

М. А. Верхотуров, Г. Н. Верхотурова, Р. Р. Ягудин

УПРАВЛЕНИЕ РАЗМЕЩЕНИЕМ ТРЕХМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В СИСТЕМАХ КОМПОНОВКИ

Данная работа посвящена управлению размещением трехмерных геометрических объектов в системах компоновки, востребованных во многих областях человеческой деятельности. Для ее решения применен принцип пообъектного размещения, который приводит к двухуровневому процессу решения поставленной задачи. Приведены примеры работы алгоритмов и результаты вычислительных экспериментов, произведенных на общедоступных примерах. *Компоновка; упаковка; годограф функции плотного размещения; условия взаимного непересечения многогранников; плотное размещение трехмерных геометрических объектов*

Обзор работ по проблеме управления размещением трехмерных геометрических объектов (ГО), которая востребована во многих областях человеческой деятельности (компоновка двигателей, упаковка грузов, раскрой кристаллов и т. д.), позволяет сделать вывод, что сложность решения рассматриваемой задачи обуславливает отсутствие эффективных алгоритмов ее решения. Большинство работ сводится к размещению простых геометрических фигур (параллелепипедов, цилиндров, сфер и т. д.). Поэтому поиск новых подходов и алгоритмов для решения задачи размещения трехмерных ГО остается актуальным.

Вычислительная сложность решения этой задачи управления, которая сводится к оптимизации трехмерной упаковки в общей постановке, вынуждает вводить ряд упрощений, порой достаточно сильно сужающих область допустимых решений, однако позволяющих находить рациональные упаковки с приемлемыми затратами вычислительных ресурсов.

Одно из самых распространенных упрощений – фиксация ориентации ГО в пространстве или использование набора фиксированных ориентаций каждого из них.

В данной статье обсуждается задача оптимизации размещения ориентированных выпуклых многогранников, которая по своей сложности является промежуточным вариантом между упаковкой простых ГО и произвольных (в общем случае – невыпуклых) ГО сложных форм.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Проблему плотной упаковки ориентированных ГО в трехмерном пространстве можно

свести к решению следующей математической задачи.

Пусть дан набор $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$, $i = 1, \dots, n$ ориентированных трехмерных ГО, каждый из которых имеет свою собственную систему координат.

Будем считать, что все точки $v^i = (x^i, y^i, z^i) \in \mathbb{R}^3$, $i = \overline{1, n}$ каждого из объектов T_i лежат в первом октанте, кроме того, каждый из них касается трех координатных плоскостей ((XOY), (YOZ), (ZOX)).

В этом случае точка P_i с минимальными координатами $(\underline{x}^i, \underline{y}^i, \underline{z}^i) = (x, y, z) \in v^i: \underline{x}^i \leq x \leq \overline{x}^i, \underline{y}^i \leq y \leq \overline{y}^i, \underline{z}^i \leq z \leq \overline{z}^i$, принадлежащая его параллелепипедной оболочке, совпадает с началом координат.

Область упаковки $Q \subset \mathbb{R}^3$, представляет собой прямоугольный параллелепипед $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq W, 0 \leq z \leq H\}$, у которого L – длина, W – ширина объекта Q рассматриваются как константы, а H – высота объекта Q , как переменная величина.

Введем следующие обозначения:

$T_i(\overline{u}_i)$ – смещение T_i на вектор $\overline{u}_i \in \mathbb{R}^3$,

$cl(v^i)$ – граничные точки объекта T_i ,

$int(v^i)$ – внутренние точки объекта T_i ,

$H(T(U))$ – минимальная высота объекта Q для параметров размещения U объектов множества T .

Упаковкой назовем такой набор параметров размещения $U = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_n\}$ объектов $T(U) = \{T_1(\overline{u}_1), T_2(\overline{u}_2), \dots, T_n(\overline{u}_n)\}$, при котором выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} \text{int } v^i(\overline{u}_i) \cap \text{int } v^j(\overline{u}_j) = \emptyset, \forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j; \\ v^i(\overline{u}_i) \cup Q = v^i(\overline{u}_i), \forall i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (1)$$

т. е. никакие два объекта не пересекаются между собой, и все объекты находятся внутри области размещения.

Требуется для ГО $T_i, i = 1, \dots, n$ найти такую упаковку U , чтобы высота области размещения была минимальной

$$H(T(U)) \rightarrow \min. \quad (2)$$

ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ

В данной постановке эта проблема является чрезвычайно сложной многоэкстремальной задачей математического программирования в пространстве высокой размерности с невыпуклой и несвязной областью допустимых решений.

Ее можно рассматривать как задачу дискретной оптимизации, если использовать принцип пообъектного размещения. Последний основывается на методе улучшения по группам переменных Гаусса–Зайделя и заключается в том, что на каждом шаге решения оперируют отдельными ГО, т. е. производят некоторые геометрические преобразования (изменение координат размещения и угла поворота ГО в области) каждого из них. В этом случае используются методы «моделирования геометрических преобразований» [1].

Применение принципа пообъектного размещения приводит к двухуровневому процессу решения поставленной задачи:

1. Внешняя (оптимизационная) процедура – операции с приоритетным списком:

- формирование последовательности размещаемых объектов;
- изменение последовательности размещенных объектов.

2. Внутренняя (геометрическая) процедура – операции с ГО, соответствующими номерам в приоритетном списке:

- моделирование движения объектов;
- выбор, согласно некоторому критерию, точки размещения;
- занесение объекта в область (изменение области размещения).

Одним из наиболее применяемых методов «моделирования геометрических преобразований» является подход, основанный на моделировании движения ГО в области размещения с учетом их взаимного непересечения. Он базируется на понятии годографа функции плотного размещения ГФПР, разработанного и развитого до Ф-функций в харьковской школе академика

Ю. Г. Стояна [2], являющейся мировым научным лидером в этой области уже на протяжении многих десятилетий.

Под функцией плотного размещения двух соприкасающихся ГО понимается зависимость расстояния между некоторыми точками (полюсами) этих объектов от их взаимного плотного размещения ($clv^i \cap clv^j \neq \emptyset, intv^i \cap intv^j = \emptyset$). Годограф вектора, направленного от одного полюса к другому, при плотном перемещении одного (подвижного) объекта вокруг другого (неподвижного) называется годографом функции плотного размещения (ГФПР). Таким образом, для упаковываемого объекта ГФПР представляет собой границу области, запрещенной для размещения этого объекта.

В данной статье рассматриваются методы решения, базирующиеся на понятии ГФПР.

С учетом использования этого понятия возможны три схемы взаимодействия внешней и внутренней процедур:

- простая;
- циклическая;
- совмещенная.

Простая схема предполагает одноразовое формирование приоритетного списка размещаемых ГО по какому-то из признаков, характеризующих исходные ГО. Производится построение ГФПР всех возможных пар объектов, а также каждого объекта и внешности области размещения $\mathbb{R}^3 \setminus Q$. Затем все объекты согласно заданному списку укладывают в область, применяя внутреннюю процедуру, состоящую из трех этапов.

Этап № 1. Находятся точки пересечения множества ГФПР размещаемого объекта и размещенных объектов, а также ГФПР размещаемого объекта и внешности области размещения.

Этап № 2. Из всего множества найденных точек выбирается та, которая удовлетворяет выбранному критерию размещения (в простейшем случае, минимизация высоты z).

Этап № 3. Размещаемый объект заносится в выбранную точку (точку занесения), соответственно все построенные на предварительном этапе ГФПР этого объекта с другими объектами, сдвигаются на вектор, соответствующий этой точке.

Основным недостатком простой схемы является одноразовость формирования приоритетного списка и построения упаковки.

Циклическая схема является наиболее применяемой и известной. При ее реализации при-

оритетный список на каждой итерации генерируется заново, в соответствии с ним с использованием внутренней процедуры осуществляется размещение и вычисление функции цели (2) (при этом внутренняя процедура совпадает с той, которая была описана при рассмотрении простой схемы).

Совмещенной называется схема, в которой, в общем случае, фиксированный приоритетный список отсутствует, а из всех оставшихся объектов по какому-то критерию выбирается наиболее подходящий объект. Алгоритм в этом случае реализуется следующим образом (на примере «жадного» принципа).

Пока не размещены все объекты:

- для заданного подмножества (или всего множества) еще неразмещенных объектов:

- находятся точки пересечения множества ГФПР размещаемого объекта и размещенных объектов, а также ГФПР размещаемого объекта и внешности области размещения;

- из всего множества найденных точек выбирается та, которая удовлетворяет критерию размещения (в простейшем случае, минимизация высоты z);

- из этого подмножества выбирается тот объект, который минимизирует критерий размещения;

- выбранный объект заносится в соответствующую точку (точку занесения), все построенные на предварительном этапе ГФПР этого объекта с другими объектами, сдвигаются на вектор, соответствующий этой точке.

ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА РАЗМЕЩЕНИЯ

Пусть дан набор $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}: T_i \subset \mathbb{R}^3$, $i = \overline{1, n}$ выпуклых многогранников, каждый из которых имеет свою собственную систему координат и задается списками вершин и определяемых ими граней.

В рассматриваемом подходе для формирования упаковок многогранников были реализованы два способа организации внешней процедуры оптимизации:

- первый подходящий с упорядочиванием объектов в порядке убывания размеров параллелепипедных оболочек (простая схема);

- «жадный» метод с выбором на каждом шаге того объекта, который укладывается лучше других (совмещенная схема).

Для обеспечения условий взаимного непересечения объектов между собой и с границей об-

ласти размещения, требуется построить ГФПР G_{ij} всех пар многогранников и для каждого многогранника построить ГФПР G_{Qi} к внешности области зоны размещения $\mathbb{R}^3 \setminus Q$ (хотя в этом случае эта область является невыпуклой, но ГФПР для нее строится тривиально).

Из трех шагов во внутренней процедуре представляет интерес выполнение Этапа № 2, т. е. выбор из всех точек результирующего ГФПР – точки занесения.

Если рассматривать множество допустимых для размещения объекта точек, то оно представляет собой объединение областей, ограниченных различными ГФПР (в общем случае оно может быть несвязным). Точки локальных экстремумов будут являться вершинами вогнутостей, лежащими на границах этого объединения, а так как ГФПР двух выпуклых объектов является выпуклым, то его вершины не будут удовлетворять этому требованию. Следовательно, точка занесения при упаковке трехмерных выпуклых многогранников может быть найдена в результате рассмотрения следующих случаев (для простоты описания будем считать, что номера объектов соответствуют позициям в приоритетном списке):

Вершина с минимальными координатами по Oz , Oy и Ox ГФПР размещаемого многогранника T_i к области размещения $Q - G_{Qi}$ (это соответствует следующему расположению: размещаемый многогранник касается трех граней области размещения).

Вершина, являющаяся точкой пересечения ребер ГФПР размещаемого многогранника T_i к области размещения $Q - G_{Qi}$ и любых ГФПР размещаемого многогранника T_j к уже размещенным многогранникам $T_j - G_{ij}$, $j = 1, \dots, i-1$ (размещаемый многогранник касается одного из уже размещенных многогранников и двух смежных граней области размещения).

Вершина, являющаяся точкой пересечения граней двух различных ГФПР размещаемого многогранника T_i к размещенным многогранникам T_j , $j = 1, \dots, i-1 - G_{ij}$ и грани ГФПР размещаемого многогранника T_i к области размещения $Q - G_{Qi}$. (Размещаемый многогранник касается двух других уже размещенных многогранников и грани области размещения.)

Вершина, являющаяся точкой пересечения граней трех различных ГФПР размещаемого многогранника T_i к размещенным многогранникам T_j , $j = 1, \dots, i-1 - G_{ij}$ (размещаемый многогранник касается трех других уже размещенных многогранников).

В процессе размещения очередного многогранника, проанализировав все 4 случая соприкосновений, получаем набор точек, каждая из которых является точкой локального экстремума. В целях минимизации высоты контейнера из всего полученного множества выбирается точка с минимальной координатой по z , в случае совпадения z – с минимальной суммой координат x и y .

Для большей наглядности на рис. 1 представлены примеры двумерных аналогов описанных случаев.

На рисунке тонкими линиями показаны границы объектов, жирными – ГФПР, тонкими пунктирными – границы размещаемого объекта при размещении в точке локального минимума, жирными пунктирными – границы объекта при его размещении в соответствии с глобальным минимумом. Жирными точками показаны полюса объектов.

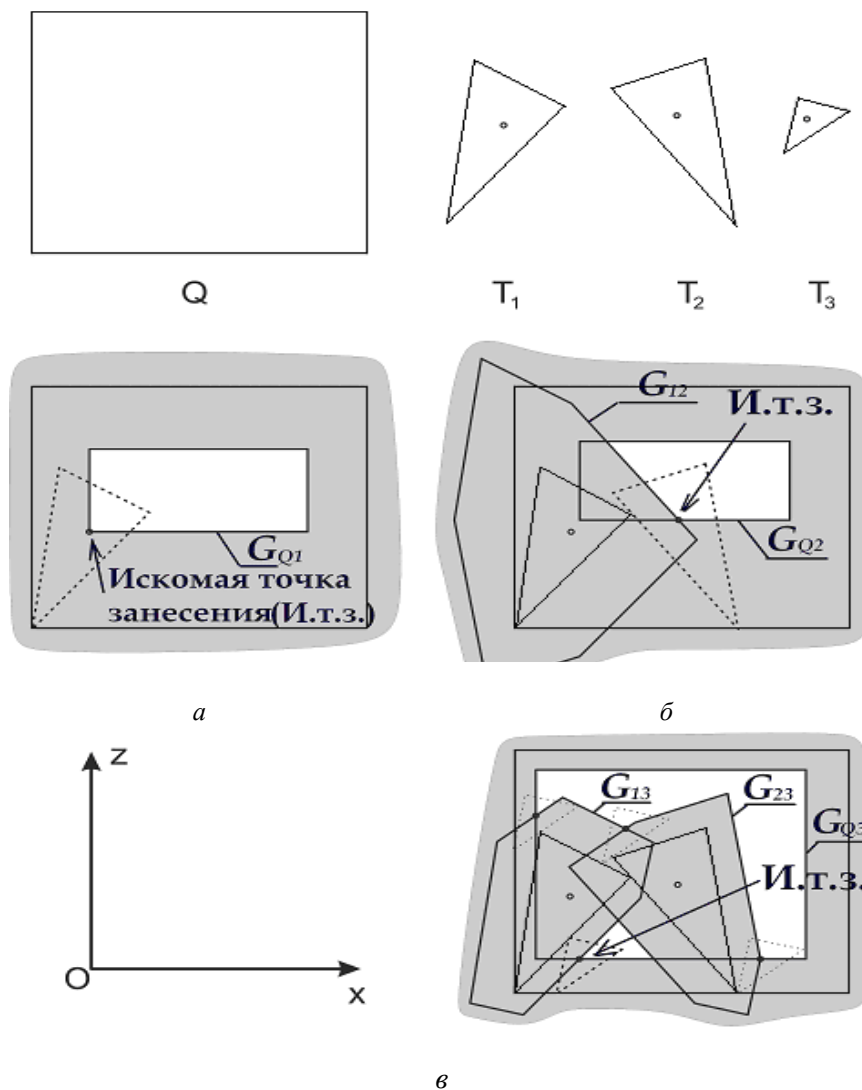


Рис. 1. Размещение трех объектов T_1, T_2, T_3 в области Q : *a* – годограф G_{Q1} объекта T_1 и области размещения Q , точка занесения, соответствующая точке локального минимума (размещение первого объекта T_1 в пустой области Q); *б* – годограф G_{Q2} объекта T_2 и области размещения Q , годограф G_{12} объекта T_2 и объекта T_1 , точка занесения (размещение второго объекта T_2 в области Q с размещенным объектом T_1); *в* – годограф G_{Q3} объекта T_3 и области размещения Q , годографы G_{13} и G_{23} объекта T_3 и объектов T_1 и T_2 , точка занесения (размещение третьего объекта T_3 в области Q с размещенными объектами T_1 и T_2)

Рассмотрим размещение трех объектов по шагам, при этом на каждом шаге будем размещать объект с соответствующим номером:

Шаг 1: Точка локального минимума принадлежит вершине ГФПР объекта T_1 к зоне размещения $Q - G_{Q1}$. Зафиксируем полюс объекта T_1 в этой точке (рис. 1, а).

Шаг 2: Точка локального минимума является пересечением ГФПР объекта T_2 к уже упакованному $T_1 - G_{12}$ и ГФПР T_2 к зоне размещения $Q - G_{Q2}$. Зафиксируем объект T_2 в единственной найденной точке (рис. 1, б).

Шаг 3: Найдено 4 точки локального минимума:

- одна из которых является точкой пересечения ГФПР объекта T_3 к упакованным объектам T_1 и $T_2 - G_{13}$ и G_{23} ;
- две – точки пересечения ГФПР объекта T_3 к области размещения $Q - G_{Q3}$ и ГФПР объекта T_3 к упакованному объекту $T_1 - G_{13}$;
- одна – точка пересечения ГФПР объекта T_3 к области размещения $Q - G_{Q3}$ и ГФПР объекта T_3 к упакованному объекту $T_2 - G_{23}$.

Зафиксируем многоугольник T_3 в точке с минимальной координатой по Oz и затем по Ox – это нижняя точка пересечения ГФПР объекта T_3 к области размещения $Q - G_{Q3}$ и ГФПР объекта T_3 к упакованному объекту $T_1 - G_{13}$ (рис.1, в).

При реализации данного подхода возникают задачи нахождения точки пересечения отрезка и многогранника, отрезка и грани, двух многогранников. Все они подробно рассмотрены в работе [3]. Для поиска ГФПР двух многогран-

ников используется алгоритм, описанный в статье [4].

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Для оценки эффективности алгоритмов были использованы произвольные многогранники и тестовые данные из общедоступных источников [5].

Из статьи Ю. Г. Стояна [5] были взяты два примера, составленные из многогранников семи типов.

Пример № 1. Задан набор из 12 многогранников. Основание зоны упаковки имеет ширину 15 и длину 14. Результат – табл. № 1. Лучшее решение для примера № 1 найдено алгоритмом «Первый подходящий с упорядочиванием объектов» в порядке убывания размеров параллелепипедных оболочек, предложенным в данной статье (рис. 2, слева).

Пример № 2. Задан набор из 25 многогранников. Основание зоны упаковки имеет ширину 15 и длину 16. Результат – табл. 2. Лучшее решение для примера № 2 найдено алгоритмом, предложенным в данной статье и основанным на формировании последовательности размещения по «жадному» принципу (рис. 2, справа).

В качестве примера размещения произвольных многогранников были использованы различные «клинья» (призмы с треугольным основанием), определенные пары которых могут образовывать прямоугольный параллелепипед.

Дано 12 типов клиньев, которые могут образовывать 6 прямоугольных параллелепипедов.

Таблица 1

Сравнение эффективности алгоритмов для примера № 1

Название алгоритма	Высота	Заполнение, %	Время, с
Эвристический алгоритм Ю. Г. Стояна	32,208	27,4	–
Алгоритм локальной оптимизации Ю. Г. Стояна	30,917	28,6	–
«Первый подходящий с упорядочиванием»	24,153	36,6	0,117
«Жадный метод»	29,485	30	0,417

Таблица 2

Сравнение эффективности алгоритмов для примера № 2

Название алгоритма	Высота	Заполнение, %	Время, с.
Эвристический алгоритм Ю. Г. Стояна	53,958	29,8	–
Алгоритм локальной оптимизации Ю. Г. Стояна	45,860	30,3	–
«Первый подходящий с упорядочиванием»	40,260	34,6	1,312
«Жадный метод»	34,4	40,5	7,575

Пример № 3. Задан набор из 48 многогранников (по 4 экземпляра каждого типа). Время размещения при использовании первого подходящего упорядочиванием составило 2,5 с, коэффициент плотности размещения составил 88 %. Результат размещения представлен на рис. 3.

Пример № 4. Задан набор из 31 многогранника (параллелепипеды, призмы, пирамиды и т. д.). Время размещения при использовании алгоритма «Первый подходящий с упорядочиванием» составило 1,5 с, коэффициент плотности размещения составил 52 %. Результат размещения представлен на рис. 4.

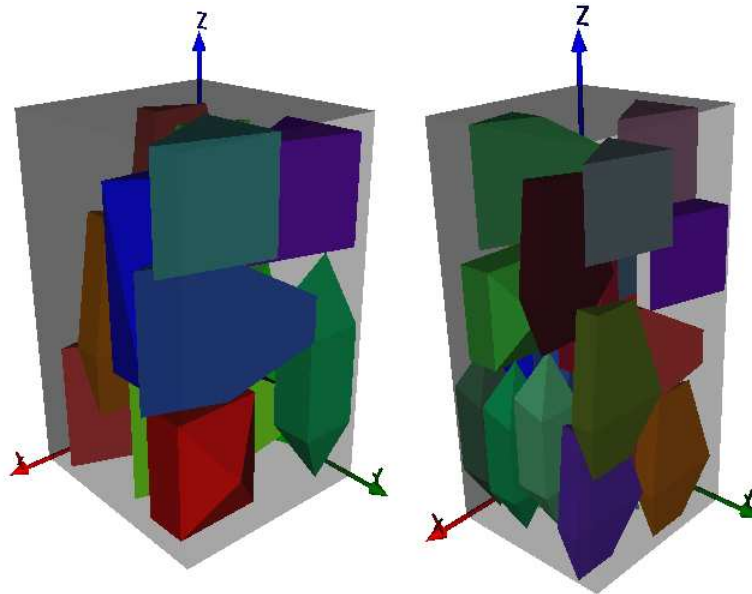


Рис. 2. Результаты размещения многогранников из примера № 1(слева) и примера № 2 (справа)

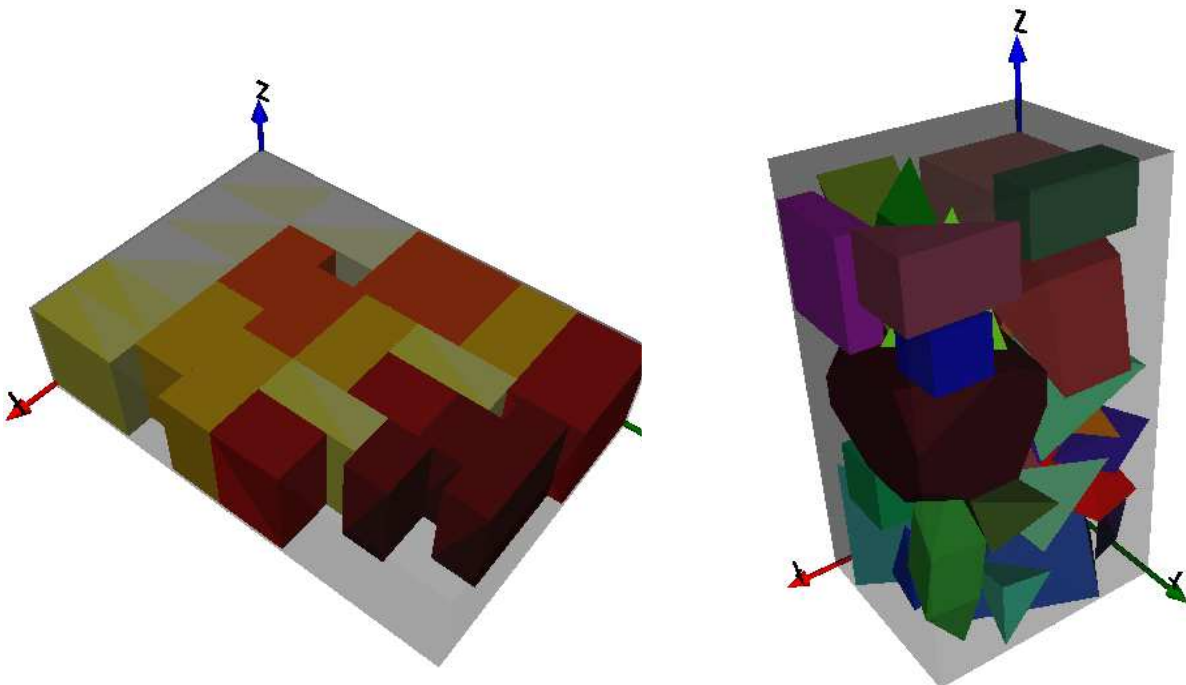


Рис. 3. Результаты размещения 48 многогранников

Рис. 4. Результаты размещения 31 многогранника

Результаты проведенных вычислительных экспериментов показали, что:

- при реализации внутренней (геометрической) процедуры разработанный подход, основанный на анализе точек занесения, позволяет получать 3D-упаковки, превосходящие по своему качеству известные решения на 5–10%;
- при реализации внешней (оптимизационной) процедуры «жадный» метод работает лучше, чем «первый подходящий с упорядочиванием по невозрастанию» в случае, если многогранники не сильно отличаются по габаритным размерам или размещается большое количество многогранников.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведен подход к решению задачи управления размещением 3D-объектов, основанный на алгоритме решения *NP*-трудной задачи упаковки выпуклых многогранников в прямоугольный параллелепипед минимальной высоты, позволяющий получать результаты, превосходящие известные методы решения этой проблемы, и базирующийся на построении годографа функции плотного размещения для моделирования условий взаимного непересечения многогранников. В дальнейшем предполагается проведение углубленного вычислительного эксперимента по исследованию эффективности применения различных методов оптимизации при реализации внешней (оптимизационной) процедуры, а также адаптация предложенного подхода для решения задачи упаковки невыпуклых многогранников.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Верхотурова Г. Н., Ягудин Р. Р.** Построение годографа функции плотного размещения двух выпуклых // Принятие решений в условиях неопре-

деленности: межвуз. науч. сб., вып. 7. Уфа: УГАТУ, 2010. С. 150–157.

2. **Верхотурова Г. Н., Верхотуров М. А., Ягудин Р. Р.** Быстрый алгоритм поиска пересечения двух выпуклых многогранников // Принятие решений в условиях неопределенности: межвуз. науч. сб., вып. 7. Уфа: УГАТУ, 2010. С. 102–108.

3. **Верхотуров М. А.** Задача нерегулярного размещения геометрических объектов: современное состояние методов решения // Ресурсосберегающие технологии: математическое обеспечение оптимизационных задач в системах автоматизированного проектирования. СПб.: ЦНИИТС, 2001. С. 33–56.

4. **Стоян Ю. Г., Яковлев С. В.** Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев: Наук. думка. 1986. 286 с.

5. Packing of convex polytopes into a parallelepiped / Y. G. Stoyan [et al.] // Optimization. 2005. № 54 (2). P. 215–235.

ОБ АВТОРАХ

Верхотуров Михаил Александрович, проф. каф. вычислительн. математики и кибернетики. Дипл. инженер-системотехник по АСУ (УГАТУ, 1983). Д-р техн. наук по АСУ (УГАТУ, 2001). Иссл. в обл. оптимизационного размещения геометрических объектов, сетей.

Верхотурова Галина Николаевна, доц. той же каф. Дипл. инженер-системотехник по АСУ (УГАТУ, 1983). Канд. техн. наук по системам автоматизации проектирования в промышленности (УГАТУ, 1997). Иссл. в обл. оптимизационного размещения геометрических объектов.

Ягудин Рустем Расламович, асп. той же каф. Дипл. математик-программист (УГАТУ, 2009). Иссл. в обл. оптимизационного размещения многогранных объектов.