ISSN 1992-6502 (Print) Вестник УГАТУ ISSN 2225-2789 (Online)
2023. Т. 27, № 3 (101). 29–37 http://journal.ugatu.su

УДК 534.1

Уточнение результатов численных расчетов частот поперечных колебаний стержня переменного сечения с упругим закреплением экстраполяционным методом

В.П. Павлов[1], Л.Р. Нусратуллина[2], Э.М. Нусратуллин[3]

[1]victor.pavlov.51@yandex.ru, [2]mardliliya@yandex.ru, [3]nusratullinem@rambler.ru

ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий», г. Уфа, Россия

Поступила в редакцию 19.05.2023

Аннотация. В статье описывается численный эксперимент с результатами расчета собственных частот поперечных колебаний стержня переменного сечения с упругим закреплением на одном из концов. Анализируется возможность уточнения экстраполяционным методом расчетных значений собственных частот, полученных методом алгебраических полиномов пятой степени. Показано, что экстраполяция позволила повысить точность расчетов численным методом на 2-3 порядка.

Ключевые слова: стержни переменного сечения; частоты собственных колебаний; характеристики стержня; экстраполяционные методы.

ВВЕДЕНИЕ

Интенсивное применение во всех областях современной науки численных методов для математического моделирования различных процессов и сложных конструкций, а также использование большого количества инженерных пакетов делает вопрос повышения точности результатов численных расчетов весьма актуальным.

Более точные результаты можно получить экстраполяционными методами, которые позволяют, используя более грубые результаты (например, с меньшим количеством узлов сетки), предсказать искомые значения, соответствующие «бесконечной» сетке.

При расчете частот свободных поперечных колебаний стержней переменного сечения применяется дифференциальное уравнение 4 порядка вида [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left(EI\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad (1)$$

где $w(x,t)$ – функция поперечных перемещений точек оси стержня, зависящая о координаты x и времени t, μ – масса единицы длины стержня, E – модуль упругости, постоянный вдоль стержня, $I=I(x)$ – осевой момент инерции, изменяющийся по длине стержня.

В работах [2-9] приводится численный метод алгебраических полиномов пятой степени (МАП5), на основе которого были определены первые пять частот свободных колебаний стержня переменного сечения с упругим закреплением на конце.

В данной статье, следуя [10-12], ставится задача повышения точности вычислений собственных частот, полученных МАП5, используя экстраполяцию [13] результатов численных расчетов.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ 5-ОЙ СТЕПЕНИ ДЛЯ РАСЧЕТА ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ

Уравнение (1) эквивалентно следующему:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2E\frac{\partial I}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+E\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0. \tag{2}$$

Решение дифференциального уравнения (2) будем искать в виде $w(x,t) = W(x)\sin\omega t$ где $W(x)$ – форма колебаний, ω – круговая частота собственных колебаний стержня.

После ряда преобразований получим дифференциальное уравнение следующего вида:

$$EI\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2E\frac{\partial I}{\partial x}\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+E\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-\mu\omega^2 W=0. \tag{3}$$

Краевые условия для (3) зададим выражениями:

$$\begin{cases} W=0, \quad \dfrac{\partial W}{\partial x}-k\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0, \quad \text{при } x=0,\\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^3 W}{\partial x^3}=0, \quad \text{при} \quad x=l, \end{cases} \tag{4}$$

где k – коэффициент податливости упругой опоры, характеризующий упругое закрепление левого конца стержня.

Для определения частот собственных колебаний ω_i, i=1, 2, … необходимо решить однородное дифференциальное уравнение (3) с краевыми условиями (4).

Уравнение (3) содержит производные до четвертого порядка включительно, поэтому при его решении целесообразно применять полиномы 5-ой степени, методика построения которых изложена в работах [2-9].

При построении алгебраического полинома степени 5 на отрезке $[0, l]$, формируется сетка $0=x_1<x_2<\ldots<x_N=l$ из N узлов.

На этой сетке строятся функции $P_{(i)}^5(x)$, являющиеся полиномами пятой степени:

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}_5^{(i)}(x)=\sum\limits_{\alpha=0}^{5} a_\alpha^{(i)}(x-x_i)^\alpha,\\ x\in[x_i, x_{i+1}], \quad i=\overline{1, N-1}. \end{cases} \tag{5}$$

На полиномы $\boldsymbol{P}_5^{(i)}(x)$ и их производные до 4-го порядка наложим условия непрерывной стыковки в сеточных узлах x_i, $i=\overline{2, N-1}$:

$$\begin{cases} \dfrac{d^s\boldsymbol{P}_5^{(i-1)}(x_i)}{dx^s}=\dfrac{d^s\boldsymbol{P}_5^{(i)}(x_i)}{dx^s},\\ s=\overline{0, 4}, \quad i=\overline{2, N-1}. \end{cases} \tag{6}$$

На основе многочленов $\boldsymbol{P}_5^{(i)}(x), i=\overline{1, N-1}$ строится функция $\boldsymbol{P}_5(x)$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}_5(x)=\boldsymbol{P}_5^{(i)}(x) \quad \text{при} \quad x\in[x_i, x_{i+1}),\\ i=\overline{1, N-1},\\ \boldsymbol{P}_5(x)=\boldsymbol{P}_5^{(N-1)}(x) \text{ при } \quad x=x_N. \end{cases} \tag{7}$$

Введем следующее обозначение для производных многочлена $\boldsymbol{P}_5(x)$:

$$\boldsymbol{R}_s = \frac{d^s \boldsymbol{P}_5(x)}{dx^s}, \quad s = \overline{0, 4}. \tag{8}$$

Заменяя в (3) искомую функцию $W = W(x)$ аппроксимирующей функцией $\boldsymbol{P}_5(x)$, получим систему из N алгебраических уравнений:

$$EI(x_i)\boldsymbol{R}_4(x_i) + 2E\frac{\partial I(x_i)}{\partial x}\boldsymbol{R}_3(x_i) + E\frac{\partial^2 I(x_i)}{\partial x^2}\boldsymbol{R}_2(x_i) - \mu(x_i)\omega^2\boldsymbol{R}(x_i) = 0, \; i = \overline{1, N}, \tag{9}$$

из которой при заданных краевых условиях находятся расчетные значения ω_m^P, $m = 1, 2, ...$ частот собственных колебаний стержня [7].

Краевые условия (4), согласно (8), примут вид:

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}_0(0) = 0, & \boldsymbol{R}_1(0) - k\boldsymbol{R}_2 = 0, \\ \boldsymbol{R}_2(x_N) = 0, & \boldsymbol{R}_3(z_N) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Объединяя уравнения (6), (9) и (10) в единую систему, получаем общую систему уравнений в количестве $M_\Sigma = 5(N-2) + N + 4 = 6(N-1)$, равном количеству неизвестных коэффициентов в полиномах (5).

Сформируем из неизвестных коэффициентов a_α^i, $\alpha = \overline{0, 5}$, $i = \overline{1, N\text{-}1}$ одномерный вектор $\boldsymbol{Q}$ размерностью $6(N-1) \times 1$ и представим объединенную систему из уравнений (6), (8) и (10) в матричном виде:

$$\boldsymbol{DQ} = 0, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{D}$ – квадратная матрица размерностью $6(N-1) \times 6(N-1)$, ряд компонентов которой содержит неизвестную величину частоты собственных колебаний ω.

Однородная система линейных уравнений (11) имеет ненулевое решение при равенстве нулю определителя матрицы $\boldsymbol{D}$:

$$\det \boldsymbol{D} = 0. \tag{12}$$

Решением уравнения (12) являются расчетные значения частот собственных колебаний стержня.

Далее можно удовлетвориться полученными приближенными расчетными значениями частот собственных колебаний, а можно каким-либо способом их уточнить.

В качестве уточняющего метода можно использовать методы экстраполяции данных. Теория экстраполяции изложена в [13].

При экстраполяции в общем случае задача сводится к следующему. Имеется несколько членов последовательности $z_{M_1}, z_{M_2}, z_{M_3}, \ldots, z_{M_k}$., полученных в результате численного расчета некоторой задачи при числе отрезков $M_1, M_2, \ldots, M_k$, где k – число численных экспериментов, M – число отрезков. Необходимо по этим данным найти предел последовательности z, принимаемой за точное значение искомой величины.

В данной работе для получения более точных значений частот собственных колебаний применим экстраполяцию расчетных частот, где математическая модель погрешности записывается в виде [13]:

$$z_M = z + c_1 M^{-1} + c_2 M^{-2} + \ldots + c_L M^{-L} + \Delta(M), \tag{13}$$

где M – число отрезков сетки узлов, при котором получено значение z_M; $c_1, c_2, \ldots, c_L$ – коэффициенты, которые предполагаются независящими от M; L – порядок точности метода, $\Delta(M)$ – величина, полагаемая малой по сравнению с величинами $c_1 M^{-1}, c_2 M^{-2}, \ldots, c_L M^{-L}$.

В выражении (13) отбрасываем малую величину $\Delta(M)$, и для определения неизвестных параметров $z,\ c_1, c_2, \ldots, c_L$ необходимы результаты не менее $L+1$ численных расчетов для различных чисел отрезков M сетки узлов.

В (13) ограничимся результатами $k+1$ расчетов и получим систему (14):

$$\begin{cases} z_1 = z + c_1 M_1^{-1} + c_2 M_1^{-2} + \ldots + c_k M_1^{-k}, \\ z_2 = z + c_1 M_2^{-1} + c_2 M_2^{-2} + \ldots + c_k M_2^{-k}, \\ \ldots \\ z_{k+1} = z + c_1 M_{k+1}^{-1} + c_2 M_{k+1}^{-2} + \ldots + c_k M_{k+1}^{-k}, \end{cases} \tag{14}$$

решая которую, находим z и коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

ЭТАЛОННАЯ ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ, ИМЕЮЩАЯ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

В качестве примера рассмотрим задачу экстраполяции расчетных значений частот собственных колебаний стержня переменного сечения, упруго закрепленного на левом конце (при $x=0$) и свободного на правом конце (при $x=l$) [7].

Для нахождения точного аналитического решения дифференциального уравнения (2) при переменном поперечном сечении погонную массу стержня $\mu = \mu(x)$ и осевой момент инерции $I = I(x)$ выберем в форме экспоненциальной функции:

$$\mu = \mu_0 e^{\delta \frac{x}{l}}, \quad I = I_0 e^{\delta \frac{x}{l}}, \tag{15}$$

где l – длина балки, μ_0, I_0 и δ – постоянные величины.

Краевые условия зададим в виде выражений (4).

Подставив (15) в дифференциальное уравнение (2) и введя обозначения $x = l\tilde{x},\ \tilde{x} \in [0,1]$, $W = W_0 \tilde{w},\ \tilde{w} \in [0,1],\ W_0 = \mathrm{const},\ \tilde{\omega}^2 = \dfrac{\mu_0 l^4}{EI_0}\omega^2$, получим:

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} + 2\delta \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^3} + \delta^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\mu_0 l^4}{EI_0}\omega^2 \tilde{w} = 0. \tag{16}$$

Точное решение уравнения (16) имеет вид [7]:

$$\tilde{w} = e^{-\frac{\delta}{2}\tilde{x}} \left(C_1 e^{\lambda_1 \tilde{x}} + C_2 e^{-\lambda_1 \tilde{x}} + C_3 \sin(\lambda_2 \tilde{x}) + C_4 \cos(\lambda_2 \tilde{x})\right), \tag{17}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования, определяемые из краевых условий, а собственные числа λ_1 и λ_2 определяются формулами: $\lambda_1 = \sqrt{\tilde{\omega} + \dfrac{\delta^2}{4}}$ и $\lambda_2 = \sqrt{\tilde{\omega} - \dfrac{\delta^2}{4}}$.

Подставим (17) в (4) и получим систему из 4 нелинейных уравнений:

$$\tilde{w}(0) = C_1 + C_2 + C_4 = 0,$$

$$\frac{\partial \tilde{w}(0)}{\partial \tilde{x}} - k\frac{\partial^2 \tilde{w}(0)}{\partial \tilde{x}^2} = -\frac{\delta}{2}(C_1 + C_2 + C_4) + (C_1\lambda_1 - C_2\lambda_1 + C_3\lambda_2) - k\left[\frac{\delta^2}{4}(C_1 + C_2 + C_4) - \right.$$

$$\left. - \delta(C_1\lambda_1 - C_2\lambda_1 + C_3\lambda_2) + C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_1^2 - C_4\lambda_2^2\right] = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}(1)}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\delta^2}{4}\left[C_1 e^{\lambda_1} + C_2 e^{-\lambda_1} + C_3 \sin(\lambda_2) + C_4 \cos(\lambda_2)\right] - \delta\left[C_1\lambda_1 e^{\lambda_1} - C_2\lambda_1 e^{-\lambda_1} + \right.$$

$$\left. + C_3\lambda_2 \cos(\lambda_2) - C_4\lambda_2 \sin(\lambda_2)\right] + C_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1} + C_2\lambda_1^2 e^{-\lambda_1} - C_3\lambda_2^2 \sin(\lambda_2) - C_4\lambda_2^2 \cos(\lambda_2) = 0,$$

$$\frac{\partial^3 \tilde{w}(1)}{\partial \tilde{x}^3} = -\frac{\delta^3}{8}\left[C_1 e^{\lambda_1} + C_2 e^{-\lambda_1} + C_3 \sin(\lambda_2) + C_4 \cos(\lambda_2)\right] + \frac{3\delta^2}{4}\left[C_1\lambda_1 e^{\lambda_1} - C_2\lambda_1 e^{-\lambda_1} + \right.$$

$$\left. + C_3\lambda_2 \cos(\lambda_2) - C_4\lambda_2 \sin(\lambda_2)\right] - \frac{3\delta}{2}\left[C_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1} + C_2\lambda_1^2 e^{-\lambda_1} - C_3\lambda_2^2 \sin(\lambda_2) - \right.$$

$$\left. - C_4\lambda_2^2 \cos(\lambda_2)\right] + C_1\lambda_1^3 e^{\lambda_1} - C_2\lambda_1^3 e^{-\lambda_1} - C_3\lambda_2^3 \cos(\lambda_2) + C_4\lambda_2^3 \sin(.\lambda_2) = 0.$$

Решениями данной системы являются точные значения $\tilde{\omega}_m^T$, $m = \overline{1,5}$ приведенных частот собственных колебаний стержня.

ЭТАЛОННАЯ ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ, ИМЕЮЩАЯ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

Методом алгебраических полиномов были найдены расчетные значения первых пяти приведенных собственных частот $\tilde{\omega}_m^P$ при $\delta = -1$, $\delta = 1$ и $J = N - 1$ для $N = 11,\ 21,\ 51,101,\ 251,\ 501,$ 1001 при значениях коэффициента податливости k = 0,001; 0,01; 0,1; 0; 1; 10; 100.

Точность численных расчетов МАП5 оценивалось десятичным логарифмом модуля относительной ошибки [14]:

$$\lg|\,\delta\tilde{\omega}\,| = \lg\left|\frac{\tilde{\omega}_m^T - \tilde{\omega}_m^P}{\tilde{\omega}_m^T}\right|,\ m = \overline{1,5}. \tag{18}$$

Зависимости десятичных логарифмов относительной ошибки $\lg|\,\delta\tilde{\omega}_m\,|$ от десятичного логарифма числа отрезков сетки узлов $\lg M$ для стержня переменного сечения представлены в форме графиков на рис. 1, 2 для двух вариантов закрепления. Для остальных вариантов закрепления получены графики, практически идентичные графикам из рис. 1, 2.

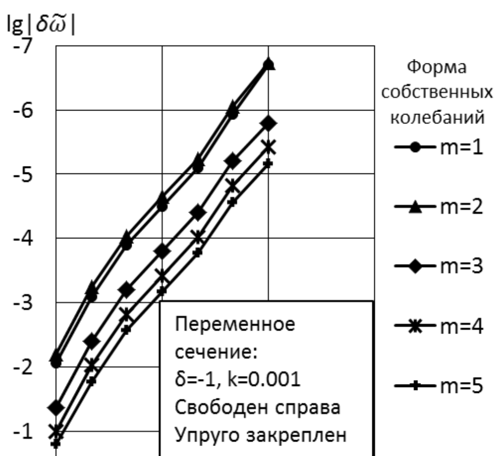

Рис.1. Вариант закрепления $\delta = -1$, $k = 0{,}001$

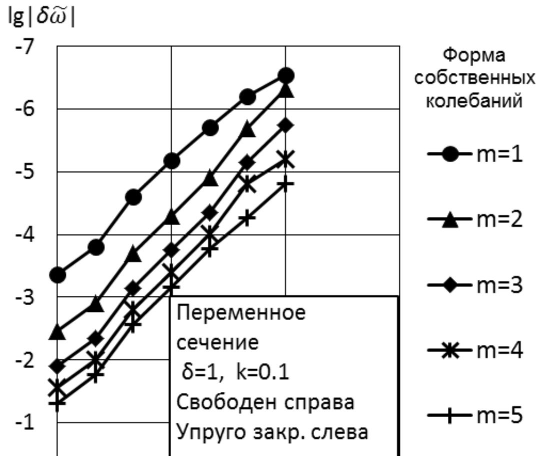

Рис.2. Вариант закрепления $\delta = 1$, $k = 0{,}1$

Из рис. 1, 2 видно, что предложенный МАП5 обеспечивает второй порядок точности по методике, изложенной в [14].

В итоге для стержня переменного сечения с упругим закреплением можно утверждать, что минимальная погрешность метода достигается при M=1000 для первой и второй собственных частот на уровне $\delta\tilde{\omega}_1 \cong 1\cdot 10^{-6}$, а для последующих трех частот $\delta\tilde{\omega}_m \le 1\cdot 10^{-4}$, $m = 3,4,5$.

УТОЧНЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ МЕТОДОМ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ

Далее решалась задача повышения точности расчетов методом экстраполяции с применением формулы (14). Для расчетов были выбраны значения частот собственных колебаний стержня при густоте сетки, равной $M_1 = 250$, $M_2 = 500$, $M_3 = 1000$ узлов. При этом для каждой формы колебаний m выбирались три расчетных значения частоты собственных колебаний $\omega_{M_1}^{(m)}, \omega_{M_2}^{(m)}, \omega_{M_3}^{(m)}$ и выполнялось присваивание

$$z_1 = \omega_{M_1}^{(m)}, \quad z_2 = \omega_{M_2}^{(m)}, \quad z_3 = \omega_{M_3}^{(m)}, \quad m = \overline{1,5}. \tag{19}$$

В итоге решалась система из 3 уравнений:

$$\begin{cases} z_1 = z + c_1 M_1^{-1} + c_2 M_1^{-2}, \\ z_2 = z + c_1 M_2^{-1} + c_2 M_2^{-2}, \\ z_3 = z + c_1 M_3^{-1} + c_2 M_3^{-2}, \end{cases} \tag{20}$$

из которой определялось точное значение $\tilde{\omega}_m^T$, равное z.

На рис. 3 – 8 для стержня переменного сечения с упругим закреплением показаны погрешности расчетов частот собственных колебаний МАП5 и погрешности результатов уточнения с помощью экстраполяции (затемненные точки).

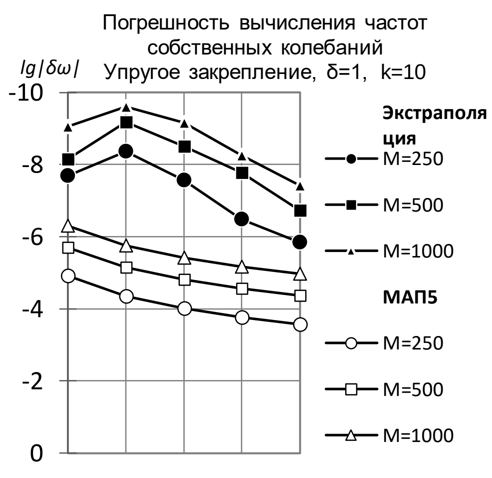

Рис. 3. Вариант закрепления
$\delta = 1,\ k = 10$

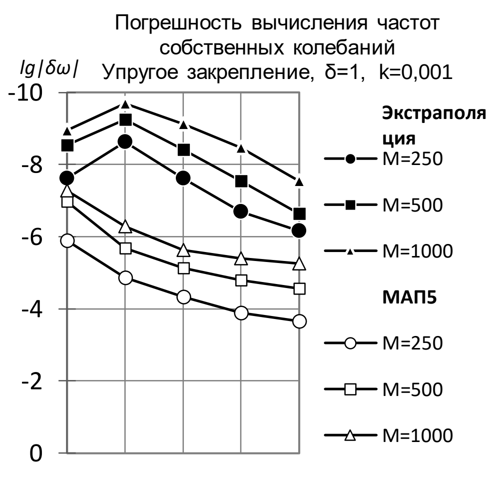

Рис. 4. Вариант закрепления
$\delta = 1,\ k = 0{,}001$

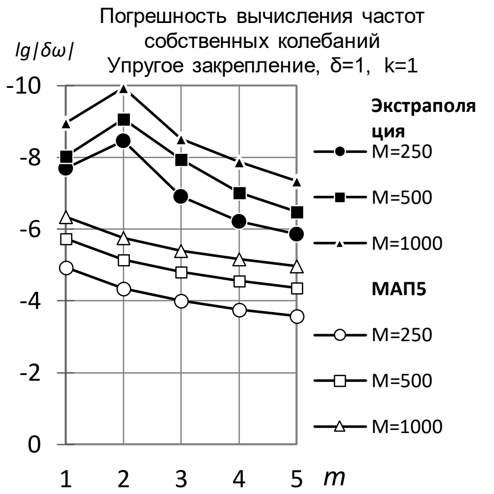

Рис. 5. Вариант закрепления $\delta = 1,\ k = 1$

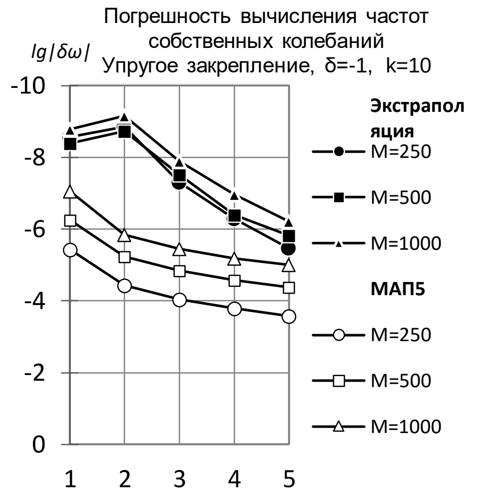

Рис.6. Вариант закрепления $\delta = -1,\ k = 10$

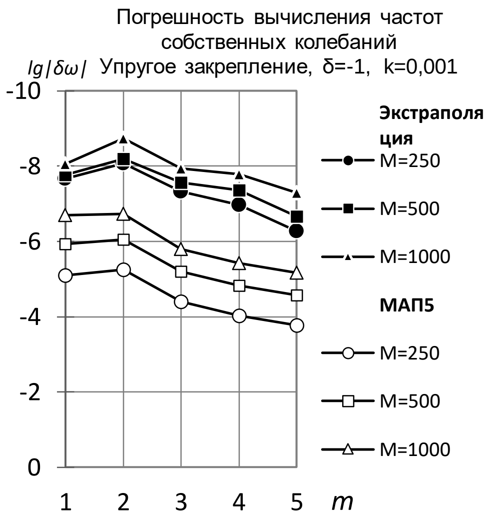

Рис. 7. Вариант закрепления $\delta = -1,\ k = 0{,}001$

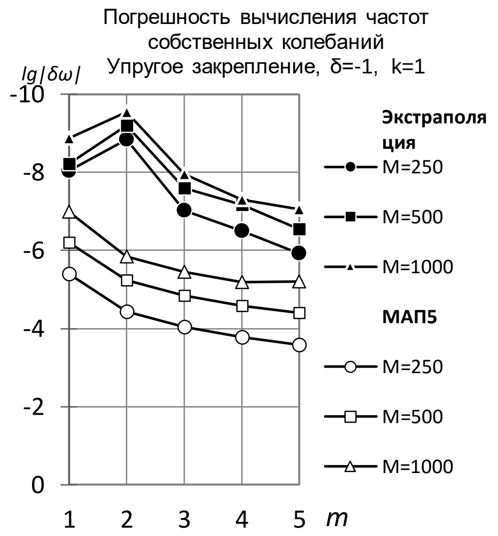

Рис. 8. Вариант закрепления $\delta = -1,\ k = 1$

Видно, что экстраполяция позволила повысить точность расчетов на два – три порядка, снизив погрешность расчета значений частот собственных колебаний для первых двух форм колебаний до величин $\delta\tilde{\omega} \cong 1\cdot 10^{-8}$, для следующих трех форм – до величин $\delta\tilde{\omega} \cong 1\cdot 10^{-6}$.

Таким образом, реализованный метод экстраполяции показал себя весьма эффективным средством повышения точности МАП5 при определении частот собственных колебаний стержня переменного сечения с упругим закреплением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод алгебраических полиномов, дополненный методом экстраполяции для определения частот собственных колебаний стержня переменного сечения с упругим закреплением. Показано, что предложенный метод имеет минимальную погрешность при числе отрезков сетки M =1000 для первых двух частот $\delta\tilde{\omega} \cong 1\cdot 10^{-8}$, а для последующих трех частот $\delta\tilde{\omega} \cong 1\cdot 10^{-6}$.

Такая низкая погрешность свидетельствует о высокой точности метода алгебраических полиномов с последующей экстраполяцией при решении задач нахождения собственных частот колебаний стержня переменного сечения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 560 с. [I. M. Babakov. Teoriya kolebanij (Oscillation theory), (in Russian). Moscow: Nauka, 1965. 560 p.]

2. **Павлов, В. П.** Возможности метода сплайнов и метода конечных элементов в задаче о больших перемещениях тонкого упругого стержня / В. П. Павлов, В. М. Кудоярова // Вестник УГАТУ. – 2018. – Т. 22, № 4(82). – С. 30-40. [V. P. Pavlov "*Spline – function method for solving thermal conductivity problems*", (in Russian), in Vestnik UGATU, 2018, no. 4(82), pp. 30-40.]

3. **Павлов В. П., Нусратуллина Л. Р.** Точные решения уравнения, описывающего поперечные колебания стержня с переменным поперечным сечением и их применение // Вестник Башкирского гос. университета. 2019. №4. С. 774-781. [V. P. Pavlov, L. R. Nusratullina, "*Exact solutions of the equation describing transverse vibrations of the rod with variable cross – section and their application*", (in Russian), in Vestnik BSU, no. 4, pp. 774-781, 2019.]

4. **Zhernakov V. S., Pavlov V. P., Kudoyarova V. M., Nusratullina L. R.** Pliability Identification of Elastic Support for Elastic Cantilevered Rod Based on Eigenfrequencies of its Oscillations // Atlantis Highlights in Computer Sciences: Proceedings of the 21st International Workshop on Computer Science and Information Technologies (CSIT 2019). 201. Vol. 3. p. 303-309.

5. **Pavlov V. P., Nusratullina L. R., Kudoyarova V. M.** Eigenfrequency spectrum analysis of bending vibrations for naturally swirled rod // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 709 (2020) 022059

6. **Нусратуллина, Л. Р.** Влияние коэффициента жесткости опор на спектр собственных частот поперечных колебаний стержня переменного сечения // Фунд. и прикл. проблемы науки: мат. XIV Межд. симпозиума. М.: РАН, 2019. С. 53-61. [L. R. Nusratullina, "*The effect of the stiffness coefficient of the supports on the spectrum of natural frequencies of transverse vibrations of the rod of variable cross-section*", Fundamental and Applied Problems of Science: Proc. of the XIV Intern. Symposium. Moscow: RAS, pp. 53-61, 2019.]

7. **Павлов В. П., Нусратуллина, Л. Р.** Метод расчета собственных частот и форм поперечных колебаний стержня переменного сечения с упругим закреплением // Вестник УГАТУ. 2019. №3. С. 24-38. [V. P. Pavlov, L. R. Nusratullina, "*The method of calculating natural frequencies and forms the transverse vibrations of a rod variable cross-section with elastic securing*", (in Russian), in Vestnik UGATU, 2019, no. 3, pp. 24-38.]

8. **Павлов В. П., Нусратуллина Л. Р.** Собственные изгибные колебания естественно закрученного стержня // Вестник УГАТУ. 2019. №4. С. 33-41. [V. P. Pavlov, L. R. Nusratullina, "*Natural bending vibrations of naturally twisted rod*", (in Russian), in Vestnik UGATU, 2019, no. 4 (78), pp. 33-41.]

9. **Нусратуллина Л. Р.** Оценка влияния инерции вращения стержня на вычисление частот собственных колебаний // Наукоемкие технологии в машиностроении: материалы Всероссийской научно-практическая конференции. Уфа: РИК УГАТУ, 2020. С. 184-190. [L. R. Nusratullina, "*Evaluation of the effect of rod rotation inertia on the calculation of the natural frequencies*", High-end Technologies in Mechanical Engineering: Proceedings of the All-Russian Scientific and Practical Conference, (in Russian), RIK UGATU, 2020, pp. 184-190.]

10. **Житников В. П., Шерыхалина Н. М., Федорова Г. И., Соколова А. А.** Методика качественного улучшения результатов вычислительного эксперимента. // Вестник УГАТУ. 2021. Т. 3. № 1(5). С. 58-64. [V. P. Zhitnikov, N. M. Sherykhalina , G. I. Fedorova , A. A. Sokolova, "*The qualitative improvement methodology of the computational experiment results*", (in Russian), in Vestnik UGATU, 2021, vol. 3, no. 1(5), pp. 58-64.]

11. **Zhitnikov V. P., Sherykhalina N. M., Zhitnikova N. I., Muksimova R. R.** Influence of various components of errors on the results of approximation using orthogonal functions// IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 1047 (2021) 012098.

12. **Житников В. П., Шерыхалина Н. М., Муксимова Р. Р.** Исследование погрешностей при решении задач для простейших уравнений математической физики итерационными методами. // Сибирский журнал вычислительной математики. 2021. Т. 24. № 2. С. 131-144. [N. M. Sherykhalina "*Investigation of errors in solving problems for simple equations of math-ematical physics by iterative methods*", (in Russian), in Sibirskij Zhurnal Vychislitel'noj Matematiki, 2021, vol. 24, no. 2, pp. 131-144.]

13. **Житников В. П., Шерыхалина Н. М.** Моделирование течений весомой жидкости с применением методов многокомпонентного анализа. Уфа: Гилем, 2009, 336 с. [V. P. Zhitnikov, N. M. Sherykhalina, "*Modeling of flows of a weighty liquid using multicomponent analysis methods",* (in Russian), Ufa: Gilem, 2009, 336 p.]

14. **Павлов В. П.** Метод сплайнов и другие численные методы решения одномерных задач механики деформируемых тел. Уфа.: УГАТУ, 2003. 197 с. [V. P. Pavlov. *"The spline method and other numerical methods for solving one-dimensional problems in the mechanics of deformable bodies",* (in Russian). Ufa: USATU, 2003. 197 p.].

ОБ АВТОРАХ

ПАВЛОВ Виктор Павлович, профессор кафедры сопротивления материалов УУНиТ, дипл. инж. по авиац. двигателям (УАИ, 1973). Доктор техн. наук по динамике и прочности (УГАТУ, 2005). Иссл. в обл. динамики и прочности конструкций из композиционных материалов.

НУСРАТУЛЛИНА *Лилия Ринатовна*, ст. преп. каф. искусственного интеллекта и перспективных математических исследований УУиНТ. Дипл. математик (БашГУ, 2003). Готовит дис. По математическому моделированию колебаний упруго закрепленных стержней с переменным сечением.

НУСРАТУЛЛИН Эдуард Марсович, доцент каф. искусственного интеллекта и перспективных математических исследований. Дипл. магистр математики (БашГУ, 2004). Кандидат техн. наук по динамике и прочности (УГАТУ, 2012). Иссл. в обл. динамики и прочности конструкций из композиционных материалов.

METADATA

Title: Refining the results of numerical calculations of the frequencies of transverse vibrations of a rod of variable cross-section with elastic fixation by extrapolation method.

Authors: V.P. Pavlov[1], L.R. Nusratullina[2], E.M. Nusratullin[3]

Affiliation:

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia.

Email: [1]victor.pavlov.51@yandex.ru, [2]mardliliya@yandex.ru, [3]nusratullinem@rambler.ru

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa University of Science and Technology), vol. 27, no. 3 (101), pp. 29-37, 2023. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: The article describes a numerical experiment with the results of calculating the natural frequencies of transverse vibrations of a rod of variable cross-section with elastic fixation at one of the ends. The possibility of refining by extrapolation the calculated values of natural frequencies obtained by the method of algebraic polynomials of the fifth degree is analyzed. It is shown that extrapolation made it possible to increase the accuracy of calculations by the numerical method by 2-3 orders of magnitude.

Key words: rods of variable cross-section; natural oscillation frequencies; rod characteristics; extrapolation methods

About authors:

PAVLOV, Victor Pavlovich, Prof. at the Dept. of Strength of Materials, Ufa University of Science and Technology. Dipl. Engineer for Aircraft Engines (UAI, 1973). Dr. of Tech. Sci. (USATU, 2005).

NUSRATULLINA, Liliya Rinatovna, Senior Lecturer at the Department of Artificial Intelligence and Advanced Mathematical Research. Dipl. of specialist in mathematics (BSU, 2003).

NUSRATULLIN Eduard Marsovich, Associate Professor at the Department of Artificial Intelligence and Advanced Mathematical Research, Dipl. of specialist in mathematics (BSU, 2004).