

УДК 539.3:004.4

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ОСРЕДНЕНИЯ

А. А. Филиппов¹, В. П. Павлов², С. Н. Никитин³

¹adagio.artension@gmail.com, ²victor.pavlov.1951@yandex.ru, ³nio-8450@yandex.ru

^{1,2}ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

³ОАО «Институт технологии и организации производства» (НИИТ)

Поступила в редакцию 07.12.2015

Аннотация. В данной работе рассматривается приложение метода асимптотического осреднения к задаче численного определения эффективных упругих характеристик композиционного материала.

Ключевые слова: композиционный материал; ячейка периодичности; метод асимптотического осреднения; эффективный тензор упругости; локальная задача на ячейке периодичности; метод конечных элементов.

В современной технике существует тенденция перехода к новым конструкционным материалам, таким как композиционные материалы (КМ). Композиционные материалы являются неоднородными материалами и вычисление напряженно-деформированного состояния (НДС) в них базируется на механике неоднородных сред. В данной работе рассматривается задача численного прогнозирования эффективных упругих свойств КМ на основе метода асимптотического осреднения, реализованного в пакете ANSYS.

ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Рассматривается композиционный материал, у которого в качестве армирующих элементов использовались борные и углеродные волокна, а в качестве связующего – магниевый сплав.

Предполагается, что выполняются следующие условия:

- волокна распределены регулярным образом;
- между волокнами и матрицей предполагается идеальный контакт;
- все компоненты КМ подчиняются линейному закону Гука.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим стационарную задачу упругости в линеаризованном виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} C_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl}(x) + f_i = 0 \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

где C – тензор упругости; $\varepsilon_{kl}(x)$ – компоненты тензора бесконечно малых деформаций, определяемые по формуле

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k(x)}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l(x)}{\partial x_k} \right); \quad (1.2)$$

u_k , $k = 1, 2, 3$ – компоненты вектора перемещений u ; x_i , $i = 1, 2, 3$ – пространственные координаты вектора x ; f_i , $i = 1, 2, 3$ – компоненты вектора объемных сил.

При применении уравнения (1.1) для тел, имеющих неоднородную структуру, необходимо учитывать, что тензор упругости может резко изменяться и претерпевать скачки при переходе через межфазную границу (МФГ) разделяющую различные компоненты КМ. Размеры неоднородностей накладывают ограничения на возможность численного получения НДС для конструкций из КМ. Поэтому в инженерной практике для расчетов композиционных конструкций используется теория эквивалентной эффективной среды, с помощью которой получают осредненное описание напряженно-деформированного состояния. Но данный подход не позволяет получить достаточно качественного описания возникающих напряжений и деформаций в волокнах и матрице. Поэтому следует переходить к расчету

эффективных упругих характеристик КМ на основе микромеханики.

Существуют различные способы описания упругих свойств КМ на макроуровне. Помимо аналитических способов определения эффективных упругих характеристик [3], используемых преимущественно применительно к средам со сферическими включениями, и методов, делающих значительные упрощения относительно структуры композиционного материала, существуют численные методы, основанные на решении краевой задачи деформирования представительного объема материала. В работах [1, 2] описана такая конечно-элементная процедура вычисления эффективных упругих свойств.

В данной работе реализуется другой подход, основанный на методе асимптотического осреднения, который был предложен в монографиях [4, 5] применительно к задачам механики деформирования упругих тел.

2. МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО ОСРЕДНЕНИЯ

Применение метода асимптотического осреднения (МАО) к задаче упругого деформирования композиционного материала с регулярным распределением неоднородностей (2.1) с граничными условиям (ГУ) (2.1, а) и (2.1, б), рассматривалось в различных источниках, к примеру, в [6, 7].

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \{u(x)\}) + f_i = 0 & \text{(а)} \\ (\sigma \{u(x)\} n(x))|_{\partial \Omega_t} = t^0(x) & \text{(б)} \\ u(x)|_{\partial \Omega_u} = u^0(x). & \text{(в)} \end{cases}, \quad (2.1)$$

где $u_{k,l}(x) = \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_l}$; $t^0(x)$ – поверхностные силы, заданные на части границы $\partial \Omega_t$; $u^0(x)$ – перемещения, заданные на части границы $\partial \Omega_u$.

В формуле (2.1, б) был введен тензорный дифференциальный оператор

$$\sigma_{ij} \{ \} = C_{ijkl} \left(\frac{x}{\alpha} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_k}{\partial x_l} + \frac{\partial_l}{\partial x_k} \right);$$

В системе (2.1) присутствует малый параметр α (в качестве аргумента тензора упругости), характеризующий размер ячейки периодич-

ности исследуемого композиционного материала. Для простоты можно предполагать, что ячейка периодичности материала (ЯП) имеет форму куба со сторонами параллельными координатным осям и длинами равными α . В этом случае компоненты тензора упругости $C_{ijkl} \left(\frac{x}{\alpha} \right)$ являются периодическими функциями с периодом равным 1 по каждой пространственной координате.

Будем предполагать, что на границе между различными компонентами композиционного материала отсутствуют разрывы сплошности и проскальзывание (2.2). А также предполагается, что силовое воздействие волокна на связующее и связующего на волокно одинаково (2.3):

$$[u] = 0, \quad (2.2)$$

$$[\sigma]n = 0. \quad (2.3)$$

В формулах (2.2) и (2.3) операция [...] соответствует разности между значениями функции «слева» и «справа» от МФГ; σ – тензор напряжений; n – нормаль к МФГ.

Согласно МАО, решение (2.1) ищется в виде $u^a(x) = \tilde{u}(x, y)|_{y=\frac{x}{\alpha}}$, где функция $\tilde{u}(x, y)$ имеет вид [6]:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y) = & u^{(0)}(x, y) + \alpha u^{(1)}(x, y) + \dots \\ & + \alpha^n u^{(n)}(x, y) + \dots, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $u^{(i)}(x, y)$ – неизвестные функции, зависящие как от старых, так и от новых пространственных переменных, а x и y называют «медленными» и «быстрыми» переменными соответственно. Далее будет предполагаться, что все функции $u^{(k)}(x, y)$ периодичны по переменной y с периодом равным 1. В [9] показано, что функция $u^{(0)}$ не зависит от быстрых переменных, т.е. $u^{(0)} = u^{(0)}(x)$. В дальнейшем в разложении (2.4) будем рассматривать только первые два члена, а функцию $u^{(1)}(x, y)$ представим в виде [6]:

$$u^{(1)}(x, y) = \chi^{(ab)}(y) \frac{\partial u_a^{(0)}(x)}{\partial x_b}, \quad (2.5)$$

где $\chi^{(ab)}$ – набор векторов так называемых псевдоперемещений [6]. Очевидно, что функции псевдоперемещений должны быть периодичны.

С учетом этого разложение (2.4) примет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y) = & u^{(0)}(x, y) + \\ & + \alpha \chi^{(ab)}(y) \frac{\partial u_a^{(0)}(x)}{\partial x_b}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Следовательно, чтобы найти решение $u(x)$ задачи (2.1), достаточно определить вид неизвестных функций $u^{(0)}$ и $\chi^{(ab)}(y)$.

Чтобы получить основные уравнения, возникающие при применении метода асимптотического осреднения к задаче упругого деформирования твердого тела с периодической микроструктурой, достаточно подставить разложение (2.6) в систему (2.1) и условия идеального контакта (2.2) и (2.3) и использовать при этом правило дифференцирования

$$\frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (2.7)$$

для функций, зависящих от быстрых переменных. Затем следует приравнять коэффициенты при различных степенях α . В итоге, следуя [3, 6–9], получаются системы уравнений для неизвестных функций $u^{(0)}$ (2.8) и $\chi^{(ab)}$ (2.10).

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl}^{\text{eff}} \varepsilon_{kl}^x \{u^{(0)}(x)\}) + f_i = 0 & \text{(а)} \\ u^{(0)}|_{\partial\Omega_u} = u^0(x) & \text{(б)} \\ (\sigma^{\text{eff}} \{u^{(0)}\} n(x))|_{\partial\Omega_t} = t^0(x). & \text{(в)} \end{cases} \quad (2.8)$$

Система уравнений и граничных условий (2.8) называется осредненной системой уравнений для задачи упругого деформирования. Результат решения этой системы дает осредненные по ЯП перемещения, деформации и напряжения [7]. Тензор C^{eff} называется эффективным тензором упругости (ЭТУ), компоненты C_{ijkl}^{eff} определяются следующим образом:

$$C_{ijkl}^{\text{eff}} = \langle C_{ijkl} \rangle_{\text{ЯП}} + \langle \sigma_{ij} \{ \chi^{(kl)} \} \rangle_{\text{ЯП}}, \quad (2.9)$$

где $\langle \dots \rangle_{\text{ЯП}}$ – оператор осреднения по ЯП. Оператор σ^{eff} определен следующим образом

$$\sigma^{\text{eff}} = C_{ijkl}^{\text{eff}}(x) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_k}{\partial y_l} + \frac{\partial_l}{\partial y_k} \right).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{ij}^Y \{ \chi^{(ab)} \}}{\partial y_j} = - \frac{\partial C_{ijab}(y)}{\partial y_j} & \text{(а)} \\ [\chi^{(ab)}] = 0 & \text{(б)} \\ \chi^{(ab)}|_{\partial\Omega^+} = \chi^{(ab)}|_{\partial\Omega^-} & \text{(в)} \\ [\sigma_{ij}^Y \{ \chi^{(ab)} \}] n_j = - [C_{abij}] n_j. & \text{(г)} \end{cases} \quad (2.10)$$

Система (2.10) называется локальной задачей на ЯП, решение которой ищется во всей области ЯП. Условие (2.10, в) – это условие периодичности функции псевдоперемещений.

Условие (2.10, г) означает, что на МФГ приложена поверхностная сила, величина которой определяется правой частью соотношения. Чтобы это показать, достаточно рассмотреть равновесие бесконечно малого элемента в форме пластины, со срединной плоскостью, совпадающей с бесконечно малым кусочком МФГ. Будем предполагать, что толщина этого элемента существенно меньше остальных размеров. Вклад объемных и поверхностных сил, действующих на боковые площадки пластины, пренебрежимо мал по сравнению с влиянием поверхностных сил, распределенных на верхней и нижней грани пластины. Предположим также, что размеры пластины таковы, что можно говорить об однородном распределении поверхностных сил на верхней и нижней грани пластины, равное $t^+ = \sigma^+ n^+$, $t^- = \sigma^- n^-$ соответственно, где n^+ , n^- – внешние нормали к верхней и нижней грани пластины соответственно. Очевидно, что эти нормали противоположно направлены $n^+ = -n^-$. С учетом этого составим уравнение равновесия пластины, и предположим, что на срединной плоскости пластины действует однородная (в силу малости размеров пластины) поверхностная сила t^0 . Тогда должно быть справедливым следующее соотношение:

$$\begin{aligned} t^+ + t^- + t^0 &= \sigma^+ n^+ + \sigma^- n^- + t^0 = \\ &= \sigma^+ n^+ - \sigma^- n^+ + t^0 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow t^0 &= \sigma^- n^+ - \sigma^+ n^+ = [\sigma] n^+ \end{aligned}$$

Следовательно, наличие поверхностной силы на срединной поверхности пластины приводит к разрыву величины $\sigma \cdot n$, при переходе через нее, а величина разрыва определяется этой поверхностной силой.

3. РЕШЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ НА ЯЧЕЙКЕ ПЕРИОДИЧНОСТИ

В данном разделе представлен способ численного решения локальной задачи на ЯП (2.10) в ANSYS.

Введем две новые функции от быстрых координат:

- пусть $\chi^{(ab)[1]}$ удовлетворяет однородному уравнению (3.1)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^y \{ \chi^{(ab)[1]} \}}{\partial y_j} = 0; \quad (3.1)$$

- а $\chi^{(ab)[2]}$ удовлетворяет неоднородному уравнению (3.2)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^y \{ \chi^{(ab)[2]} \}}{\partial y_j} = - \frac{\partial C_{ijab}}{\partial y_j}. \quad (3.2)$$

Пусть также для каждой функции $\chi^{(ab)[1]}$ и $\chi^{(ab)[2]}$ выполняются условия (табл. 1).

Таблица 1

Условия	$\chi^{(ab)[1]}$	$\chi^{(ab)[2]}$
Непрерывность	$[\chi^{(ab)[1]}] = 0$	$[\chi^{(ab)[2]}] = 0$
Краевые условия	$\chi^{(ab)[1]} _{\partial\Omega^+} = \chi^{(ab)[1]} _{\partial\Omega^-}$	$\chi^{(ab)[2]} _{\partial\Omega} = 0$
Условия на межфазной границе	$[\sigma_{ij}^y \{ \chi^{(ab)[1]} \}] n_j = -[C_{abij}] n_j$	$[\sigma_{ij}^y \{ \chi^{(ab)[2]} \}] n_j = 0$

При выполнении этих условий искомая функция псевдоперемещений $\chi^{(ab)}$ может быть представлена как сумма $\chi^{(ab)[1]}$ и $\chi^{(ab)[2]}$:

$$\chi^{(ab)} = \chi^{(ab)[1]} + \chi^{(ab)[2]}. \quad (3.3)$$

Получаются две несвязанных системы уравнений для функций $\chi^{(ab)[1]}$ (3.4) и $\chi^{(ab)[2]}$ (3.5), сумма которых определяет решение локальной задачи на ЯП:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{ij}^y \{ \chi^{(ab)[1]} \}}{\partial y_j} = 0 \quad (a) \\ [\chi^{(ab)[1]}] = 0 \quad (б) \\ \chi^{(ab)[1]}|_{\partial\Omega^+} = \chi^{(ab)[1]}|_{\partial\Omega^-} \quad (в) \\ [\sigma_{ij}^y \{ \chi^{(ab)[1]} \}] n_j = -[C_{abij}] n_j \quad (г) \end{array} \right. \quad (3.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{ij}^y \{ \chi^{(ab)[2]} \}}{\partial y_j} = - \frac{\partial C_{ijab}}{\partial y_j} \quad (a) \\ [\chi^{(ab)[2]}] = 0 \quad (б) \\ \chi^{(ab)[2]}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (в) \\ [\sigma_{ij}^y \{ \chi^{(ab)[2]} \}] n_j = 0. \quad (г) \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Решение задачи (3.4), для функции $\chi^{(ab)[1]}$ может быть осуществлено в стандартных пакетах конечно-элементного моделирования, в частности в пакете ANSYS, поскольку уравнение (3.4, а) совпадает с уравнением линейной теории упругости, при этом условие непрерывности псевдоперемещений удовлетворяются автоматически, условия периодичности (3.4, в) могут быть введены в расчетную модель при помощи операции связывания степеней свобод, а условие (3.4, г) реализуется при помощи инструментов, позволяющих определять произвольную поверхностную силу, поскольку условие (3.4, г) означает, что на МФГ должна быть приложена поверхностная сила $t^{(ab)}$, компоненты которой равны:

$$t_i^{(ab)} = (C_{abij}^{(м)} - C_{abij}^{(в)}) n_j, \quad (3.6)$$

где n – внешняя нормаль к волокну; $C^{(м)}$ – тензор упругости матрицы; $C^{(в)}$ – тензор упругости волокна.

Всеми этими возможностями ANSYS обладает, поэтому решение задачи (3.4) было реализовано именно в этом программном пакете. В отличие от системы (3.4) система (3.5), в том виде, в котором она представлена, не может быть напрямую решена в пакете конечно – элементного моделирования, в силу наличия в правой части уравнения (3.5, а) сингулярного члена.

Уравнение (3.5, а) было преобразовано к однородному виду относительно вектор-функции φ .

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^y \{ \varphi^{(ab)} \}}{\partial y_j} = 0, \quad (3.7)$$

$$\varphi_k^{(ab)} = T_{km}^{ab} y_m + \chi_k^{(ab)[2]},$$

где $T_{km}^{ab} = \frac{1}{2} (\delta_{ak} \delta_{bl} + \delta_{al} \delta_{bk})$ – симметричный единичный тензор 4-го ранга.

Функции $\varphi^{(ab)}$ удовлетворяют тому же уравнению, что и функция $\chi^{(ab)[1]}$. Условия, которым должна удовлетворять функция $\varphi^{(ab)}$ получаются, если подставить в формулу (3.7) условия (3.5). Очевидно, что условие непрерывности функции $\chi^{(ab)[2]}$ (3.5, б), означает непрерывность функции $\varphi^{(ab)}$. Однородное условие на границе (3.5, в) сводится к условию $\varphi_k^{(ab)}|_{\partial\Omega} = T_{kl}^{ab} y_l$, следовательно функция на границе ЯП изменяется линейно:

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(ab)}|_{\partial\Omega} &= T_{km}^{ab} y_m|_{\partial\Omega} = \frac{1}{2}(\delta_{ak}\delta_{bm} + \delta_{am}\delta_{bk})y_m|_{\partial\Omega} = \\ &= \frac{1}{2}(\delta_{ak}y_b|_{\partial\Omega} + \delta_{bk}y_a|_{\partial\Omega}). \end{aligned}$$

Условие разрыва на МФГ для функции $\varphi^{(ab)}$ в силу линейности оператора $\sigma_{ij}\{\dots\}$ примет вид:

$$\begin{aligned} [\sigma_{ij}\{\varphi^{(ab)}\}]n_j &= [\sigma_{ij}\{T_{km}^{ab}y_m + \chi_k^{(ab)[2]}\}]n_j = \\ &= [\sigma_{ij}\{T_{km}^{ab}y_m\}]n_j + [\sigma_{ij}\{\chi_k^{(ab)[2]}\}]n_j = \\ &= [\sigma_{ij}\{T_{km}^{ab}y_m\}]n_j = \\ &= \frac{1}{2}\left[C_{ijkl}(y)\left(\frac{\partial}{\partial y_l}(T_{km}^{ab}y_m) + \frac{\partial}{\partial y_k}(T_{lm}^{ab}y_m)\right)\right]n_j = \\ &= \frac{1}{2}[C_{ijkl}(y)(T_{km}^{ab}\delta_{lm} + T_{lm}^{ab}\delta_{km})]n_j = \\ &= \frac{1}{2}[C_{ijkl}(y)(T_{kl}^{ab} + T_{lk}^{ab})]n_j = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(C_{ijab}(y) + C_{ijba}(y)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(C_{ijba}(y) + C_{ijab}(y))\right]n_j = \\ &= [C_{ijab}(y)]n_j. \end{aligned}$$

Таким образом задача для функции $\varphi^{(ab)}$ может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{ij}^y\{\varphi^{(ab)}\}}{\partial y_j} = 0 & (a) \\ [\varphi^{(ab)}] = 0 & (б) \\ \varphi_k^{(ab)}|_{\partial\Omega} = \frac{1}{2}(\delta_{ak}y_b + y_a\delta_{bk}) & (в) \\ [\sigma_{ij}^y\{\varphi^{(ab)}\}]n_j = [C_{ijab}(y)]n_j & (г) \end{cases} \quad (3.8)$$

Численный конечно-элементный расчет задач (3.4) и (3.8) для всех наборов индексов $a = 1, \dots, 3$ и $b = 1, \dots, 3$, может быть осуществлен в пакете ANSYS.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО ТЕНЗОРА УПРУГОСТИ

Согласно формуле для ЭТУ (2.9) и функции псевдоперемещений (3.7) можно представить формулы для ЭТУ в следующем виде:

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^{eff} &= \frac{1}{|\text{Vol}(\text{ЯП})|} \int_{\text{ЯП}} C_{ijkl}(y) + \\ &+ C_{ijmn}(y) \frac{\partial(\chi_m^{(kl)[1]}(y) + \chi_m^{(kl)[2]}(y))}{\partial y_n} dV = \\ &= \frac{1}{|\text{Vol}(\text{ЯП})|} \int_{\text{ЯП}} C_{ijkl}(y) dV + \\ &+ \frac{1}{|\text{Vol}(\text{ЯП})|} \int_{\text{ЯП}} C_{ijmn}(y) \frac{\partial \chi_m^{(kl)[1]}(y)}{\partial y_n} dV + \\ &+ \frac{1}{|\text{Vol}(\text{ЯП})|} \int_{\text{ЯП}} C_{ijmn}(y) \frac{\partial \chi_m^{(kl)[2]}(y)}{\partial y_n} dV = \\ &= \langle C_{ijkl} \rangle + \frac{1}{|\text{Vol}(\text{ЯП})|} \int_{\text{ЯП}} \sigma_{ij}^{(kl)[1]}(y) dV + \\ &+ \frac{1}{|\text{Vol}(\text{ЯП})|} \int_{\text{ЯП}} \sigma_{ij}^{(kl)[2]}(y) dV = \\ &= \langle C_{ijkl} \rangle + \langle \sigma_{ij}^{(kl)[1]} \rangle + \langle \sigma_{ij}^{(kl)[2]} \rangle, \quad (4.1) \end{aligned}$$

где под символами $\sigma_{ij}^{(kl)[1]}$ и $\sigma_{ij}^{(kl)[2]}$ принимались так называемые тензоры псевдонапряжений $\sigma_{ij}^{(ab)[1]} = \sigma_{ij}^y\{\chi^{(ab)[1]}\}$ и $\sigma_{ij}^{(ab)[2]} = \sigma_{ij}^y\{\chi^{(ab)[2]}\}$. Угловые скобки соответствуют оператору осреднения по ЯП. Назовем два члена в последнем равенстве $\langle \sigma_{ij}^{(kl)[1]} \rangle$ и $\langle \sigma_{ij}^{(kl)[2]} \rangle$ вкладками функций $\chi^{(ab)[1]}$ и $\chi^{(ab)[2]}$ в ЭТУ соответственно.

5. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ ИССЛЕДУЕМОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

При вычислении эффективных упругих характеристик композиционного материала предполагалось, что существуют три области в исследуемом теле, в каждой из которых микроструктура может быть описана при помощи со-

ответствующей ЯП, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда. На рис. 1 приведены твердотельные модели этих ЯП. Первая и вторая ЯП характеризуют однонаправленный композиционный материал, армированный борными и углеродными волокнами соответственно; третья – композиционный материал на основе борных и углеродных волокон, армированный продольно поперечным образом. В качестве связующего в каждой области использовался магниевый сплав. Упругие характеристики, а также объемное содержание волокон приведены в табл. 2.

Системы координат, в которых представлены твердотельные модели ЯП были подобраны таким образом, чтобы оси волокон были параллельны координатным осям, а центры систем координат были расположены в центрах ЯП. В первой и второй ЯП волокно расположено параллельно оси Oy . В третьей ЯП углеродные волокна расположены параллельно оси Ox , а борное волокно – параллельно оси Oy .

Для каждой из ЯП производились численные расчеты ЭТУ.

В пакете ANSYS были численно получены решения локальных задач, на основе которых были вычислены значения компонент эффективных тензоров упругости для всех трех ЯП. Для этого были созданы макросы на языке APDL для решения локальных задач (3.4), (3.8) и реализующие: формирование твердотельных моделей ЯП для трех вариантов армирования; построение сетки КЭ с симметричным расположением узлов на внешних гранях ЯП (при помощи команды MSHCOPU и виртуального элемента MESH200); привязка условий периодичности, через связывание степеней свобод узлов, лежащих на противоположных гранях ЯП (команда узлов CP); моделирование разрыва (3.4, г) и (3.8, г) путем приложения поверхностных сил на МФГ, реализованное с помощью интерфейсного элемента SURF154; вычисление, на основе полученного решения функций $\chi^{(ab)[1]}$, $\chi^{(ab)[2]}$ и ЭТУ.

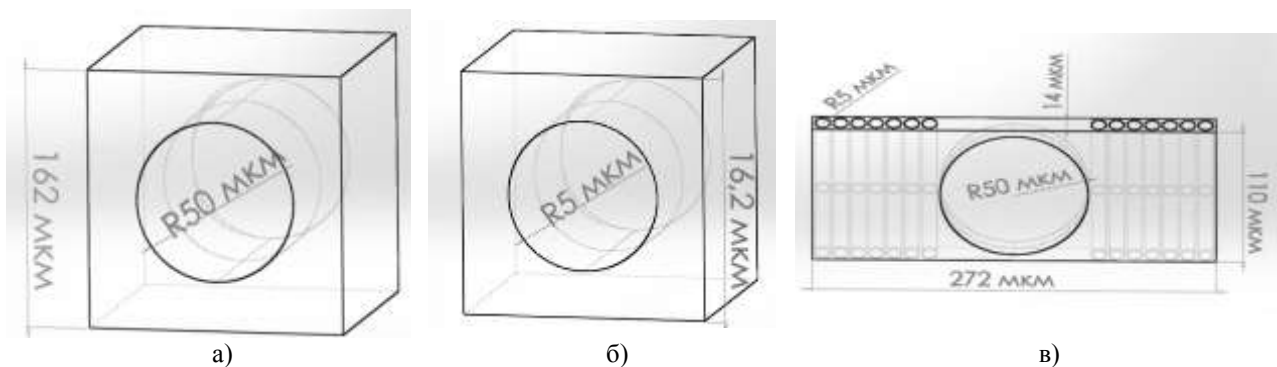


Рис. 1. Твердотельные модели ячеек периодичности:

- а – ячейка периодичности, характеризующая микроструктуру первой области;*
б – ячейка периодичности, характеризующая микроструктуру второй области;
в – ячейка периодичности, характеризующая микроструктуру третьей области;

Таблица 2

Упругие характеристики компонентов КМ

Компоненты КМ	Модуль Юнга ГПа	К-т Пуассона	Объемное содержание		
			с/а №1	с/а №2	с/а №3
Магниевый сплав	44	0.28	0.7	0.7	0.4447
Углеродное волокно	300	0.2	0	0.3	0.2909
Борное волокно	400	0.25	0.3	0	0.2644

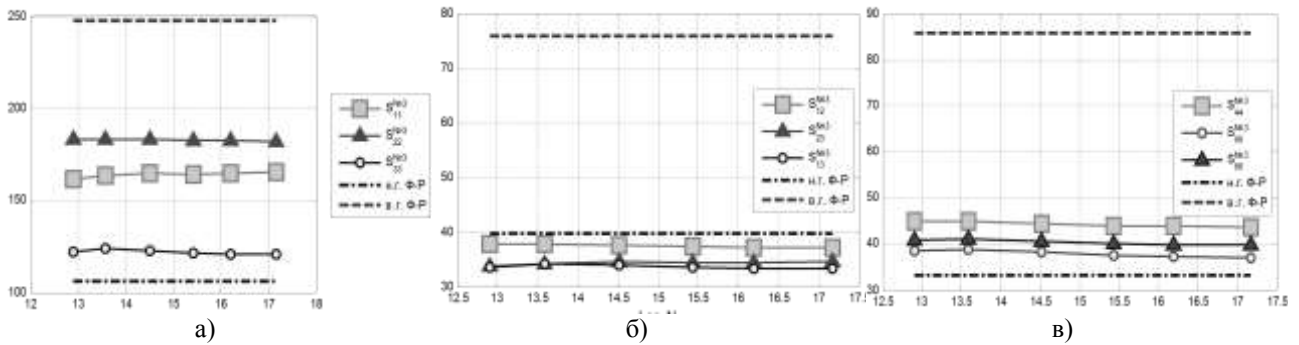


Рис. 2. Графики зависимости компонент эффективной матрицы упругости $S^{№3}$ (ГПа)

для третьей области от количества узлов в конечно-элементной сетки

(пунктирные горизонтальные линии обозначают верхнюю и нижнюю границу диапазона Фойгта–Рейса):

а – график для компонент $S_{11}^{№3}$, $S_{22}^{№3}$, $S_{33}^{№3}$; *б* – график для компонент $S_{12}^{№3}$, $S_{23}^{№3}$, $S_{13}^{№3}$;

в – график для компонент $S_{44}^{№3}$, $S_{55}^{№3}$, $S_{66}^{№3}$.

6. СПРОГНОЗИРОВАННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ КОМПОНЕНТ ЭФФЕКТИВНЫХ МАТРИЦ УПРУГОСТИ

В табл. 3 приведены результаты расчета эффективных матриц упругости (ЭМУ) для всех трех ячеек периодичности.

Из этих матриц следует, что эквивалентные материалы для всех трех областей армирования имеют слабо анизотропные свойства (соответствующие компоненты матриц имеют относительно малые значения).

Как было установлено при анализе решений подзадач на ЯП, влияние функции $\chi^{(ab)[2]}$ на значение компонент матрицы упругости незначительно. Поэтому, по крайней мере, для рассматриваемых ЯП, значения компонент эффективного

тензора упругости могут быть получены решением только задач (3.4) для всех наборов индексов $a = 1, \dots, 3$ и $b = 1, \dots, 3$.

Далее на графиках приведены зависимости компонент матриц упругости для ЯП №3 ($S^{№3}$) от густоты расчетной сетки, на которой искалось решение локальных задач. Также на графиках приведены верхние и нижние границы диапазона Фойгта–Рейса [10, 11].

Как видно из этих графиков, компоненты $S_{12}^{№3}$, $S_{23}^{№3}$ и $S_{13}^{№3}$ матрицы упругости не попадают в диапазон и расположены чуть ниже него. В отличие от $S^{№3}$ все компоненты матриц $S^{№1}$ и $S^{№2}$ попадают в соответствующий диапазон.

Таблица 3

Эффективная матрица упругости для схемы армирования №1, ($S^{№1}$, Па)					
8,610E+10	3,110E+10	2,955E+10	-4,243E+05	1,124E+05	-4,669E+05
3,110E+10	1,672E+11	3,110E+10	-9,200E+04	3,363E+04	-1,719E+05
2,955E+10	3,110E+10	8,610E+10	4,303E+04	8,975E+03	-2,274E+05
-4,243E+05	-9,200E+04	4,302E+04	2,822E+10	-4,114E+05	1,363E+05
1,124E+05	3,362E+04	8,975E+03	-4,114E+05	2,822E+10	-1,781E+05
-4,669E+05	-1,719E+05	-2,274E+05	1,363E+05	-1,781E+05	2,480E+10
Эффективная матрица упругости для схемы армирования №2, ($S^{№2}$, Па)					
8,279E+10	2,782E+10	2,807E+10	-1,085E+04	-1,340E+04	1,771E+05
2,782E+10	1,348E+11	2,782E+10	3,572E+03	-2,017E+03	3,429E+04
2,807E+10	2,782E+10	8,279E+10	3,075E+04	2,399E+03	1,180E+04
-1,085E+04	3,572E+03	3,075E+04	2,734E+10	2,159E+04	-1,057E+04
-1,340E+04	-2,017E+03	2,399E+03	2,159E+04	2,734E+10	1,957E+04
1,771E+05	3,429E+04	1,180E+04	-1,057E+04	1,957E+04	2,435E+10
Эффективная матрица упругости для схемы армирования №3, ($S^{№3}$, Па)					
1,645E+11	3,721E+10	3,333E+10	8,718E+05	-5,648E+05	5,189E+06
3,726E+10	1,826E+11	3,433E+10	2,935E+05	-3,955E+05	-4,257E+05
3,322E+10	3,409E+10	1,207E+11	1,718E+06	-8,186E+05	-1,016E+06
1,082E+06	3,644E+05	1,846E+06	4,397E+10	3,723E+05	1,779E+06
-3,933E+05	1,054E+06	-1,395E+06	-1,874E+05	3,738E+10	5,915E+05
4,966E+06	5,842E+04	1,840E+05	2,119E+06	6,482E+05	3,981E+10

ВЫВОДЫ

В данной работе на основе метода асимптотического осреднения был произведен расчет упругих эффективных характеристик рассматриваемого КМ в форме эффективных матриц упругости $S^{\text{№1}}$, $S^{\text{№2}}$ и $S^{\text{№3}}$. Приведена оценка качества полученных значений эффективных упругих характеристик путем проверки попадания компонент ЭМУ в диапазон допустимых значений Фойгта–Рейса.

Также в работе предложен численный способ решения локальных задач на ячейке периодичности, возникающих при приложении метода асимптотического осреднения к задаче упругого деформирования тел из композиционных материалов. При этом не требуется дополнительных предположений о структуре ЯП или материале компонентов композиционного материала.

Этот способ предполагает получение решения двух типов краевых задач упругого деформирования. Первый тип – задачи с периодическими граничными условиями, второй – задачи элементарной деформацией ячейки периодичности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Павлов В. П., Нусратуллин Э. М., Филиппов А. А. Моделирование характеристик упругости гибридного композиционного материала на основе борных и углеродных волокон. // Вестник УГАТУ 2011 Т. 15, № 4 (44). С. 98–107. [V. P. Pavlov, E. M. Nusratullin, and A. A. Filippov, "Modeling the characteristics of elasticity of the hybrid composition, on the basis of boron and carbon fibers", (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 15, no. 4 (44), pp. 98-107, 2011.]
2. Павлов В. П., Нусратуллин Э. М., Филиппов А. А., Мухамедова И. З. Методика определения упругих характеристик гибридного композиционного материала и оценка ее точности // Известия КГАСУ 2012 №3 (21). С. 167-174. [V. P. Pavlov, E. M. Nusratullin, A. A. Filippov, I. Z. Muhamedova "The methodology of determining the elastic characteristics of a hybrid composite material and estimation of its accuracy," (in Russian), in *Izvestia KGASU*, no. 3 (21), pp. 167-174, 2012.]
3. Shaofan Li, Gang Wang, Introduction in Micromechanics and nanomechanics, World Scientific Publ. Co, 2008, 504p. [L. Shaofan and Gang Wang, Introduction in Micromechanics and nanomechanics, World Scientific Publ. Co, 2008.]
4. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с. [E. Sanchez -Palensia, Non-homogeneous media and vibration theory, (in Russian), Moscow: "Mir", 1984.]
5. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука, 1984. 352 с. [N. S. Bahvalov and G. P. Panasenko, Averaging processes in periodic media. Mathematical problems in the mechanics of composite materials, (in Russian), Moscow: "Nauka", 1984.]
6. Победря Б. Е. Механика композитных материалов. М.: МГУ, 1986. 336 с. [B. E. Pobedrya, Mechanics of Composite Materials, (in Russian), Moscow: "MGU", 1986.]
7. Бардзокас Д. И., Зобнин А. И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. М.: Едиториал УРСС, 2003. 376 с. [D. I. Bardzokas and A. I. Zobnin, Mathematical modeling of physical processes in composite materials with periodic structure, (in Russian), Moscow: "Editorial URSS", 2003.]
8. Kamiński M. Computational Mechanics of Composite Materials. Sensitivity, Randomness and Multiscale Behaviour, Springer Verlag, 2005, London–New York. [M. Kamiński, Computational Mechanics of Composite Materials. Sensitivity, Randomness and Multiscale Behaviour, Springer Verlag, 2005, London–New York.]
9. Pavliotis G. A., Stuart A. M. Multiscale Methods: Averaging and Homogenization, Springer, 2008. [G.A. Pavliotis and A. M. Stuart, "Multiscale Methods: Averaging and Homogenization. World Scientific Publ. Co, 2008.]
10. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 336 с. [R.M. Christensen, Mechanics of composite materials, (in Russian), Moscow: "Mir", 1982.]
11. Zohdi T. I., Wriggers P. Introduction to Computational Micromechanics. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics 2005, vol. 20., Springer, Berlin.. [T.I. Zohdi and P. Wriggers, Introduction to Computational Micromechanics, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics 2005, vol. 20., Springer, Berlin]

ФИЛИППОВ Александр Анатольевич, асп. каф. сопротивления мат.. Дипл. матем. – программист (УГАТУ, 2008). Готовит дисс. по методике расчета композиционной рабочей лопатки ГТД на прочность.

ПАВЛОВ Виктор Павлович проф. каф. сопротивления материалов. Дипл. инж. по авиац. двигателям (УАИ, 1973). Д-р техн. наук по динамике и прочности (УГАТУ, 2005). Иссл. в обл. механики композиционных материалов.

НИКИТИН Сергей Николаевич, соискатель каф. сопротивления материалов. Дипл. инж.-мех. (УГАТУ, 1996). Готовит дисс. в обл. композиционных материалов в авиастроении.

METADATA

Title: Calculation of the effective elastic characteristics of the method of asymptotic homogenization

Authors: A. A. Filippov¹, V. P. Pavlov², S. N. Nikitin³

Affiliation:

^{1,2}Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

³Open Joint-Stock Company «Institute of Technology and Production Organisation (NIIT), Ufa Russia.

Email: ¹adagio.artension@gmail.com

²victor.pavlov.1951@gmail.com

³nio-8450@yandex.ru

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 20, no. 3 (73), pp. 49-57, 2016. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: The method of asymptotic homogenization is applied to the numerical determination of the effective elastic characteristics of the composite material in this article.

Key words: composite material; unit cell; asymptotic homogenization; effective elasticity tensor; unit cell problem; finite element method.

About authors:

FILIPPOV, Alexander Anatolyevich, Postgrad. (PhD) Student, Dept. of Strength of Materials. Specialist in Mathematics and Programming (UGATU, 2008).

PAVLOV, Victor Pavlovich, Prof., Dept. of Strength of Materials. Dipl. Engineer for Aircraft Engines (Ufa Aviation Inst., 1973). Dr. of Tech. Sci. (UGATU, 2005).

NIKITIN, Sergey Nikolaevich, Postgrad. of UGATU. Ingenier. of Tech. (UGATU, 1996).