УДК 629.78, 51-74
DOI 10.54708/19926502_2022_2639714
ISSN 1992-6502 (Print)
ISSN 2225-2789 (Online)

THE METHOD OF STATISTICAL SYNTHESIS OF THE LYAPUNOV FUNCTION FOR THE STUDY OF THE STABILITY OF AN ARTIFICIAL EARTH SATELLITE

I. D. Borodin

Moscow Aviation Institute (MAI)
iibbdd51@gmail.com
Submitted 2022, May 8

Abstract. The purpose of this work is to develop a method for constructing the Lyapunov function for systems of ordinary differential equations, which reduce many problems of studying the stability of spacecraft, in particular artificial Earth satellites. Stability is considered in relation to constantly operating uncontrolled factors. The proposed method of statistical construction of the Lyapunov function has been tested on the system of equations of motion of the spacecraft – satellite "Condor-E". The obtained result is confirmed by comparison with results of studies obtained by other, more complex methods.

Keywords: satellite; Condor-E; dynamic stability; uncontrolled factors; statistical synthesis; Lyapunov function.

МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ

И. Д. Бородин

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (МАИ)»
iibbdd51@gmail.com
Поступила в редакцию 8.05.2022

Аннотация. Целью настоящей работы является разработка метода построения функции Ляпунова для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым сводятся многие задачи исследования устойчивости космических аппаратов, в частности искусственных спутников Земли. Устойчивость рассматривается по отношению к постоянно действующим неконтролируемым факторам. Предлагаемый метод статистического построения функции Ляпунова апробирован на системе уравнений движения космического аппарата – спутника «Кондор-Э». Полученный результат подтверждается сравнением с результатами исследований, полученными другими, более сложными методами.

Ключевые слова: космический аппарат; спутник; Кондор-Э; динамическая устойчивость; неконтролируемые факторы; статистический синтез; функция Ляпунова.

ВВЕДЕНИЕ

Исследованию устойчивости движения космических аппаратов (КА) типа искусственного спутника Земли (ИСЗ) в последние годы уделяется большое внимание. Безусловно, важными при разработке новых образцов КА являются такие вопросы, как устойчивость движения и способы достижения необходимой устойчивости. Особую значимость имеет проблема выбора проектных решений, устойчивых к возмущающим факторам. Анализ работ [1–7] показывает актуальность проблемы выбора устойчивых режимов движения, а также актуальность разработки методов выбора проектных параметров, при применении которых будет обеспечиваться устойчивость КА.

Существует целый ряд методов исследования устойчивости КА, однако наиболее удобным и распространенным является метод функции Ляпунова, хотя этот метод не совершенен и имеет ряд недостатков. Основным недостатком метода исследования функции Ляпунова является то, что в общем случае функцию Ляпунова необходимо «угадывать». Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости является и поныне основным для исследования устойчивости динамических систем, таких как КА. Надо принять во внимание, что составление функции Ляпунова не связано напрямую со структурными особенностями исследуемого КА, и поэтому до сих пор нет исчерпывающих регулярных методов ее построения по заданным уравнениям движения КА.

В работе [5] рассматривается задача о положениях относительного равновесия спутников и изучается устойчивость в вековом смысле положений равновесия спутников. В работе [7] предложен метод определения всех положений равновесия (равновесных ориентаций) спутника в орбитальной системе координат при заданных значениях вектора аэродинамического момента и главных центральных моментов инерции. В работе [8] представлены некоторые методы построения функций Ляпунова для различных типов дифференциальных уравнений, в работе [9] получено обобщение известной функции Ляпунова «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности». В работе [10] было показано, что любое движение можно рассматривать как управляемое, а с управляемым движением связана взаимно однозначным образом пилотная функция, которая определяет направление движения, наилучшее в естественной метрике управляемой системы. Следовательно, пилотная функция является «идеальной» функцией Ляпунова динамической системы в окрестности ее положения равновесия. Так как определение пилотной функции сложной динамической системы на больших расстояниях от ее положения равновесия является трудной задачей, то в [11] критерии устойчивости сводятся к кусочно-локальному построению простого «эталонного» движения с известной пилотной функцией, структурно эквивалентной исследуемому движению.

Существенным фактором в задачах устойчивости систем, создающим много сложностей, является фактор «дефицита размерности управления», когда размерность вектора управления меньше размерности вектора состояния управляемой системы. Дефицит в размерности управления может быть частично устранен добавлением в контур обеспечения устойчивости КА, наряду с выбором управления, выбора проектных параметров. В целом, решение многих проблем обеспечения устойчивости достигается при выборе проектного решения, представляющего собой совокупность проектных параметров и функций управления.

Особенность данной работы состоит в том, что здесь функция Ляпунова строится в классе квадратичных функций, где линейные и нелинейные параметры определяются по специально разработанному статистическому критерию. Решение задачи исследования устойчивости КА позволяет ответить на вопрос о свойствах устойчивости аппарата.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений, записанная в векторном виде:

$$\dot{x} = f\left(x\right), \tag{1}$$

где x – вектор фазовых координат системы, $x = (x_1,..., x_k) \in R^k$, R^k – k-мерное евклидово пространство.

Начальные условия задаются вектором $x_0 = (x_{1_0},...,x_{k_0})$, определяющим начальное состояние в пространстве.

Предполагается, что f достаточно гладкая вектор-функция, чтобы гарантировать существование, единственность и непрерывную зависимость решений задачи Коши от начальных условий.

Для случая действующих возмущений систему обыкновенных дифференциальных уравнений можно записать в виде:

$$\dot{x} = f(x,\omega), \tag{2}$$

где ω – вектор возмущающих факторов, $\omega \in W \subset R^m$. Предполагается, что вектор ω действует на систему (2) в начальный момент времени.

На правую часть системы (2) накладываются следующие условия [8, 12]:

1. Функция $f(x, \omega)$ принадлежат классу C_R^k – k раз дифференцируемых по x функций на области $R = \left\{x : \|x\| < H, H \in R^+\right\}$, здесь по определению:

$$\|x\| = \max\left\{|x_1|,...,|x_k|\right\},$$

$$|x| = \sqrt{\sum_{s=1}^{k} x_S^2}$$

– соответственно чебышевская и евклидова нормы вектора x;

2. Функция $f(x, \omega)$ имеет ограниченные частные производные по x на области R;

3. Функция $f(x, \omega)$ и ее производная по t – функция $\dot{f}(x,\omega)$ тождественно равна нулю на T только при $x = 0$, где $T = [t_0; \infty)$.

Если условия 1, 2, 3 имеют место, то условия Липшица заведомо выполнены и, следовательно, существует единственная траектория системы (2), проходящая в момент времени t_0 через точку x_0. Любое частное решение $\tilde{x}(t) = const$ называется равновесным состоянием системы (2).

Решение $x = 0$ системы (1) называется устойчивым (по начальным данным), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при всех $t \ge t_0$, $|x(t,t_0,x_0)| \le \varepsilon$, если только $|x_0| < \delta(\varepsilon,t_0)$. В противном случае решение $x = 0$ – неустойчивое [12].

Система (2) называется устойчивой по отношению к внешним воздействиям, если она имеет единственное равновесное состояние $x = 0$ и при любых ограниченных $\omega \in W$ и нулевом начальном условии решение возмущенной системы (2) остается ограниченным при условии $t > t_0$ [12].

Пусть существует дифференцируемая скалярная функция $\upsilon(x)$ переменных состояний системы (2), обладающая при условии $|x_S| \le H$, ($s = 1,...,k$) следующими свойствами:

$$\begin{gathered} \upsilon(x) > 0; \\ \dot{\upsilon}(x) = \frac{d\upsilon(x)}{dt} = \left(\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right)^T \frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right)^T f(x,\omega) \le 0, \end{gathered} \tag{3}$$

тогда состояние равновесия системы (2) является устойчивым (по начальным данным).

Задача состоит в определении функции $\upsilon(x)$, при возмущениях $\omega \in W$, при удовлетворении условий (3). Представим функцию $\upsilon(x)$ в виде квадратичной формы:

$$\upsilon(x)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}b_{ij}x_j x_i, \tag{4}$$

где b_{ij}, $i=\overline{1,k}$, $j=\overline{1,k}$ – коэффициенты, подлежащие выбору из условия удовлетворения неравенствам (3).

Статистика для формирования функции Ляпунова набирается по результатам интегрирования системы (2) L-ого количества раз. В табл. 1, в n-ой строке указаны моменты времени t_n, $n=\overline{1,N}$, фазовые координаты $(x_1, x_2,..., x_k)_n$, значения функции Ляпунова $\upsilon_n(x)$, значения производной $\dot{\upsilon}_n(x)$. Моменты времени заданы с шагом интегрирования Δt.

Для каждой строчки табл. 1 запишем условия устойчивости системы (2): $\upsilon_n(x) > 0$, $\dot{\upsilon}_n(x) \le 0$, $n=\overline{1,N}$. Эти условия можно записать в виде:

$$h_n=\begin{cases}0, \text{ если } \upsilon_n(x)>0 \text{ и } \dot{\upsilon}_n(x)\le 0\\ 1, \text{ в остальных случаях}\end{cases}. \tag{5}$$

Таблица 1. Общий вид статистической выборки функции Ляпунова и ее производной

№ п/п	$(\omega_1,..., \omega_m)$	b_{ij}	t	$(x_1, x_2,..., x_k)$	$\upsilon(x)$	$\dot{\upsilon}(x)$	h	$J_{ст}(x, \omega, b)$
			t_{1_1}	$(x_1, x_2,..., x_k)_{1_1}$	$\upsilon_{1_1}(x)$	$\dot{\upsilon}_{1_1}(x)$	h_{1_1}	
			t_{2_1}	$(x_1, x_2,..., x_k)_{2_1}$	$\upsilon_{2_1}(x)$	$\dot{\upsilon}_{2_1}(x)$	h_{2_1}	
			…	…	…	…	…	
1	$(\omega_1,..., \omega_m)_1$	$(b_{ij})_1$	t_{n_1}	$(x_1, x_2,..., x_k)_{n_1}$	$\upsilon_{n_1}(x)$	$\dot{\upsilon}_{n_1}(x)$	h_{n_1}	$J_{ст_1}(x, \omega, b)$
			…	…	…	…	…	
			t_{N_1}	$(x_1, x_2,..., x_k)_{N_1}$	$\upsilon_{N_1}(x)$	$\dot{\upsilon}_{N_1}(x)$	h_{N_1}	
			t_{1_2}	$(x_1, x_2,..., x_k)_{1_2}$	$\upsilon_{1_2}(x)$	$\dot{\upsilon}_{1_2}(x)$	h_{1_2}	
			t_{2_2}	$(x_1, x_2,..., x_k)_{2_2}$	$\upsilon_{2_2}(x)$	$\dot{\upsilon}_{2_2}(x)$	h_{2_2}	
			…	…	…	…	…	
2	$(\omega_1,..., \omega_m)_2$	$(b_{ij})_2$	t_{n_2}	$(x_1, x_2,..., x_k)_{n_2}$	$\upsilon_{n_2}(x)$	$\dot{\upsilon}_{n_2}(x)$	h_{n_2}	$J_{ст_2}(x, \omega, b)$
			…	…	…	…	…	
			t_{N_2}	$(x_1, x_2,..., x_k)_{N_2}$	$\upsilon_{N_2}(x)$	$\dot{\upsilon}_{N_2}(x)$	h_{N_2}	
…	…	…	…	…	…	…	…	…
			t_{1_l}	$(x_1, x_2,..., x_k)_{1_l}$	$\upsilon_{1_l}(x)$	$\dot{\upsilon}_{1_l}(x)$	h_{1_l}	
			t_{2_l}	$(x_1, x_2,..., x_k)_{2_l}$	$\upsilon_{2_l}(x)$	$\dot{\upsilon}_{2_l}(x)$	h_{2_l}	
			…	…	…	…	…	
l	$(\omega_1,..., \omega_m)_l$	$(b_{ij})_l$	t_{n_l}	$(x_1, x_2,..., x_k)_{n_l}$	$\upsilon_{n_l}(x)$	$\dot{\upsilon}_{n_l}(x)$	h_{n_l}	$J_{ст_l}(x, \omega, b)$
			…	…	…	…	…	
			t_{N_l}	$(x_1, x_2,..., x_k)_{N_l}$	$\upsilon_{N_l}(x)$	$\dot{\upsilon}_{N_l}(x)$	h_{N_l}	
…	…	…	…	…	…	…	…	…
			t_{1_L}	$(x_1, x_2,..., x_k)_{1_L}$	$\upsilon_{1_L}(x)$	$\dot{\upsilon}_{1_L}(x)$	h_{1_L}	
			t_{2_L}	$(x_1, x_2,..., x_k)_{2_L}$	$\upsilon_{2_L}(x)$	$\dot{\upsilon}_{2_L}(x)$	h_{2_L}	
			…	…	…	…	…	
L	$(\omega_1,..., \omega_m)_L$	$(b_{ij})_L$	t_{n_L}	$(x_1, x_2,..., x_k)_{n_L}$	$\upsilon_{n_L}(x)$	$\dot{\upsilon}_{n_L}(x)$	h_{n_L}	$J_{ст_L}(x, \omega, b)$
			…	…	…	…	…	
			t_{N_L}	$(x_1, x_2,..., x_k)_{N_L}$	$\upsilon_{N_L}(x)$	$\dot{\upsilon}_{N_L}(x)$	h_{N_L}	

Так как начальные условия для уравнения (2) не являются фиксированными, то для характеристической функции h_n необходимо брать математическое ожидание $M[h_n]$.

Распространим это требование на весь объем выборки N, и запишем окончательный вид статистического показателя устойчивости:

$$J_{\text{ст}} = \sum_{n=1}^{N} M[h_n]. \tag{6}$$

Статистическая выборка объема N строится по результатам интегрирования системы (2). Требуется построить функцию Ляпунова в виде квадратичной формы (4), где коэффициенты b_{ij} получаются при минимизации статистического показателя устойчивости вида (6).

МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Метод статистического синтеза применяется для восстановления функциональных зависимостей по статистическим данным [13, 14]. Статистическая выборка состоит из входных, промежуточных и выходных столбцов. Общий вид такой выборки представлен в табл. 1.

В табл. 1 имеется два входных столбца: вектор неконтролируемых факторов ($\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$) и коэффициенты функции Ляпунова b_{ij}, один промежуточный столбец, состоящий из характеристических функций h; и один выходной столбец, состоящий из показателей $J_{\text{ст}}(x, \omega, b)$. Характеристическая функция h описывает те свойства, которые необходимо отразить в восстанавливаемой зависимости, данный столбец предназначен для расчета различных ограничений и условий. Такими условиями в предлагаемом методе являются условия положительности функции Ляпунова и отрицательности производной от функции Ляпунова по времени.

Статистический синтез основывается на трех базовых элементах: статистической выборке, базисных функциях, статистических показателях. В качестве базисной функции в рассматриваемом методе принята квадратичная форма (4), в качестве статистического показателя принимается показатель устойчивости (6).

Статистическая выборка из табл. 1 строится в соответствии с процессом минимизации показателя (6). Каждая l-ая строка табл. 1 соответствует l-ому поисковому шагу, на котором задаются варьируемые коэффициенты b_{ij} и вектор неконтролируемых факторов ω, по которым вычисляется показатель (6). Таким образом, если система дифференциальных уравнений устойчива в любой момент времени $t > t_0$, глобальный минимум показателя (6) равен нулю. Решается следующая задача минимизации:

$$J_{\text{ст}}^{\text{опт}} = \min_{b_{ij},\, i=\overline{1,k},\, j=\overline{1,k}} \sum_{n=1}^{N} M[h_n]. \tag{7}$$

Для построения функции Ляпунова в окончательном виде необходимо найти оптимальные коэффициенты b_{ij}, которые находятся из решения задачи (7). Оптимальные коэффициенты $(b_{ij})_L$ и оптимальное значение показателя $J_{\text{ст}_L}(x, \omega, b) = J_{\text{ст}}^{\text{опт}}$ получаются на L-ом поисковом шаге.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА «КОНДОР-Э»

Исследуем устойчивость движения КА дистанционного зондирования Земли, представленного спутником «Кондор-Э». Данный спутник предназначен для получения, хранения и передачи на наземные пункты приема и обработки высокодетальной информации дистанционного зондирования Земли в микроволновом диапазоне спектра электромагнитного излучения [15]. Характеристики спутника приведены в табл. 2.

Предположим, что траектория спутника в гравитационном поле Земли первоначально будет близка к окружности. Ускорение спутника зависит от массы спутника и коэффициента лобового сопротивления. Дифференциальные уравнения такого движения в полярной системе координат имеют следующий вид [16, 17]:

$$\begin{gathered}\dot{\xi} = rw^2 - \frac{a}{r^2} - c\xi V \\ \dot{r} = \xi \\ \dot{V} = -\frac{a\xi}{Vr^2} - cV^2 \\ \dot{w} = -\frac{2\xi w}{r} - cVw\end{gathered}, \qquad (8)$$

где ξ – скорость спутника в направлении радиуса-вектора; r – радиус-вектор (расстояние от центра Земли до спутника); w – угловая скорость радиус-вектора; V – линейная скорость спутника, $a = g_0 R_\oplus^2$, $g_0 = 9{,}81$ м/с^2 – ускорение силы тяжести; $R_\oplus = 6371$ км – средний радиус Земли; c – эксцентриситет.

Таблица 2. Характеристики спутника «Кондор-Э»

Наименование	Величина
Масса, кг	1150
Срок активного существования, лет	5
Наклонение орбиты, град	98
Период обращения, мин	94,64
Апоцентр, км	523,8
Перицентр, км	500,9

Уравнения (8) показывают связь между ускорением спутника в направлении радиуса-вектора $\dot{\xi}$, скоростью спутника в направлении радиуса-вектора $\dot{r}$, составляющей ускорения по касательной к траектории $\dot{V}$ и угловым ускорением радиуса вектора $\dot{w}$.

В качестве вектора неконтролируемых факторов приняты начальные значения фазовых координат $\omega = (\xi_0, r_0, V_0, w_0)$. Будем считать, что неконтролируемые факторы подчиняются равномерному закону распределения и лежат в следующем диапазоне:

$$0{,}15 \text{ м/с} \le \xi_0 \le 0{,}25 \text{ м/с}; \ 6870000 \text{ м} \le r_0 \le 6874000 \text{ м};$$
$$8100 \text{ м/с} \le V_0 \le 8150 \text{ м/с}; \ 0{,}0010 \text{ рад/с} \le w_0 \le 0{,}0012 \text{ рад/с}.$$

В задаче требуется построить функцию Ляпунова в условиях заданной системы уравнений движения (8).

Выполним обезразмеривание вектора фазовых координат $x = (\xi, r, V, w)$ и вектора неконтролируемых факторов $\omega = (\xi_0, r_0, V_0, w_0)$. В системе уравнений (8) фазовые координаты имеют большой разброс по порядкам величин. Обезразмеривание необходимо для равномерного учета значений фазовых координат в функции Ляпунова. Безразмерные фазовые координаты и их начальные значения определяются следующим образом:

$$\hat{\xi} = \frac{\xi}{\overline{\xi}}; \hat{r} = \frac{r}{\overline{r}}; \hat{V} = \frac{V}{\overline{V}}; \hat{w} = \frac{w}{\overline{w}}; \hat{\xi}_0 = \frac{\xi_0}{\overline{\xi}}; \hat{r}_0 = \frac{r_0}{\overline{r}}; \hat{V}_0 = \frac{V_0}{\overline{V}}; \hat{w}_0 = \frac{w_0}{\overline{w}},$$

где $\overline{\xi} = 0{,}2$ м/с; $\overline{r} = 6872000$ м; $\overline{V} = 8125$ м/с; $\overline{w} = 0{,}0011$ рад/с – средние значения неконтролируемых факторов из рассматриваемого диапазона.

Тогда неконтролируемые факторы в безразмерном виде будут лежать в следующем диапазоне:

$$0{,}75 \le \hat{\xi}_0 \le 1{,}25;\ 0{,}99971 \le \hat{r}_0 \le 1{,}00029;\ 0{,}99692 \le \hat{V}_0 \le 1{,}00308;\ 0{,}90909 \le \hat{w}_0 \le 1{,}09091.$$

Функция Ляпунова принимается в виде квадратичной формы (4):

$$\upsilon\left(\hat{\xi}, \hat{r}, \hat{V}, \hat{w}\right) = b_{11}\hat{\xi}^2 + b_{12}\hat{\xi}\hat{r} + b_{13}\hat{\xi}\hat{V} + b_{14}\hat{\xi}\hat{w} + b_{21}\hat{r}\hat{\xi} + b_{22}\hat{r}^2 + b_{23}\hat{r}\hat{V} +$$
$$+ b_{24}\hat{r}\hat{w} + b_{31}\hat{V}\hat{\xi} + b_{32}\hat{V}\hat{r} + b_{33}\hat{V}^2 + b_{34}\hat{V}\hat{w} + b_{41}\hat{w}\hat{\xi} + b_{42}\hat{w}\hat{r} + b_{43}\hat{w}\hat{V} + b_{44}\hat{w}^2.$$

После приведения подобных слагаемых функция Ляпунова будет иметь вид:

$$\upsilon\left(\hat{\xi}, \hat{r}, \hat{V}, \hat{w}\right) = b_{11}\hat{\xi}^2 + (b_{12} + b_{21})\hat{\xi}\hat{r} + (b_{13} + b_{31})\hat{\xi}\hat{V} + (b_{14} + b_{41})\hat{\xi}\hat{w} + b_{22}\hat{r}^2 +$$
$$+ (b_{23} + b_{32})\hat{r}\hat{V} + (b_{24} + b_{42})\hat{r}\hat{w} + b_{33}\hat{V}^2 + (b_{34} + b_{43})\hat{V}\hat{w} + b_{44}\hat{w}^2.$$

Обозначим коэффициенты b_{ij} следующим образом: $a_1 = b_{11}$, $a_2 = b_{22}$, $a_3 = b_{33}$, $a_4 = b_{44}$, $a_5 = b_{12} + b_{21}$, $a_6 = b_{13} + b_{31}$, $a_7 = b_{14} + b_{41}$, $a_8 = b_{23} + b_{32}$, $a_9 = b_{34} + b_{43}$, $a_{10} = b_{24} + b_{42}$.

В окончательном виде функция Ляпунова будет иметь вид:

$$\upsilon\left(\hat{\xi}, \hat{r}, \hat{V}, \hat{w}\right) = a_1\hat{\xi}^2 + a_2\hat{r}^2 + a_3\hat{V}^2 + a_4\hat{w}^2 + a_5\hat{\xi}\hat{r} + a_6\hat{\xi}\hat{V} + a_7\hat{\xi}\hat{w} + a_8\hat{r}\hat{V} + a_9\hat{V}\hat{w} + a_{10}\hat{r}\hat{w}. \quad (9)$$

Тогда производная функции Ляпунова $\dot{\upsilon}(\hat{\xi}, \hat{r}, \hat{V}, \hat{w})$ примет вид:

$$\dot{\upsilon}(\hat{\xi}, \hat{r}, \hat{V}, \hat{w}) = \frac{\partial\upsilon}{\partial\hat{\xi}}\cdot\frac{d\hat{\xi}}{dt} + \frac{\partial\upsilon}{\partial\hat{r}}\cdot\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{\partial\upsilon}{\partial\hat{V}}\cdot\frac{d\hat{V}}{dt} + \frac{\partial\upsilon}{\partial\hat{w}}\cdot\frac{d\hat{w}}{dt} = \left(2a_1\hat{\xi} + a_5\hat{r} + a_6\hat{V} + a_7\hat{w}\right)\cdot\left(\frac{\bar{r}\,\bar{w}^2}{\bar{\xi}}\cdot\hat{r}\hat{w}^2 -\right.$$
$$\left. - \frac{a}{\bar{\xi}\bar{r}^2}\cdot\frac{1}{\hat{r}^2} - c\bar{V}\cdot\hat{\xi}\hat{V}\right) + \left(2a_2\hat{r} + a_5\hat{\xi} + a_8\hat{V} + a_{10}\hat{w}\right)\cdot\left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{r}}\cdot\hat{\xi}\right) + \left(2a_3\hat{V} + a_6\hat{\xi} + a_8\hat{r} + a_9\hat{w}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(-\frac{a\bar{\xi}}{\bar{r}^2\bar{V}^2}\cdot\frac{\hat{\xi}}{\hat{r}^2\hat{V}} - c\bar{V}\cdot\hat{V}^2\right) + \left(2a_4\hat{w} + a_7\hat{\xi} + a_9\hat{V} + a_{10}\hat{r}\right)\cdot\left(-\frac{2\bar{\xi}}{\bar{r}}\cdot\hat{\xi}\hat{w} - c\bar{V}\cdot\hat{V}\hat{w}\right).$$

Размерность задачи равна 10. Параметрические ограничения заданы в виде: $-10^6 \le a_p \le 10^6$, $p = 1, 2, ..., 10$. В результате минимизации показателя (6) определяются коэффициенты a_p и строится функция Ляпунова (9) в виде таблично заданной функции.

В результате оптимизации были получены оптимальные коэффициенты a_p и следующие результаты, представленные в табл. 3. Графики изменения фазовых координат, функции Ляпунова и ее производной представлены на рис. 1.

Таблица 3. Результаты вычислений

№ п/п	t, [с]	ξ, [м/с]; r, [м]; V, [м/с]; w, [рад . 10³/с]	υ	$\dot{\upsilon}$
1	14	0,1553; 6871606; 8124,308; 1,108042	7,506946	–4,5266E-04
2	28	0,2104; 6871608; 8124,305; 1,108041	7,500607	–4,5244E-04
3	42	0,2655; 6871612; 8124,301; 1,108040	7,494272	–4,5202E-04
4	56	0,3206; 6871616; 8124,296; 1,108039	7,487942	–4,5163E-04
5	70	0,3756; 6871622; 8124,291; 1,108037	7,481618	–4,5104E-04
6	84	0,4305; 6871628; 8124,284; 1,108035	7,475301	–4,5026E-04
7	98	0,4853; 6871635; 8124,277; 1,108033	7,468997	–4,4949E-04
8	112	0,5400; 6871642; 8124,270; 1,108030	7,462702	–4,4852E-04
9	126	0,5945; 6871651; 8124,261; 1,108028	7,456422	–4,4757E-04
10	140	0,6489; 6871660; 8124,251; 1,108025	7,450154	–4,4641E-04
…	…	…	…	…
89	1246	3,5142; 6874322; 8121,489; 1,107167	7,116611	–7,3627E-05
90	1260	3,5226; 6874371; 8121,438; 1,107151	7,115582	–6,6799E-05
91	1274	3,5303; 6874420; 8121,386; 1,107135	7,114646	–5,9764E-05
92	1288	3,5371; 6874470; 8121,335; 1,107119	7,113809	–5,2728E-05
93	1302	3,5431; 6874520; 8121,284; 1,107103	7,113071	–4,5691E-05

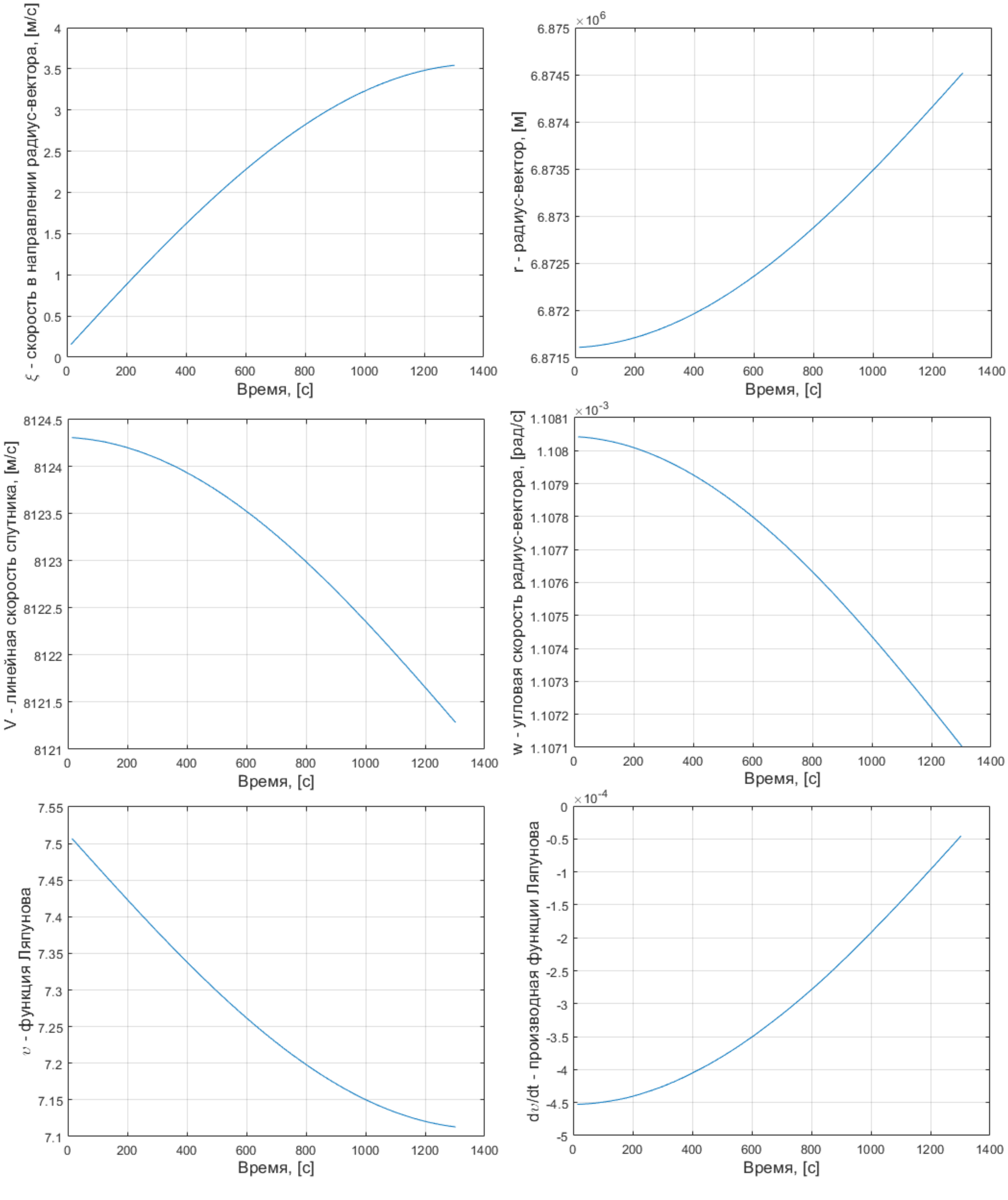

Рис. 1. Графики зависимостей фазовых координат, функции Ляпунова и ее производной от времени

Оптимальные значения коэффициентов a_p:

$a_1 = –0{,}0000063$; $a_2 = –195{,}7087536$; $a_3 = –38{,}6794681$; $a_4 = –32{,}8748120$; $a_5 = –6{,}0728048$;
$a_6 = –16{,}1673917$; $a_7 = –10{,}0431041$; $a_8 = 151{,}9309402$; $a_9 = –153{,}0559272$; $a_{10} = 275{,}4955036$.

Для каждого шага оптимизации было рассчитано 1300 секунд (21,7 минут) полета спутника. Задача решалась с шагом интегрирования Δt = 14 с. Начальное значение показателя устойчивости составляло $J_{\text{ст}_1} = 93$. В результате проведенной оптимизации было получено оптимальное (минимальное) значение показателя $J_{\text{ст}}^{\text{опт}} = 0$. Из этого следует, что во всех расчетных точках траектории спутника выполняются условия (3), следовательно, обеспечивается устойчивость данного аппарата. Рассмотренная модельная задача показала, что для выбранных исходных характеристик спутника «Кондор-Э» и статистических свойств неконтролируемых факторов, предлагаемый метод синтеза функции Ляпунова позволил оценить устойчивость рассматриваемого аппарата.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенной работы были рассмотрены существующие методы исследования устойчивости, а также разработан новый метод, основанный на статистическом синтезе функции Ляпунова. Данный метод исследования устойчивости применим для широкого класса КА типа ИСЗ.

Формирование функции Ляпунова производилось в классе квадратичных функций в соответствии с разработанным статистическим показателем устойчивости. Устойчивость рассматривается по отношению к вектору возмущающих факторов.

Исследована устойчивость движения спутника «Кондор-Э». В результате исследования получено минимальное значение показателя устойчивости $J_{\text{ст}}^{\text{опт}} = 0$, что позволяет говорить об устойчивости рассмотренного ИСЗ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Маленков А. А.** Выбор проектных решений при проектировании системы беспилотных летательных аппаратов в условиях многоцелевой неопределенности // Вестник Московского авиационного института. 2018. Т. 25, № 2. С. 7–15. [A. A. Malenkov, “Design solutions selection while developing a system of unmanned flying vehicles in conditions of multi-target uncertainty”, (in Russian), in *Vestnik Moskovskogo aviacionnogo instituta*, vol. 25, no. 2, pp. 7-15, 2018.]

2. **Балык В. М., Кулакова Р. Д., Хесин Л. Б.** Модификация проектных решений при статистическом синтезе обликовых характеристик беспилотного летательного аппарата // Вестник Московского авиационного института. 2011. Т. 18, № 2. С. 31–40. [V. M. Balyk, R. D. Kulakova, L. B. Khesin, “Modification of design solutions in the statistical synthesis of the appearance characteristics of an unmanned aerial vehicle”, (in Russian), in *Vestnik Moskovskogo aviacionnogo instituta*, vol. 18, no. 2, pp. 31-40, 2011.]

3. **Сутырина Е. Н.** Дистанционное зондирование Земли: учеб. пособие. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013. 165 с. [E. N. Sutyrina, *Remote sensing of the Earth: textbook*, (in Russian). Irkutsk: Izd-vo IGU, 2013.]

4. **Шовенгердт Р. А.** Дистанционное зондирование. Модели и методы обработки изображений. М.: Техносфера, 2013. 589 с. [R. A. Shovengerdt, *Remote sensing. Models and methods of image processing*, (in Russian). Moscow: Tehnosfera, 2013.]

5. **Амелькин Н. И., Зыков А. В.** О равновесиях и устойчивости спутника с системой двухстепенных силовых гироскопов в центральном гравитационном поле // Труды МФТИ. 2014. Т. 6, № 2 (22). С. 68–74. [N. I. Amelkin, A. V. Zykov, “On the equilibrium and stability of a satellite with a system of two-power force gyroscopes in a central gravitational field”, (in Russian), in *Trudy MFTI*, vol. 6, no. 2 (22), pp. 68-74, 2014.]

6. **Бордовицына Т. В., Авдюшев В. А.** Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы: учеб. пособие. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. 178 с. [T. V. Bordovitsyna, V. A. Avdyushev, *Theory of movement of artificial satellites of the Earth. Analytical and numerical methods: textbook*, (in Russian). Tomsk: Izd-vo Tom. un-ta, 2007.]

7. **Сарычев В. А., Гутник С. А.** Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследования положений равновесия // Космические исследования. 2015. Т. 53, № 6. С. 488–496. [V. A. Sarychev, S. A. Gutnik, “Dynamics of a satellite subject to gravitational and aerodynamic torques. Investigation of equilibrium positions”, (in Russian), in *Kosmicheskie Issledovaniya,* vol. 53, no. 6, pp. 488-496, 2015.]

8. **Барбашин Е. А.** Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с. [E. A. Barbashin, *Lyapunov functions,* (in Russian). Moscow: Nauka, 1970.]

9. **Лозгачев Г. И.** Об одном способе построения функций Ляпунова // Оптимизация и моделирование в автоматизированных системах. Воронеж: ВГТУ, 1996. С. 186–190. [G. I. Lozgachev, “On one method of constructing Lyapunov functions”, (in Russian), in *Optimization and modeling in automated systems*. Voronezh: VSTU, 1996.]

10. **Пропой А. И.** О построении функций Ляпунова II // А и Т. 2000. № 6. С. 31–40. [A. I. Propoy, “On the construction of Lyapunov functions II”, (in Russian), in *A i T,* no. 6, pp. 31-40, 2000.]

11. **Румянцев В. В.** Сравнение трех методов построения функций Ляпунова // ПММ. 1995. Т. 59, вып. 6. С. 916–921. [V. V. Rumyantsev, “Comparison of three methods for constructing Lyapunov functions”, (in Russian), in *PMM*, vol. 59, Iss. 6, pp. 916-921, 1995.]

12. **Миронов В. В., Северцев Н. А.** Методы анализа устойчивости систем и управляемости движением. М.: Изд-во РУДН, 2002. 164 с. **[** V. V. Mironov, N. A. Severtsev, *Methods of analysis of system stability and motion controllability*, (in Russian). Moscow: Izd-vo RUDN, 2002. **]**

13. **Балык В. М.** Статистический синтез проектных решений при разработке сложных систем. М.: Изд-во МАИ, 2011. 278 с. **[** V. M. Balyk, *Statistical synthesis of design solutions in the development of complex systems*, (in Russian). Moscow: Izd-vo MAI, 2011. **]**

14. **Ивахненко А. Г.** Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем. Киев: Наукова думка, 1981. 296 с. **[** A. G. Ivakhnenko, *Inductive method of self-organization of complex systems models*, (in Russian). Kiev: Naukova dumka, 1981. **]**

15. **Афанасьев И.** Зоркий «Кондор» // Новости космонавтики. 2013. № 8. С. 46–50. **[** I. Afanasiev, "Zorky "Condor"", (in Russian), in *Novosti kosmonavtiki,* no. 8, pp. 46-50, 2013. **]**

16. **Крылов В. И.** Основы теории движения ИСЗ (часть первая: невозмущенное движение): учебное пособие. М.: МИИГАиК, 2015. 52 с. **[** V. I. Krylov*, Fundamentals of the theory of motion of an artificial satellite (part one: unperturbed motion): textbook,* (in Russian). Moscow: MIIGAiK, 2015. **]**

17. **Мирер С. А.** Механика космического полета. Орбитальное движение. М.: Резолит, 2007. 267 с. **[** S. A. Mirer, *Mechanics of space flight. Orbital movement*, (in Russian). Moscow: Rezolit, 2007. **]**

ОБ АВТОРЕ

БОРОДИН Игорь Денисович, асп. каф. 608 «Проектирование аэрогидрокосмических систем». Дипл. инженер-конструктор (МАИ, 2019). Готовит дис. о проектировании беспилотных летательных аппаратов методом статистического синтеза функции Ляпунова.

BORODIN, Igor Denisovich, Postgraduate Student, Dept. of Design of aerohydrocosmic systems. Engineer-designer (MAI, 2019).

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 26, no. 3 (97), pp. 14-23, 2022. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).