

УДК 539.55

О КРИТЕРИЯХ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ ПРИ ЖЕСТКОМ НАГРУЖЕНИИ

К. Д. Каримбаев¹, Д. С. Пальчиков²

¹kem@ciam.ru, ²palchikov@rtc.ciam.ru

¹⁻² ФГУП «Центральный институт авиационного моторостроения имени П. И. Баранова»
(ФГУП «ЦИАМ им. П. И. Баранова»)

Поступила в редакцию 30 сентября 2015 г.

Аннотация Рассматривается задача Эйлера о потере устойчивости центрально-сжимаемых стержней постоянного поперечного сечения, средней гибкости - т.е. тех у которых критические напряжения превышают предел пропорциональности и потеря устойчивости происходит в упруго-пластической области работы материала. В статье исследованы результаты построения полной кривой критических напряжений титанового сплава ВТ8-1 по кривой деформирования, на основе различных подходов решения этой задачи с использованием касательного, приведенного и секущего модулей. Были специально изготовлены образцы такой гибкости, при которой эти подходы предсказывали качественно различные результаты: либо потеря устойчивости с продольным прогибом, либо разрушение без потери устойчивости.

Эксперименты показали, что в стержнях средней гибкости изготовленных из материала ВТ8-1 потеря устойчивости происходит сразу же, при появлении пластических деформаций, при напряжениях близких к пределу пропорциональности.

Ключевые слова: задача Эйлера; устойчивость; пластичность

ВВЕДЕНИЕ

Основные формулы Эйлера для критических параметров по потере устойчивости центрально-сжатых упругих стержней постоянного поперечного сечения могут быть выражены через P – сжимающую нагрузку, σ – сжимающие напряжения или ε – осевую деформацию сжатия:

$$\begin{aligned} P_{кр} &= \left(\frac{\pi}{\mu l}\right)^2 EJ \\ \sigma_{кр} &= \left(\frac{\pi}{\mu l}\right)^2 \frac{EJ}{A} \\ \varepsilon_{кр} &= \left(\frac{\pi}{\mu l}\right)^2 \frac{J}{A} \end{aligned} \quad (1)$$

где E – модуль упругости, J – минимальный момент инерции, A – площадь поперечного сечения стержня, l – длина стержня.

Коэффициент μ зависит от граничных условий задачи: при шарнирном закреплении концов стержня $\mu = 1$, при жестком $\mu = 0,5$.

После введения гибкости стержня $\lambda = \mu l \sqrt{A/J}$, формулы (1) принимают вид:

$$P_{кр} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 EA,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{кр} &= \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 E, \\ \varepsilon_{кр} &= \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2. \end{aligned} \quad (2)$$

По отношению к потере устойчивости стержни обычно делят на три класса:

1 – гибкие стержни, критические напряжения которых ниже предела пропорциональности и для которых верны формулы Эйлера;

2 – стержни средней гибкости, критические напряжения которых превышают предел пропорциональности, но меньше предела прочности при сжатии;

3 – короткие стержни, которые разрушаются при сжатии без потери устойчивости.

Теория устойчивости сжатых стержней за пределом упругости рассматривалась в работах [1–4] и др.

По касательно-модульному подходу Энгесера–Шенли при изгибе стержня с продолжением догрузки критические напряжения определяются по формуле (3)

$$\sigma_{кр} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 E_{кас}, \quad (3)$$

где касательный модуль

$$E_{кас} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \tag{4}$$

определяется по кривой деформирования материала $\sigma = f(\varepsilon)$ в точке, до которой сохраняется прямолинейная форма равновесия стержня.

По теории Кармана, учитывающей, что при возникновении изгиба стержня в некоторой точке кривой деформирования $\sigma_{кр} = f(\varepsilon_{кр})$ разгрузка волокон на выпуклой стороне происходит упруго, критические напряжения определяются по формуле (5)

$$\sigma_{кр} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 E_T \tag{5}$$

где E_T – приведенный модуль, который зависит от формы поперечного сечения стержня, модуля упругости и касательного модуля в указанной точке.

В работе [5] было предложено использовать деформационный критерий устойчивости (2), определяющий критическую деформацию в зависимости только от геометрических параметров стержня, не только в упругой области, для которой он строго выводится, но и при упруго-пластических деформациях.

В этом случае критическое напряжение при гибкости стержня λ будет определяться формулой

$$\sigma_{кр} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 E_{сек}, \tag{6}$$

где, по определению, для любой точки диаграммы деформирования $\sigma = f(\varepsilon)$, в том числе той, в которой анализируется потеря устойчивости, секущий модуль равен

$$E_{сек} = \frac{\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon}. \tag{7}$$

На рис.1 показан начальный участок кривой деформирования дюралюминия Д16[2], откуда видно соотношение между модулями $E_{кас}$ и $E_{сек}$. В упругой области все модули совпадают с модулем Юнга E , а при развитии пластической деформации убывают, но с разным темпом.

Касательный модуль может быть равен нулю при наличии площадок текучести, в то время как секущий модуль всегда отличен от нуля.

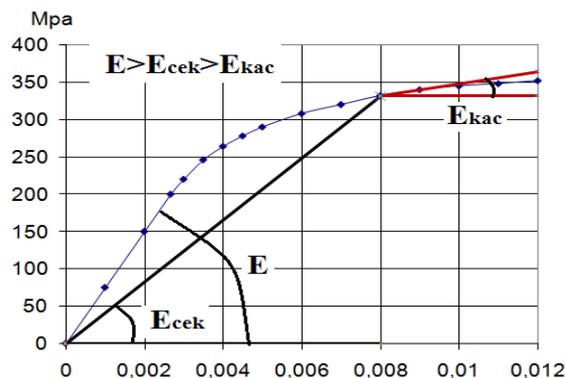


Рис. 1. Начальный участок кривой деформирования дюралюминия Д16

ПРОВЕРКА УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ЗАДАННОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Проверка устойчивости прямолинейного стержня заданной гибкости λ в некоторой точке диаграммы деформирования (ε, σ) , в которой известны все три модуля $E_{кас}$, E_T и $E_{сек}$, может быть проверена путем сравнения зависящего от них критического напряжения $\sigma_{кр}$ превышающего предел пропорциональности с текущим напряжением $\sigma = f(\varepsilon)$.

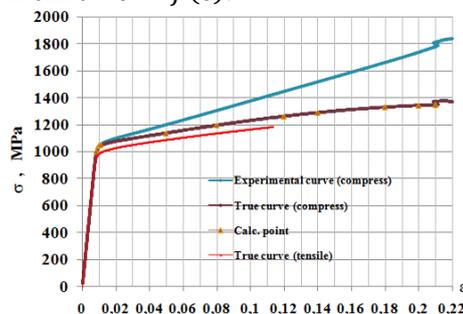


Рис. 2. Кривые деформирования титанового сплава ВТ8-1 при комнатной температуре

На рис. 2 приведены диаграммы деформирования титанового сплава ВТ8-1 при растяжении и сжатии. Истинные диаграммы пересчитаны на меняющуюся площадь поперечного сечения.

На рис. 3 представлены зависимости критических напряжений $\sigma_{кр}$ сплава ВТ8-1 от гибкости λ , рассчитанные по формулам (3), (5) и (6) по модулям, соответствующим их значениям в отмеченных на рис. 2 точках кривой истинных напряжений сжатия. Линия $\sigma_{пр} = 1003 \text{ МПа}$ проведена в соответствии с пределом пропорциональности.

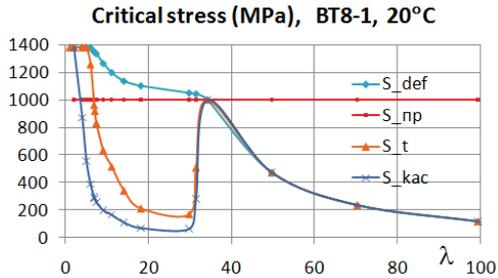


Рис. 3. Кривые критических напряжений VT8-1 по исследуемым критериям.

Критические напряжения, рассчитанные по формулам (3) и (5) в большом диапазоне при средней гибкости оказываются значительно меньше напряжений пропорциональности $\sigma_{кр} < \sigma_{пр}$, что противоречит определению стержней средней гибкости.

В таких парадоксальных случаях, в настоящее время, для получения зависимости критических напряжений от гибкости стержня $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ рекомендуют [2], [3] находить обратную функцию $\lambda = \lambda(\sigma_{кр})$. Для этого принимают $\sigma_{кр} = \sigma(\varepsilon)$ затем по кривой деформирования определяют значения модулей в соответствии с выбранным подходом и при данном напряжении вычисляют гибкости по формулам

$$\lambda_{кac} = \pi \sqrt{E_{кac} / \sigma_{кр}} \quad (8)$$

и

$$\lambda_{T} = \pi \sqrt{E_{T} / \sigma_{кр}} \quad (9)$$

В статье такой подход не рассматривается, но формулы (8) и (9) используются для определения граничных значений гибкости, которые разделяют короткие стержни от стержней средней гибкости. Для этого в формулы (8) и (9) вместо критических напряжений необходимо взять значения предельных напряжений, при которых разрушаются короткие стержни. При этом очевидно, что так как $E_{кac} \neq E_{T}$, то и $\lambda_{кac} \neq \lambda_{T}$.

На рис. 4 показаны зависимости критических напряжений от гибкости в области ее малых значений, где проходит граница, разделяющая стержни средней гибкости от коротких стержней в соответствии с рассматриваемыми подходами.

В таблице приведены значения граничных гибкостей, которые получены для рассматриваемых подходов применительно к стержням из титанового сплава VT8-1 исследованных при комнатной температуре.

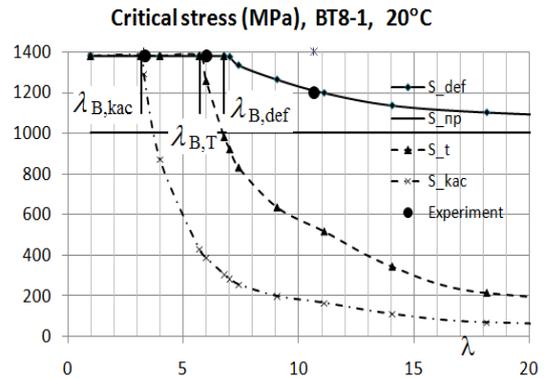


Рис. 4. Кривые критических напряжений в области малых гибкостей.

Стержни из материала VT8-1, сжимаемые при комнатной температуре, разрушаются без потери устойчивости при напряжениях $\sigma_B \approx 1380 \text{ МПа}$ и деформациях $\varepsilon_B \approx 0.21$. Из рис.4 видно, что при очень малых гибкостях, где $\sigma_{кр} = \sigma_B = 1380 \text{ МПа}$, следует ожидать, что поломка образцов произойдет без потери устойчивости.

В таблице приведены значения гибкостей λ_b и отвечающих им модулей E_b , при которых критические напряжения по формулам (5, 6 и 7) достигают значения предела прочности на сжатие.

Таблица 1

Граничные гибкости и расчетные модули по различным подходам для стержней из VT8-1

	кac	T	def
λ_B	3,18	5,73	6,78
E_B , МПа	1411	4584	6431

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ЖЕСТКОМ НАГРУЖЕНИИ

Для проведения экспериментов по сопоставлению рассматриваемых критериев устойчивости были изготовлены образцы (рис. 5) – стержни диаметром $6^{\pm 0.05}$ мм различной длины – $10^{\pm 0.01}$ мм, $18^{\pm 0.01}$ мм, $32^{\pm 0.01}$ мм, которые соответствовали гибкостям 3,33; 6,0 и 10,67, отмеченными на рис. 4. вертикальными линиями.

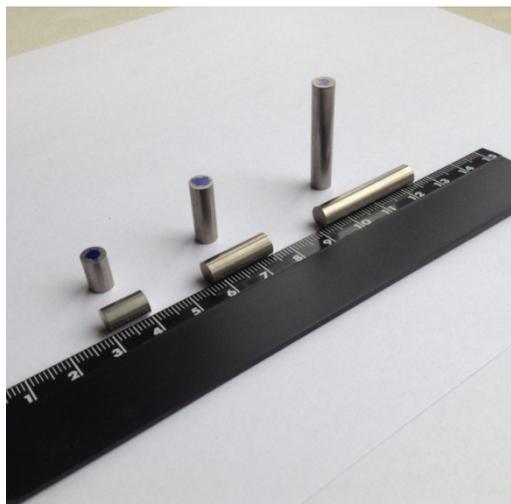


Рис. 5. Образцы в виде цилиндров с круглым поперечным сечением

Гибкости λ изготовленных образцов рассчитывались по формуле

$$\lambda = \mu l \sqrt{A/J}$$

при значениях $\mu = 0,5$ и $\mu = 1$, но приведены только для значения $\mu = 0,5$, соответствующего условию отсутствия поворотов концов образцов, которое оказалось реализованным во всех проведенных экспериментах.

Для исключения сил трения концевые сечения образцов смазывались в соответствии с требованиями ГОСТ 25.503-97, что обеспечивало отсутствие краевых эффектов в виде бочкообразования (рис. 7, 10).

Испытания на сжатие проводились на машине (рис. 6) с оптической системой измерения перемещений в двух направлениях на поверхности образца, что позволяет получать истинные кривые деформирования сжатия образцов с учетом поперечного растяжения. Синхронно с перемещениями измерялась динамометром сила сжатия.

Кривая деформирования (рис. 2) получена на этой же машине на образцах из ВТ8-1, соответствующих ГОСТ 25.503-97, испытанных при температуре 20 °С и разрушившихся без потери устойчивости (рис. 7).



Рис. 6. Испытательная машина с оптической системой измерения деформаций Vic-3D



a



б

Рис. 7. Стандартные образцы на сжатие: *a* – до испытаний; *б* – после испытаний

При испытаниях установленный по центру образец сдавливается двумя станинами, которые приближаются друг к другу со скоростью 1,5 мм/с, обеспечивая «жесткое» нагружение. Фотографии делаются с двух перпендикулярно расположенных ракурсов. Полученная экспериментальная кривая деформирования для любой точки указанного стержня состоит из 1600 точек.

Определение момента потери устойчивости производилось по следующей методике:

1. В среднем сечении, перпендикулярном оси стержня, выбираются какие-нибудь две крайние точки P1 и P2, как показано на рис. 8.

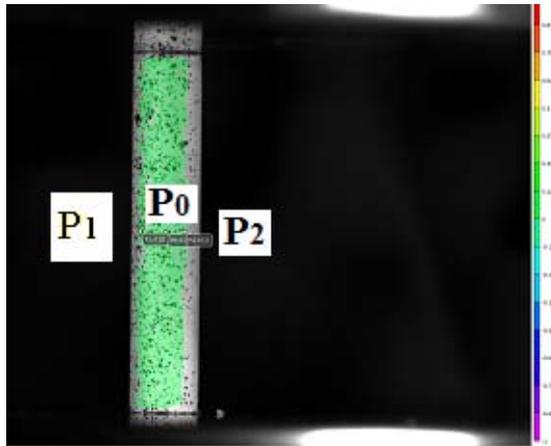


Рис. 8. Выбранные точки P1 и P2

До достижения потери устойчивости сжимающие деформации в осевом направлении повышаются (по абсолютной величине) во всех точках указанного сечения в соответствии с возрастающей нагрузкой.

2. После превышения критической нагрузки в рассматриваемых точках изменение осевой деформации различно. С вогнутой стороны постоянно увеличивается, а с выпуклой стороны, в начале скорость увеличения уменьшается, а потом начинают уменьшаться и абсолютное значение деформаций, (смотри на рис. 9, для указанных двух точек относящейся к испытанию образца с гибкостью 10,67).

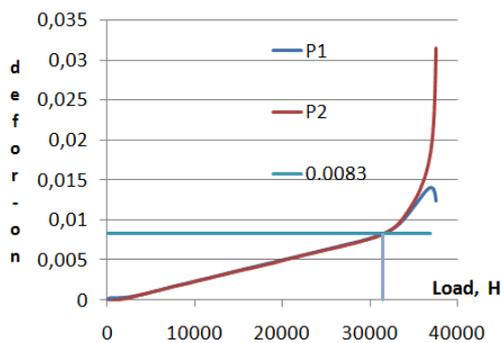
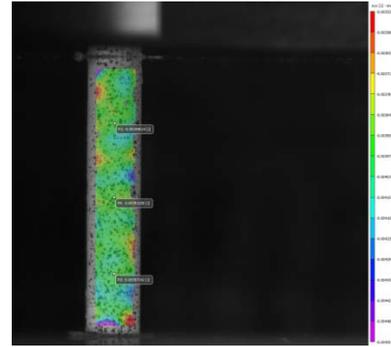
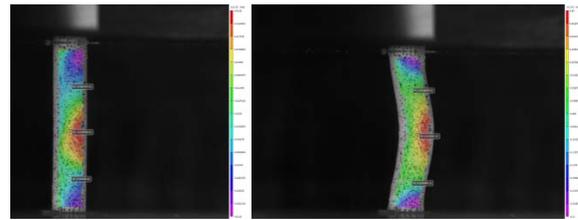


Рис. 9. Графики изменения деформаций в выбранных точках P1 и P2

3. В качестве момента потери устойчивости приблизительно принималась последняя точка, в которой графики изменения деформаций в точках P1 и P2 совпадали.



a



б

Рис. 10. Поля деформаций в разные моменты:
a – докритическое состояние;
б – закритические состояния

Реализованные условия на торцевой части образцов, определяющие значение коэффициента μ , были проверены по результатам эксперимента. Из рис. 10 видно, что поворота торца деформированного образца, даже в закритической области (при условии, что значение средней осевой деформации сжатия не превышает 104 % критической деформации) не наблюдается, что подтверждает условие $\mu = 0,5$, которое соответствует жесткому закреплению торца в момент потери устойчивости.

При прохождении критического момента нагрузка продолжала некоторое время монотонно увеличиваться и лишь потом начинала убывать. Это связано с тем, что поперечное выпучивание при потере устойчивости при «жестком» нагружении является непрерывным процессом, как по деформациям, так и по напряжениям.

После фиксации момента потери устойчивости нагружение прекращалось, и образцы не доводились до разрушения, чтобы не эксплуатировать машину в экстремальных условиях.

Образцы, которые не теряли устойчивости, доводились до разрушения.

Крупными точками на рис. 4 представлены экспериментальные значения напряжений при потере устойчивости или разрушении, полученные на стержнях с разными гибкостями.

Результаты проведенных испытаний показали, что:

1. Образцы длиной 10 и 18 мм (гибкостью 3,33 и 6,0) при сжатии разрушаются без потери устойчивости;

2. Образцы длиной 32 мм (гибкостью 10,67), при сжатии потеряли устойчивость при напряжении $\sigma = 1003$ МПа (деформации 0,00831), что в принципе совпадает с пределом пропорциональности рассматриваемого материала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные расчетно-экспериментальные исследования устойчивости сжатых стержней при жестком нагружении за пределами упругости показали:

1. При очень малой гибкости стержня разрушение при упруго-пластическом сжатии происходит без потери устойчивости.

2. При напряжениях, выше критических, происходит постепенное поперечное выпучивание образца с неравномерным распределением по поперечному сечению деформаций и напряжений, которые плавно изменяются по мере сжатия образца.

3. Показано, что потеря устойчивости стержня средней гибкости из материала ВТ8-1, происходит при истинных напряжениях сжатия совпадающих с пределом пропорциональности.

Авторы выражают благодарность Б. Ф. Шорру и признательны коллегам А. Н. Серветнику, И. В. Потепаловой, А. П. Незаметдинову и Е. П. Кузьмину за оказанную помощь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ясинский Ф. С. «Опыт развития теории продольного изгиба», СПб: Институт инженеров путей сообщения, 1893. [Yasinsky F. S. "Experience of development of the theory of a longitudinal bend", SPb: Institute of engineers of means of communication, 1893.]

2. Вольмир А. С. «Устойчивость деформируемых систем», М., «Наука», 1967. [Volmir A. S. "Stability of deformable systems", M., "Science", 1967.]

3. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник. Под ред. Биргера И. А., Пановко Я. Г., Т. 3. М.: Машиностроение, 1968. [Durability. Stability. Fluctuations. Reference book. Under the editorship of Birger I. A., Panovko Ya. G., T. 3. M.: Mechanical engineering, 1968.]

4. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б. Расчет на прочность деталей машин, изд. 3, М.: Машиностроение, 1979. [Birger I. A., Shorr B. F., Iosilevich G. B. Calculation on durability of details of cars, prod. 3, M.: Mechanical engineering, 1979.]

5. Каримбаев К. Д., Викулин А. В., Чеснова В. А., Ярославцев Н. Л. Расширение деформационного критерия потери устойчивости центрально-сжатых стержней в упруго-пластическую область. // Вестник МАТИ, Научные труды

№ 23 (95). 2014. С. 61–66. [Karimbayev K. D., Vikulin A. V., Chesnova V. A., Yaroslavtsev N. L. Expansion of deformation criterion of loss of stability of the central squeezed cores in elasto-plastic area.//Bulletin of MATI, Scientific works No. 23 (95). 2014. Page 61-66.]

ОБ АВТОРАХ

Каримбаев Камалиддин Джамолдинович, канд. техн. наук. Нач. сектора ФГУП «ЦИАМ им. П. И. Баранова» отделения «динамика и прочность». Область научных интересов: прочностная надежность турбомашин

Пальчиков Денис Сергеевич, инж. 1-й кат. ФГУП «ЦИАМ им. П. И. Баранова» отд. «динамика и прочность». Область научных интересов: прочностная надежность турбомашин.

METADATA

Title: About criteria of loss of stability of the squeezed cores outside elasticity at rigid loading.

Authors: ¹Karimbayev K.D., ²Palchikov D.S.

Affiliation: Federal State Unitary Enterprise CIAM of P. I. Baranov.

Email: ¹kem@ciam.ru, ²palchikov@rtc.ciam.ru.

Language: Russian

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 19, no. 3 (69), pp. 126-131, 2015. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print),

Abstract: Euler's buckling problem for compressed rods with uniform cross section is considered. Rods are designed to have a middle flexibility, i.e. its critical stress values greater than an elastic limit of material, which leads buckling to occur with plastic strains in material. In this paper, results of construction of critical stress curves are provided. Curves is based on experimental data of VT8-1 specimens and constructed using stress-strain curve and tangent, secant and Carman modulus approaches. Special specimens were designed which flexibility made it possible to approaches mentioned above to predict qualitatively various results such as buckling with longitudinal deflection or destruction without buckling. Experimental tests have shown that within yield region buckling occurs at true compress stresses equal to elastic limit of material.

Key words: Euler's problem; buckling; plasticity.

About authors:

KARIMBAEV Kamaliddin Djamoldinovich, Head of the FSUE "CIAM named after P.I. Baranov". Dipl. mechanic (Moscow State University named after M.V.Lomonosov, 1977).Candidate of tehn. sciences on the dynamics and strength of aircraft engine parts (1985). Investigations of the integrity reliability of turbomachinery.

PALTHIKOV Denis Sergeevich, the engineer of the 1st category of the FSUE "CIAM named after P.I. Baranov" of office "dynamics and durability". Investigations of the integrity reliability of turbomachinery.