верно, следовательно, критерий расширения границ области неустойчивости выполняется.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для динамических систем с гироскопической структурой получен результат о расширении области неустойчивости в случае комбинационного параметрического резонанса, при наличии в системе трения.

Значимость этого результата обусловлена тем, что в реальных системах всегда имеет место трение. На возможность расширения области неустойчивости для систем без гироскопов указано в работах [1, 5, 6].

Найдены соотношения, при которых происходит расширение границы области неустойчивости на плоскости параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Валеев К. Г.** Об опасности комбинационных резонансов. // ПММ. 1963. Т. 27, № 23. С. 1134–1142. **[** K.G. Valeev, “About dangers of combination resonance”, (in Russian), in *PMM*, vol. 27, no. 23, pp. 1134-1142, 1963. **]**

2. **Булгаков Б. В.** О нормальных координатах. // ПММ. 1946. Т. 10, № 2. С. 655–667. **[** B.G. Bulgakov, “About normal coordinates”, (in Russian), in *PMM*, vol. 10, no. 2, pp. 655-667, 1946. **]**

3. **Исламов Р. Р., Исламов Р. Р.**, (мл.). Исследование устойчивости решений дифференциальных уравнений при параметрических возмущениях // Вестник УГАТУ. 2005. Т.6, №2 (13). С. 40–44. **[** R.R. Islamov, R.R. islamov (jr.), “Investigating stability of differential equations solution under parametric resonance”, (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 6, no. 2 (13), pp. 40-44, 2005. **]**

4. **Исламов Р. Р.** Асимптотическое моделирование неавтономных квазилинейных систем с помощью интегральных многообразий в резонансных случаях // Вестник УГАТУ. 2009. Т.12, №1 (30) С. 166–171. **[** R.R. Islamov, “Asymptotic modeling of nonautonomous quasi-linear systems with integral manifolds in case of resonance”, (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 12, no. 1 (30), pp. 166-171, 2009. **]**

5. **Якубович В. А., Старжинский В. М.** Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. **[** V.A. Yakubovich, V. M. Starzhinskiy, “Linear differential equations with periodical coefficients and their applications”, (in Russian). Moscow: Nauka, 2009. **]**

6. **Schmidt G., Weidenhammer F.** Instabilitäten gedämpfter rheclinearer Schwingungen. // Mith. Nachrichten, 1961. №. 23. H. 4–5. **[** G. Schmidt, F. Weidenhammer, “Instabilitäten gedämpfter rheclinearer Schwingungen”, (in German). Mith. Nachrichten, 1961, pp. 4-5. **]**

ОБ АВТОРАХ

ИСЛАМОВ Роберт Рахимович, доц. каф. матем. Дипл. инж.-мех. (УАИ, 1966). Канд. физ.-мат. наук по диф. и интегр. уравнениям. (защ. в Ин-те мат. АН УССР, 1973). Иссл. в обл. устойчивости решений обык. диф. уравнений.

ИСЛАМОВ Ринат Робертович. Дипл. инж. по выч. машинам, комплексам, системам и сетям (УГАТУ, 2004). Канд. физ.-мат. наук (УГАТУ, 2007). Иссл. в обл. диф. уравнений, мат. моделирования дин. систем.

METADATA

Title: Effect of dissipative forces on the **s**tability of gyroscopic systems under parametric disturbance

Authors: R. R. Islamov and R. R. Islamov (jr.).

Affiliation:

[1] Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

[2] LLC “RN-UfaNIPIneft”, Russia.

Email: [1,2] r.islamov@inbox.ru

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 20, no. 4 (74), pp. 92-96 2016. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: Solutions stability for restricted class of differential equations with periodical coefficients and dissipation effect is analyzed. Theorem about expansion of unstable region of solutions in case of parametric combination resonance and dissipation forces is found.

Key words: Parametric resonance; stability; equation of motion; dissipation forces.

About authors:

ISLAMOV, Robert Rahimovich, Assistant Professor, Dept. of Mathematics. Dipl. Mechanist (Ufa Aviation Inst., 1966). Cand. of Phis.-Math. Sci. (KIIGA Kiev Institute Engineers of Civil Aviation, 1973).

ISLAMOV, Rinat Robertovich. Dipl. IT Engineer (UGATU, 2004). Cand. of Tech. Sci. (UGATU, 2007).