

УДК 519.6

## МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ

В. П. Житников<sup>1</sup>, О. Р. Зиннатуллина<sup>2</sup>, Н. И. Житникова<sup>3</sup>

<sup>1</sup>zhitnik@ugatu.ac.ru, <sup>2</sup>olga\_zr@mail.ru, <sup>3</sup>zhitnikova\_ni@mail.ru

ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 25 февраля 2015 г.

**Аннотация.** Предложены адаптивные численные методы, позволяющие эффективно решать задачи моделирования осесимметричных полей с помощью интегральных преобразований аналитических функций комплексного переменного. Методы основаны на применении квадратурных формул типа Гаусса с переменным положением узловых точек, которое определяется особенностями подынтегральной функции. С помощью численной фильтрации результатов, полученных при различном количестве узловых точек, показана эффективность предложенных методов.

**Ключевые слова:** осесимметричное поле; конформное отображение; интегральные преобразования; адаптивные квадратурные формулы; численная фильтрация.

### ВВЕДЕНИЕ

Вычисление продольной и радиальной составляющих напряженности осесимметричного поля сводится к численному интегрированию аналитической функции комплексного переменного  $f(z)$  по формулам Г. Н. Положего [1] в узловых точках коллокации  $z(\sigma_k)$ ,  $k = 1, \dots, N$

$$\operatorname{Im} \int_0^{\sigma_k} f[z(\sigma)] \frac{d\sigma}{\sqrt{(z(\sigma) - z(\sigma_k))(z(\sigma) - \bar{z}(\sigma_k))}}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\operatorname{Im} z(\sigma_k)} \operatorname{Im} \int_0^{\sigma_k} \frac{f[z(\sigma)](z(\sigma) - \operatorname{Re} z(\sigma_k)) d\sigma}{\sqrt{(z(\sigma) - z(\sigma_k))(z(\sigma) - \bar{z}(\sigma_k))}}. \quad (2)$$

Подынтегральные функции (1), (2) содержат особенности, которые требуют применения специальных численных методов. Обычно численное интегрирование производится с помощью квадратурной формулы наивысшей алгебраической степени точности (по формуле Гаусса [2]).

### 1. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ПОЛОЖЕГО ПРИ ПРЯМОМ ПРИМЕНЕНИИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ГАУССА

При вычислении интегралов Г. Н. Положего (1), (2) отрезок интегрирования  $\sigma \in [0, \sigma_{\max}]$  разбивается на  $n$  отрезков узловыми точками  $\sigma_m$  (рис. 1, а).

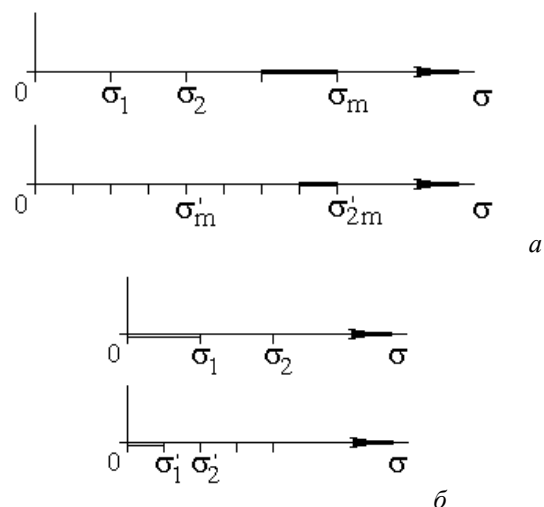


Рис. 1. Разбиение отрезка интегрирования

Выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части госзадания образовательным организациям высшего образования.

На каждом  $m$ -м отрезке вычисляется интеграл с помощью некоторой квадратурной формулы.

На первый взгляд удобно использовать формулу наивысшей алгебраической степени точности [2] с весовой функцией, равной 1 на всех отрезках, за исключением последнего, содержащего точку сингулярности подынтегральной функции. На этом последнем отрезке можно использовать формулу, где соответствующая особенность учитывается в весовой функции [2].

Рассмотрим интеграл, подобный (1),

$$\int_0^h \frac{d\sigma}{\sqrt{(\sigma - t_0)(\sigma + t_0)}} \quad (3)$$

при  $t_0 = 2h = \sigma_2$ . Такой случай вызывается необходимостью вычисления значений интегралов в каждой узловой точке, в том числе и при  $\sigma = \sigma_2$  (рис. 1, б).

Производя замену переменных

$$t = h \frac{x+1}{2}, \quad dt = \frac{h}{2} dx$$

(при этом отрезок интегрирования перейдет в  $[-1, 1]$ ), получим следующий интеграл

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(h \frac{x+1}{2} - 2h\right) \left(h \frac{x+1}{2} + 2h\right)}} = \\ = -i \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(3-x)(x+5)}} = -i \frac{\pi}{6}. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, значение представленного интеграла не зависит от величины шага  $h$ . Согласно [2], не зависит от  $h$  и погрешность вычисления интеграла. Сходимость к точному решению при  $h \rightarrow 0$  отсутствует.

Ухудшение сходимости может также вызываться тем, что увеличение точности в алгоритме решения общей задачи достигается путем уменьшения шага разбиения. При этом особенность подынтегральной функции при  $z=z_0$  учитывается только при интегрировании на ближайшем к особой точке отрезке. При уменьшении шага уменьшается и величина этого отрезка (рис. 1, а). На большей части отрезков особенность не учитывается.

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ПОЛОЖЕГО

Для устранения причины несходимости можно применить разные приемы. Однако при этом необходимо учесть, что для того, чтобы время счета при увеличении числа узлов коллокации не росло слишком быстро, необходимо сохранение числа и расположения узлов квадратурной формулы внутри каждого отрезка инте-

рирования между двумя узлами коллокации. То есть, задача вычисления  $n$  интегралов с точки зрения оптимизации процесса вычисления не эквивалентна задаче вычисления одного интеграла, которая обычно рассматривается в литературе. Поэтому предлагается использовать специальные квадратурные формулы, учитывающие наличие знаменателя подынтегральной функции.

По аналогии с методом Гаусса потребуем выполнения следующих условий

$$A_1 + A_2 + A_3 = \int_0^1 x^0 \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x+a)}} = B_0, \quad (5)$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = \int_0^1 x \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x+a)}} = B_1,$$

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 = \int_0^1 x^2 \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x+a)}} = B_2,$$

где

$$B_0 = \arcsin \frac{a-b+2}{a+b} - \arcsin \frac{a-b}{a+b},$$

$$B_1 = \sqrt{ab} - \sqrt{(b-1)(a+1)} - \frac{a-b}{2} B_0.$$

$$\begin{aligned} B_2 = \left( 3 \frac{a-b}{4} - \frac{1}{2} \right) \sqrt{(b-1)(a+1)} - 3 \frac{a-b}{4} \sqrt{ab} + \\ + \left[ \frac{(a+b)^2}{8} + \frac{(a-b)^2}{4} \right] B_0. \end{aligned}$$

Решение этой системы 3 линейных относительно  $A_j$  уравнений запишется в виде

$$A_3 = \frac{B_2 - (x_1 + x_2)B_1 + x_1 x_2 B_0}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)},$$

$$A_2 = \frac{B_1 - x_1 B_0 - (x_3 - x_1)A_3}{x_2 - x_1},$$

$$A_1 = B_0 - A_2 - A_3.$$

Значения узлов квадратурной формулы возьмем из [2] при  $n=3$ :  $\tilde{x}_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ ,  $\tilde{x}_2 = 0$

$$\tilde{x}_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Этот выбор узлов обусловлен следующими соображениями. Поскольку невозможно выбирать узлы в соответствии с конкретным расположением особенностей, то выберем их так, чтобы при удалении особенностей квадратурная формула переходила в наиболее точную. Эксперимент показывает, что такой подход оправдывает себя. Преобразуем эти значения к отрезкам

нашей квадратурной формулы:  $x = \frac{\tilde{x} + 1}{2}$ ,

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{3}{5}} \right), x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{3}{5}} \right).$$

Для оценки погрешности и ее составляющих использовался метод численной фильтрации, изложенный в [3, 4]. На рис. 2, 3 оценки погрешности представлены на графике в виде зависимости  $-\lg \Delta$  (десятичного логарифма относительной погрешности) от числа узлов коллокации  $n$  в логарифмической шкале.

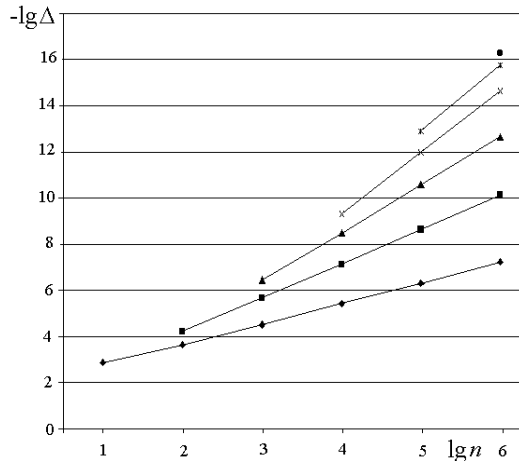


Рис. 2. Оценка погрешности первого метода

Нижняя линия соответствует погрешности расчетных данных, следующие линии оценкам погрешности после одной, двух, трех и т. д. фильтраций.

Результаты исследования этого метода (рис. 2) показывают, что при постоянном шаге он обладает 3-м порядком точности и имеет только нечетные составляющие.

В качестве альтернативы предлагается метод, использующий симметрию решения осесимметричной задачи. Для этого представим интеграл Шварца в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-\sigma_m}^{-\sigma_{m-1}} \tilde{f}(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\sigma_{m-1}}^{\sigma_m} \tilde{f}(\sigma) d\sigma = \\ & = \frac{1}{2} \int_{\sigma_{m-1}}^{\sigma_m} \tilde{f}(-\sigma) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\sigma_{m-1}}^{\sigma_m} \tilde{f}(\sigma) d\sigma = \int_{\sigma_{m-1}}^{\sigma_m} \tilde{f}(\sigma) d\sigma. \end{aligned} \quad (6)$$

Коэффициенты  $A_j$  удовлетворяют системе 3 линейных алгебраических уравнений

$$A_1 + A_2 + A_3 = \int_0^1 \left( x + \frac{a-b}{2} \right)^0 \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x+a)}} = B_0, \quad (7)$$

$$A_1 \left( x_1 + \frac{a-b}{2} \right)^2 + A_2 \left( x_2 + \frac{a-b}{2} \right)^2 + A_3 \left( x_3 + \frac{a-b}{2} \right)^2 = \int_0^1 \left( x + \frac{a-b}{2} \right)^2 \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x+a)}} = B_2,$$

$$A_1 \left( x_1 + \frac{a-b}{2} \right)^4 + A_2 \left( x_2 + \frac{a-b}{2} \right)^4 + A_3 \left( x_3 + \frac{a-b}{2} \right)^4 = \int_0^1 \left( x + \frac{a-b}{2} \right)^4 \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x+a)}} = B_4,$$

Здесь

$$\begin{aligned} B_0 &= \arcsin \frac{a-b+2}{a+b} - \arcsin \frac{a-b}{a+b}, \\ B_2 &= \frac{a-b}{4} \sqrt{ab} - \frac{a-b+2}{4} \sqrt{(b-1)(a+1)} + \frac{(a+b)^2}{8} B_0, \\ B_4 &= \left[ (a-b)^3 + \frac{3}{2} (a+b)^2 (a-b) \right] \frac{\sqrt{ab}}{32} - \\ & - \left[ (a-b+2)^3 + \frac{3}{2} (a+b)^2 (a-b+2) \right] * \\ & * \frac{\sqrt{(b-1)(a+1)}}{32} + 3 \frac{(a+b)^4}{128} B_0. \end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений запишется в виде

$$\begin{aligned} C_1 &= \left( x_1 + \frac{a-b}{2} \right)^2, \quad C_2 = \left( x_2 + \frac{a-b}{2} \right)^2, \\ C_3 &= \left( x_3 + \frac{a-b}{2} \right)^2, \\ A_2 &= \frac{B_2 - C_1 B_0 - (C_3 - C_1) B_2}{C_2 - C_1}, \\ A_3 &= \frac{B_4 - (C_1 + C_2) B_2 + C_1 C_2 B_0}{(C_3 - C_2)(C_3 - C_1)}, \\ A_1 &= B_0 - A_2 - A_3. \end{aligned}$$

Значения узлов квадратурной формулы возьмем, как и выше, из [2] при  $n=3$ . Результаты исследования этого метода (рис. 3) показывают, что он обладает  $3\frac{1}{2}$ -м порядком точности, порядок остальных составляющих увеличивается последовательно на 1.

Таким образом, более предпочтительным является второй метод, который в основном используется при решении осесимметричных задач.

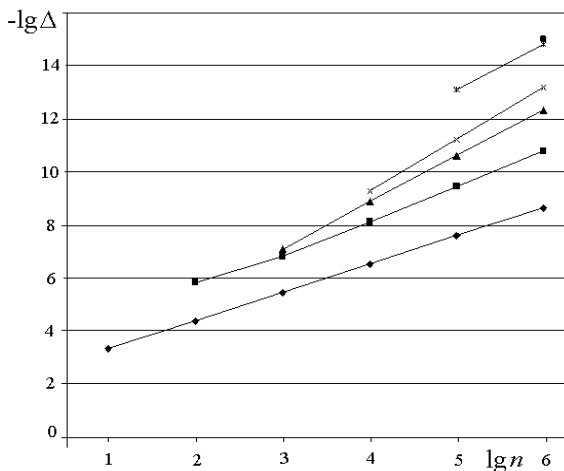


Рис. 3. Оценка погрешности второго метода

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Особенности интегралов Положего не позволяют использовать обычные методы, что требует разработки адаптивных формул. В данной работе разработаны методы численного интегрирования функций с такими особенностями и проверена их эффективность.

Эти методы были использованы для решения осесимметричных задач электрохимического формообразования. Применение этих методов позволило исследовать тонкие эффекты формообразования обрабатываемой поверхности [5].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Положий Г. Н.** Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев: Киевск. ун-т, 1965. 442 с. [[ G. N. Polozhiy, *Generalization of analytical functions of complex variable theory*, (in Russian). Kiev: Kiev University, 1965. ]]
2. **Крылов В. И.** Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука. 1967. 255 с. [[ V. I. Krylov, *Approximate integrals calculation*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1979. ]]
3. **Житников В. П., Шерыхалина Н. М.** Моделирование течений весомой жидкости с применением методов многокомпонентного анализа. Уфа: Гилем, 2009. 336 с. [[ V. P. Zhitnikov, N. M. Sherykhalina, *Modeling of weighted fluid flows using the methods of multi-component analysis*, (in Russian). Ufa: Gilem, 2009. ]]
4. **Житников В. П., Шерыхалина Н. М.** Применение многократной фильтрации при численном решении задач методами теории функций комплексного переменного // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18, № 1. С. 15–24. [[ V. P. Zhitnikov, N. M. Sherykhalina, "Using repeated filtration for problems numerical solution by complex variable theory methods," (in Russian), in *Computational technologies*, vol. 18, no. 1, pp. 15–24, 2013. ]]
5. **Житников В. П., Зиннатуллина О. Р., Поречный С. С., Шерыхалина Н. М.** Особенности установления предельных решений нестационарных осесимметричных задач Хеле-Шоу // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 4. С. 87–99. [[ V. P. Zhitnikov, O. R. Zinnatullina, S. S. Porechny, N. M. She-

rykhalina, "Determining the limiting solutions of nonstationary axisymmetric Hele-Shaw problems," in *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 50, no. 4, pp. 617–627, 2009. ]]

### ОБ АВТОРАХ

**ЖИТНИКОВ Владимир Павлович**, проф. каф. высокопроизв. выч. технол. и систем. Дипл. инж.-физ. (МФТИ, 1973). Д-р физ.-мат. наук по мех. жидкости, газа и плазмы (Казанск. ун-т, 1993). Засл. деят. науки РБ. Иссл. в обл. волн. течений жидкости, э/хим. формообразования, числ.-аналит. методов.

**ЗИННАТУЛЛИНА Ольга Рифовна**, доц. каф. выч. мат. и кибернетики. Дипл. инж.-с/аналитик (УГАТУ, 2002). Канд. физ.-мат. наук по мех. жидкости, газа и плазмы (БашГУ, 2006). Иссл. в обл. моделирования э/хим. формообразования, числ.-аналит. методов, оценки погрешн. и достоверн. числ. результатов.

**ЖИТНИКОВА Наталья Ивановна**, доц. каф. выч. мат. и кибернетики. Дипл. инж.-мех. (УАИ, 1972). Канд. техн. наук по дин. и прочн. машин, приборов и аппаратуры (УГАТУ, 1994). Иссл. в обл. мех. оболочек, числ. методов.

### METADATA

**Title:** Numerical methods of integration modification for axisymmetric problems-solution.

**Authors:** V. P. Zhitnikov, O. R. Zinnatullina, N. I. Zhitnikova

**Affiliation:**

Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

**Email:** <sup>1</sup>zhitnik@ugatu.ac.ru.

**Language:** Russian.

**Source:** Vestnik UGATU, vol. 19, no. 2 (68), pp. 179–182, 2015. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

**Abstract:** The adaptive numerical methods are suggested for effective solution of the problems of axisymmetric fields modeling using the integral transformations of analytical functions of complex variable. The methods are based on quadrature formulas of Gaussian type with varying node points location, which is determined by integrated function singularities. With the help of numerical filtration of results obtained with different nodes number the efficiency of methods suggested is shown.

**Key words:** axisymmetric field; conformal mapping; integral transformation; adaptive quadrature formula; numerical filtration.

**About authors:**

**ZHITNIKOV, Vladimir Pavlovich**, Prof., Dept. of Common Sciens. Dipl. Engineer-physicist (Moscow Physical-Technical Inst., 1973). Cand. of Phys.-Math. Sci. (MIPT, 1984), Dr. of Phys.-Math. Sci. (KSU, 1993).

**ZINNATULLINA, Olga Rifovna**, Docent, Dept. of Computer Sciens. Dipl. Engineer-system master (UGATU, 2002). Cand. of Phys.-Math. Sci. (BGU, 2006).

**ZHITNIKOVA, Natalya Ivanovna**, Docent, Dept. of Computer Sciens. Dipl. Engineer-mech. (UGATU, 1972). Cand. of Techn. Sci. (UGATU, 1994).