Уфа: УГАТУ, 2012 Вестник УГАТУ Т. 16, № 8 (53). С. 67–72

УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 621:681.5

В. Е. Гвоздев, М. А. Абдрафиков

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ОЦЕНОК ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ХАРАКТЕРИСТИК НАДЕЖНОСТИ

Статья посвящена вопросам доверительного оценивания граничных значений характеристик надежности технических изделий. Исследованы закономерности смещения оценок надежности внутри доверительного интервала в зависимости от объема выборочных данных и типа закона распределения наработки до отказа при заданных значениях доверительной вероятности и наработки до отказа. На основе полученных результатов разработана методика доверительного оценивания граничных значений характеристик надежности, позволяющая учитывать поведение вероятностных характеристик внутри доверительного интервала, что в свою очередь позволяет сократить неопределенность получаемых оценок. *Надежность*; *интервальное оценивание*; *доверительная вероятность*; *закон распределения*; *порядковые статистики*; *экстремальные статистики*

ВВЕДЕНИЕ

Одним из ключевых факторов эффективного управления надежностью технических изделий является обработка данных об отказах на разных стадиях жизненного цикла изделия, в особенности на этапе эксплуатации. Оценка фактически достигнутого уровня надежности производится экспериментальными методами – по результатам определительных испытаний либо по результатам подконтрольной эксплуатации.

Развитые технологии производства, с одной стороны, и ограниченное число выпускаемых изделий, с другой стороны, зачастую не позволяют получать значительное число данных об отказах.

В ряде случаев в задачах надежности требуется не только получить точечную оценку значений характеристик надежности, но и границы, в которых она может изменяться с заданной доверительной вероятностью. Такого рода задачи особенно актуальны при ограниченном числе данных об отказах, когда точечная оценка в значительной мере случайна и зависит главным образом от свойств исходных данных. Чтобы дать представление о точности и надежности таких оценок, в математической статистике пользуются так называемыми доверительными интервалами.

Особый интерес представляет доверительное оценивание вероятности безотказной работы самого «слабого» изделия при заданном значении наработки до отказа и наоборот – интервальное оценивание наработки до отказа изделия в «худшем случае» при заданной вероятности безотказной работы. Математической основой анализа данных граничных значений характеристик надежности является аппарат порядковых статистик, а именно раздел, посвященный крайним порядковым статистикам (для задач надежности рассматривается минимальная порядковая статистика).

Существуют приближенные и точные методы построения доверительных интервалов для параметров случайной величины. Приближенные методы ориентированы на выборки достаточно большого объема, вид закона распределения случайной величины априорно может быть неизвестен. Построение доверительного интервала приближенными методами изучено лишь для математического ожидания случайной величины и ее дисперсии. Точные методы построения доверительных интервалов предполагают вид закона распределения случайной величины известным. Наиболее полно построение доверительных интервалов точными методами изучено лишь для нормального закона распределения.

Для параметра экспоненциального закона распределения случайной величины известен метод определения доверительных границ, когда моменты отказов образуют пуассоновский поток с интенсивностью λ. Согласно данному методу, доверительные границы ($\lambda_Н$; $\lambda_В$), покрывающие истинное значение λ с доверительной вероятностью β, определяются с помощью квантилей ХИ-квадрат распределения. Более подробное описание метода можно найти в работах [1, 2]. Стоит отметить, что данный метод для экспоненциального вида закона распределения пользуется большой популярностью у авто-

Контактная информация: 8(347)272-74-65

Приведенные результаты получены в рамках проведения исследований по гранту РФФИ 10-09-00359-а.

ров нормативных материалов [3–5]. Ограничением этого метода является то, что оцениваются доверительные границы для параметра экспоненциального закона распределения, определяемого по всей совокупности выборочных данных. Как отмечалось в работе [6], оценка надежности изделия по всей совокупности выборочных данных, полученная даже по верхней границе доверительного интервала, оказывается завышенной по отношению к оценке надежности изделия «в худшем случае», полученной по нижней границе доверительного интервала.

Проведенный анализ позволил выявить и другие методы построения доверительных интервалов для точечных оценок характеристик надежности, однако общим для всех них является то, что характеристики надежности оцениваются по всей выборке (оцениваются осредненные параметры). Интервальное оценивание надежности изделий традиционными методами не может быть применено при оценивании граничных значений характеристик надежности.

Задача исследования заключалась в анализе свойств статистических оценок граничных значений характеристик надежности внутри доверительных интервалов в зависимости от продолжительности испытаний и объема выборочных данных.

1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОЦЕНОК ХАРАКТЕРИСТИК НАДЕЖНОСТИ ВНУТРИ ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА

Известные подходы к интервальному оцениванию не позволяют вынести заключение о поведении оценок внутри доверительных интервалов – указываются лишь границы возможных значений случайной величины при соответствующей доверительной вероятности. То, как распределены данные оценки случайной величины внутри доверительного интервала остается неизвестным, при этом принято считать, что истинное значение случайной величины может находиться с одинаковой вероятностью в любой точке доверительного интервала. Однако, как будет показано далее, это справедливо лишь для области математического ожидания случайной величины.

Настоящее исследование направлено на анализ таких свойств получаемых оценок значений характеристик надежности, как смещенность и устойчивость. Основанием данного исследования является возможность проведения управляемого статистического эксперимента. Схема эксперимента имела следующий вид:

- формировались выборки случайных величин, распределенных по заданному закону распределения $F(x)$ объемом N. Для каждого объема выборки N проводилось k экспериментов;
- по каждой выборке определялась интенсивность отказа $\hat{\lambda}$. Соответственно формировался массив $\hat{\lambda}_j$, где j соответствует номеру эксперимента;
- среди k экспериментов определялись минимальные и максимальные значения $\hat{\lambda}$: $\lambda_{\min} = \min(\hat{\lambda}_j)$; $\lambda_{\max} = \max(\hat{\lambda}_j)$, где $j = \overline{1;k}$;
- для построения гистограмм частот определялись длины интервалов h:

$$h = \frac{F(x_{\min};\lambda_{\max}) - F(x_{\min};\lambda_{\min})}{1 + 3{,}322 \cdot \lg k},$$

где $F(x_{\min}) = \int_0^\infty N[1 - F(x)]^{N-1} f(x)dx$ – вероятность того, что время наработки самого «слабого» изделия окажется больше значения $x_{\min}$;

- строились гистограммы распределений статистических оценок внутри доверительных интервалов, соответствующих различному временному сечению (разным наработкам до отказа).

Доверительная вероятность β, с которой оцениваются доверительные интервалы $F(x_{\min}; \lambda_{\max})$ и $F(x_{\min}; \lambda_{\min})$ в приведенной схеме зависят от выбора значения k (количество экспериментов). Очевидно, что чем больше k, тем доверительная вероятность β выше.

Исследование направлено на анализ статистических свойств оценок характеристик надежности внутри доверительного интервала, соответствующих различным значениям в области определения случайной величины – наработки до отказа. Стоит отметить, что данная схема исследования, а также приведенные в статье результаты справедливы лишь для случая, когда случайная величина имеет левостороннее ограничение. В задачах надежности это справедливо в связи с тем, что значение наработки до отказа – неотрицательная случайная величина.

Отличительной особенностью исследования является то, что оно позволило определить закономерности смещения оценок в зависимости от времени эксплуатации. Установленные закономерности позволяют уменьшить неопределенность получаемых оценок граничных значений характеристик надежности и делает возможным перейти от интервального оценивания к оцениванию статистическому [7].

В результате исследования были построены гистограммы распределений статистических оценок внутри доверительных интервалов, соответствующих различному времени испытаний изделий, в зависимости от объема выборочных данных.

На рис. 1–2 приведена часть полученных результатов для минимальной порядковой статистики при показательном законе распределения с параметром $\lambda = 1$ и объеме выборочных данных $N = 5$.

Сечение 2 на рис. 1–2 соответствует математическому ожиданию закона распределения минимальной порядковой статистики. Закон распределения минимальной порядковой статистики в случае показательного закона распределения с параметром $\lambda = 1$ также является показательным, но уже с параметром $N\lambda = N$.

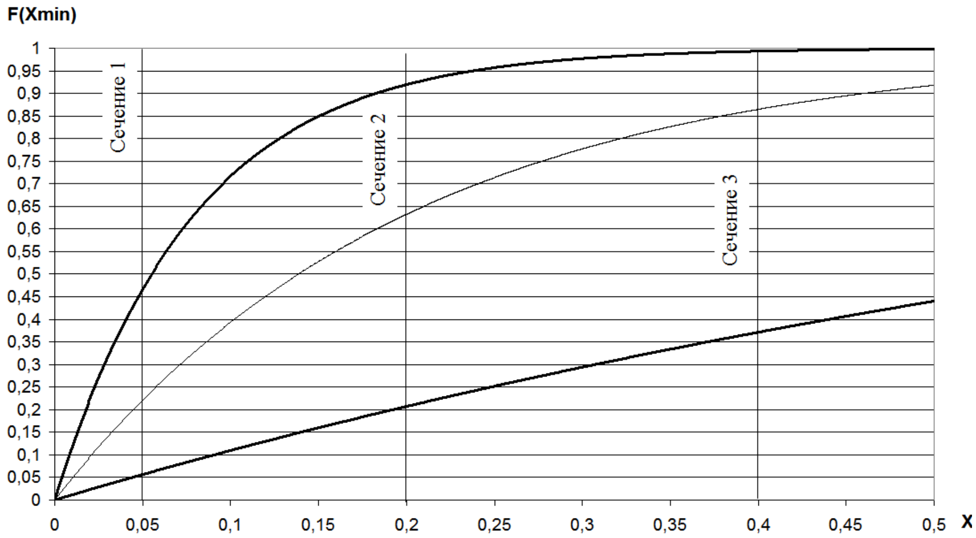

Рис. 1. Функция распределения минимальной порядковой статистики при показательном законе распределения и объеме выборочных данных $N = 5$. Доверительные границы соответствуют коэффициенту доверительной вероятности $\beta = 0{,}95$

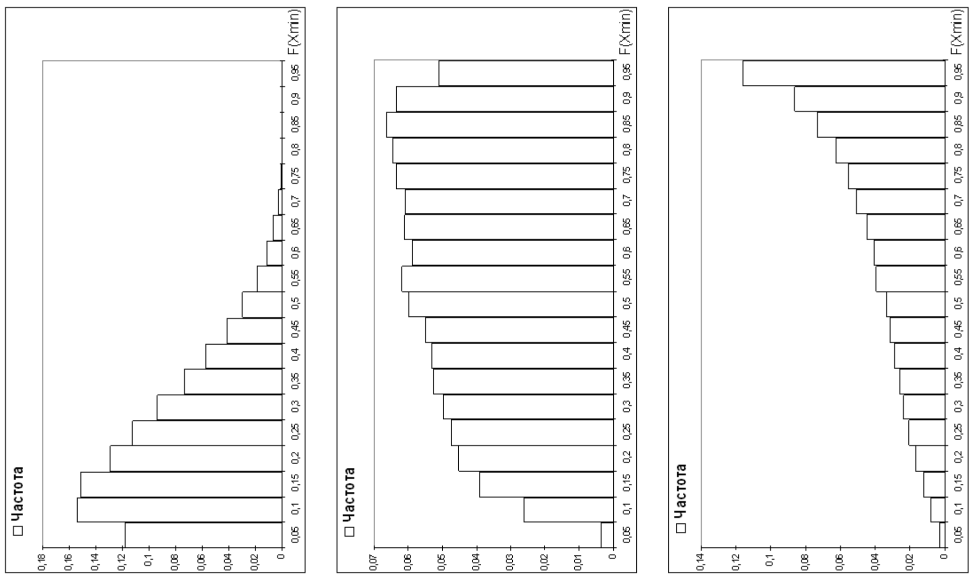

Рис. 2. Гистограммы оценок значений вероятности для минимальной порядковой статистики при $X = 0{,}05$, $X = 0{,}2$, $X = 0{,}4$ (сечение 1, сечение 2, сечение 3 на рис. 1 соответственно)

Полученные результаты позволяют заключить, что статистические свойства оценок, соответствующие разным сечениям, зависят, во-первых, от типа закона распределения наработки до отказа изделий, а во-вторых – от объема выборочных данных. Кроме того, до математического ожидания оценки являются смещенными в область завышения надежности, причем завышение тем выше, чем дальше от математического ожидания расположено временное сечение, в области математического ожидания оценки относительно теоретической функции расположены симметрично, а при времени испытаний больше математического ожидания оценки становятся заниженными, причем тем больше, чем дальше от математического ожидания расположено временное сечение. Полученные закономерности позволяют за счет перехода от интервального оценивания к оцениванию статистическому уменьшить неопределенность, связанную с малым объемом выборочных данных.

Одной из задач исследования являлся анализ дополнительной информации относительно доверительных оценок, получаемых за счет активного экспериментирования. Рассчитаем метрические характеристики неопределенности при интервальном и статистическом оценивании граничных значений характеристик надежности.

Известно, что для непрерывной случайной величины количественная оценка неопределенности по Шеннону определяется следующим выражением:

$$H = -\int_a^b f(x)\ln(f(x))dx\,, \qquad (1)$$

где a, b – границы возможных значений случайной величины.

Если плотность распределения задается оценкой в виде гистограммы частот, то выражение (1) преобразуется к виду:

$$H = -\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{a+(i-1)\cdot\Delta x}^{a+i\cdot\Delta x}\frac{\hat{p}_i}{\Delta x}\ln\left(\frac{\hat{p}_i}{\Delta x}\right)dx\right), \qquad (2)$$

где n – число подитервалов группирования (предполагая, что интервал $[a, b]$ разбивается на n одинаковых по величине интервалов Δx); $\hat{p}_i$ – частота попадания в i-й подинтервал.

Выражение (2) можно преобразовать следующим образом:

$$H = -\left(\frac{1}{\Delta x}\sum_{i=1}^{n}\int_{a+(i-1)\cdot\Delta x}^{a+i\cdot\Delta x}\hat{p}_i\left(\ln\left(\hat{p}_i\right)-\ln(\Delta x)\right)dx\right) =$$

$$= -\left(\frac{1}{\Delta x}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{a+(i-1)\cdot\Delta x}^{a+i\cdot\Delta x}\hat{p}_i\ln\left(\hat{p}_i\right)dx - \sum_{i=1}^{n}\int_{a+(i-1)\cdot\Delta x}^{a+i\cdot\Delta x}\hat{p}_i\ln(\Delta x)dx\right)\right) =$$

$$= -\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{p}_i\ln\left(\hat{p}_i\right)-\ln(\Delta x)\right) = \ln(\Delta x) - \sum_{i=1}^{n}\hat{p}_i\ln\left(\hat{p}_i\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{\varphi_{\text{в}}(x_i)-\varphi_{\text{н}}(x_i)}{n}\right) - \sum_{i=1}^{n}\hat{p}_i\ln\left(\hat{p}_i\right) =$$

$$= \ln(\varphi_{\text{в}}(x_i)-\varphi_{\text{н}}(x_i)) - \ln(n) - \sum_{i=1}^{n}\hat{p}_i\ln\left(\hat{p}_i\right).$$

Таким образом, оценка информативности преобразуется к виду:

$$I(x_i) = \frac{\ln\left(\overset{*}{y}\right) - \left(\ln(\varphi_{\text{в}}(x_i)-\varphi_{\text{н}}(x_i)) - \ln(n) - \sum_{i=1}^{n}\hat{p}_i\ln\left(\hat{p}_i\right)\right)}{\ln\left(\overset{*}{y}\right)} =$$

$$= \frac{\ln\left(\overset{*}{y}\right) - \ln(\varphi_{\text{в}}(x_i)-\varphi_{\text{н}}(x_i))}{\ln\left(\overset{*}{y}\right)} + \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{p}_i\ln\left(\hat{p}_i\right)+\ln(n)}{\ln\left(\overset{*}{y}\right)} =$$

$$= I_{\text{инт}}(x_i) + \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{p}_i\ln\left(\hat{p}_i\right)+\ln(n)}{\ln\left(\overset{*}{y}\right)}.$$

Здесь $I_{\text{инт}}(x_i)$ – количество информации, соответствующее точке x_i, и получаемое в результате построения доверительной области с огибающими $\varphi_{\text{в}}(x_i)$; $\varphi_{\text{н}}(x_i)$.

Для определения величины, характеризующей относительный прирост информативности, введем обозначение $\Delta I(x_i)$. Относительный прирост информативности будет определяться следующим соотношением:

$$\Delta I(x_i) = \frac{I(x_i) - I_{\text{инт}}(x_i)}{I_{\text{инт}}(x_i)}\cdot 100\%.$$

На рис. 3 приведены кривые, характеризующие изменение величины $\Delta I(x_i)$ в зависимости от времени наработки до отказа и объема выборочных данных при показательном законе распределения случайной величины.

Полученные результаты позволяют заключить, что оценки граничных значений характеристик надежности имеют различные статистические характеристики при разных значениях времени наработки до отказа. Интервальная оценка, учитывающая лишь границы возможных значений случайной величины (равномерное распределение) является объективной лишь в области математического ожидания случайной величины. По мере удаления от математического ожидания использование полученных результатов позволяет уменьшить неопределенность при оценивании значений характеристик надежности на 18–20% относительно традиционного интервального оценивания.

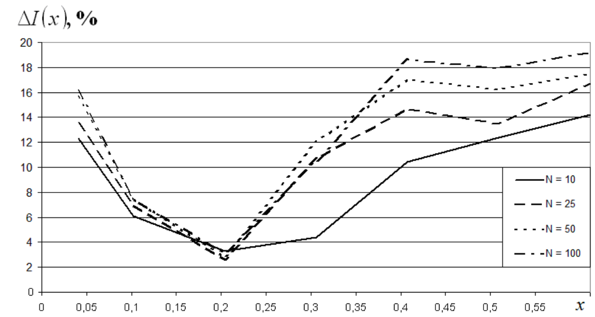

Рис. 3. Зависимость величины уменьшения неопределенности $\Delta I(x)$, % от времени наработки до отказа x и объема выборки N

2. МЕТОДИКА ИНТЕРВАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ХАРАКТЕРИСТИК НАДЕЖНОСТИ ИЗДЕЛИЙ

Проведенные теоретические исследования, а также полученные результаты, описанные в работе [6], позволили для показательного закона распределения разработать методику интервального оценивания граничных значений характеристик надежности изделий:

Шаг 1. По выборочным данным $\{x_i\}_1^N$ рассчитывается выборочное среднее по формуле:

$$M(X)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i.$$

Шаг 2. Рассчитывается эмпирическая оценка среднеквадратического отклонения по формуле:

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-M(x)\right)^2}.$$

Шаг 3. Исходные выборочные данные преобразуются по формуле:

$$\overset{*}{x}_i=\frac{x_i}{\sigma_x}.$$

Шаг 4. По выборочным данным оценивается параметр показательного закона распределения $\hat{\lambda}$ по формуле:

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{M(X)}.$$

Шаг 5. Определяется плотность распределения минимальной порядковой статистики $\varphi_N(X_{\min})$, позволяющая получить точечные оценки граничных значений характеристик надежности:

$$\varphi_N\left(X_{\min}\right)=\hat{\lambda}N\cdot e^{-\hat{\lambda}N\,x}.$$

Шаг 6. Используя результаты, полученные в [6], для заданного объема выборки N и доверительной вероятности β определяется доверительный интервал параметра λ: $\lambda_{\text{Н}}\le\lambda\le\lambda_{\text{В}}$. В табл. 1 приведена зависимость значений доверительных границ параметра λ от объема выборки N при доверительной вероятности β = = 0,95 для показательного закона распределения с параметром λ = 1. Аналогичные таблицы могут быть рассчитаны и для других β.

Таблица 1

Доверительные границы параметра λ показательного закона распределения при доверительной вероятности β = 0,95

N	Нижняя доверительная граница $\lambda_{\text{Н}}$	Верхняя доверительная граница $\lambda_{\text{В}}$	N	Нижняя доверительная граница $\lambda_{\text{Н}}$	Верхняя доверительная граница $\lambda_{\text{В}}$
5	0,4925	2,2884	55	0,8036	1,2544
10	0,6028	1,7450	60	0,8111	1,2421
15	0,6605	1,5633	65	0,8177	1,2313
20	0,6976	1,4673	70	0,8236	1,2218
25	0,7243	1,4064	75	0,8290	1,2134
30	0,7446	1,3635	80	0,8339	1,2058
35	0,7609	1,3313	85	0,8384	1,1989
40	0,7742	1,3061	90	0,8425	1,1927
45	0,7855	1,2857	95	0,8463	1,1870
50	0,7952	1,2688	100	0,8499	1,1818

Шаг 7. Определяются плотности распределений верхних и нижних границ доверительного интервала минимальной порядковой статистики, позволяющие получить доверительные интервалы оценок граничных значений характеристик надежности:

$$\varphi_N(\overset{*}{X}_{\min})_{\text{Н}}=\lambda_{\text{Н}}N\cdot e^{-\lambda_{\text{Н}}N\,x};$$

$$\varphi_N(\overset{*}{X}_{\min})_{\text{В}}=\lambda_{\text{В}}N\cdot e^{-\lambda_{\text{В}}N\,x}.$$

Шаг 8. Для оценок, полученных на предыдущем шаге, осуществляется переход к первоначальному масштабу σ_x, которому соответствуют исходные выборочные данные: $X_{\min} = \overset{*}{X}_{\min} \cdot \sigma_x$. При этом

$$\varphi_N(X_{\min})_{\text{Н}} = \varphi_N(\overset{*}{X}_{\min} \cdot \sigma_x)_{\text{Н}};$$

$$\varphi_N(X_{\min})_{\text{В}} = \varphi_N(\overset{*}{X}_{\min} \cdot \sigma_x)_{\text{В}}.$$

Далее, аналогично традиционным методам интервального оценивания, получают доверительные интервалы крайних значений характеристик надежности.

Шаг 9. Для заданного значения наработки до отказа оценивается плотность распределения оценок граничных значений характеристик надежности внутри полученного доверительного интервала $[\varphi_N(X_{\min})_{\text{Н}}; \varphi_N(X_{\min})_{\text{В}}]$. Оценивание производится на основе приведенных ранее результатов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проводившихся исследований были получены закономерности смещения оценок граничных значений характеристик надежности внутри доверительного интервала в зависимости от объема выборочных данных и типа закона распределения наработки до отказа. Было установлено, что с увеличением разницы между рассматриваемым значением наработки до отказа и ее средним значением становится целесообразным использование полученных результатов, позволяющее уменьшить неопределенность при оценивании граничных значений характеристик надежности до 18–20% относительно традиционного интервального оценивания.

На основе полученных результатов была разработана методика доверительного оценивания граничных значений характеристик надежности, позволяющая учитывать поведение вероятностных характеристик внутри доверительного интервала. Данная методика отличается от известных тем, что позволяет определять не только границы, в которых могут изменяться вероятностные характеристики надежности, но и показывает поведение вероятностных характеристик внутри этих границ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д.** Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965. 524 с.

2. **Козлов Б. А., Ушаков И. А.** Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики. М.: Советское радио, 1975. 472 с.

3. ГОСТ 27.410-87. Надежность в технике. Методы контроля показателей надежности и планы контрольных испытаний на надежность.

4. ГОСТ Р 50779.26-2007. Статистические методы. Точечные оценки, доверительные, предикционные и толерантные интервалы для экспоненциального распределения.

5. РД 50-690-89. Методические указания. Надежность в технике. Методы оценки показателей надежности по экспериментальным данным.

6. **Гвоздев В. Е., Абдрафиков М. А.** Интервальное оценивание граничных значений характеристик надежности технических объектов // Проблемы управления и моделирования в сложных системах: тр. XIII Международн. конф., 2011. С. 153–158.

7. Введение в математическое моделирование: учеб. пособие / под ред. П. В. Трусова. М.: Логос, 2004. 440 с.

8. **Ефимов А. Н.** Порядковые статистики – их свойства и приложения. М.: Знание, 1980. 64 с.

9. **Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.** Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Высшая школа, 2000. 480 с.

10. **Гумбель Э.** Статистика экстремальных значений. М.: Мир, 1965. 450 с.

11. **Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В.** Курс теории вероятности и математической статистики. М.: Наука, 1969. 512 с.

ОБ АВТОРАХ

Гвоздев Владимир Ефимович, проф., зав. каф. автоматиз. проектирования инф. систем. Дипл. инженер электронной техники (УАИ, 1978). Д-р техн. наук по АСУ (УГАТУ, 2000). Иссл. в обл. АСУ, открытых инф. систем, прикл. статистики, теории надежности, контроля и управ. сост. окр. среды, управл. прогр. проектами.

Абдрафиков Михаил Асхатович, асп. той же каф. Дипл. инженер по системам автоматизированного проектирования (УГАТУ). Иссл. в обл. математическ. моделирования.