

УДК 004.65

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЗОНЕ КОНТАКТА ПРИ ЛИНЕЙНОЙ СВАРКЕ ТРЕНИЕМ

А. Т. БИКМЕЕВ<sup>1</sup>, Р. К. ГАЗИЗОВ<sup>2</sup>, С. Ю. ЛУКАЩУК<sup>3</sup>

<sup>1</sup>bikmeyev-at@ugatu.su, <sup>2</sup>gazizovrk@gmail.com, <sup>3</sup>lsu@ugatu.su

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 22.05.2017

**Аннотация.** Линейная сварка трением – это технологический процесс, позволяющий соединять материалы в твердой фазе. Разогрев зоны контакта осуществляется за счет трения движущихся частей друг относительно друга. В ходе процесса происходит множество физических явлений за короткое время (трение, упругая и пластическая деформация, тепловыделение и теплоперенос, микроструктурные изменения и фазовые переходы и т.д.), именно поэтому математические модели этого процесса практически отсутствуют, а те что опубликованы, являются весьма упрощенными. В настоящей работе предложены математические модели теплопереноса первых двух стадий процесса, основанные на кусочно-линейной модели распределения контактного давления. Получены явные выражения для плотности теплового потока в зоне контакта и для эволюции температуры со временем.

**Ключевые слова:** линейная сварка трением; математическая модель; теплоперенос; контактное давление; малый параметр; начально-краевая задача.

### ВВЕДЕНИЕ

Линейная сварка трением (ЛСТ) представляет собой технологию соединения материалов в твердой фазе, то есть без расплавления. Благодаря этому в сварном шве отсутствуют дефекты, обусловленные плавлением и последующей кристаллизацией металла: пористость, растрескивание и т.д. Кроме того, интенсивная пластическая деформация при высокой температуре приводит к динамической рекристаллизации зоны сварки и, как следствие, измельчению микроструктуры, что в свою очередь положительно сказывается на прочностных свойствах получаемого соединения [1].

Наиболее известным применением ЛСТ является создание монолитных дисков с лопатками для газотурбинных двигателей или блисков. В последнее же время эта технология находит все больше применений в аддитивном производстве, как технология создания заготовок близких к конечной форме изделия [2, 3].

Согласно А. Ваирису, процесс линейной сварки трением можно разбить на следующие четыре стадии [4]:

1. *Начальная.* Свариваемые части приводятся в контакт и прижимаются друг к другу с некоторым давлением. При этом один из образцов или (очень редко) они оба совершают возвратно-поступательные движения с некоторой амплитудой и частотой вдоль выделенной оси. На этой стадии материал в зоне сварки активно изнашивается, стачиваются все неровности, и площадь контакта постепенно достигает 100%.

2. *Переходная.* За счет продолжающегося возвратно-поступательного движения и наличия трения между образцами зона контакта быстро разогревается, металл в зоне контакта становится пластичным и под действием прижимного усилия начинает выдавливаться из зоны контакта в грат.

3. *Равновесная.* Поскольку самый горячий материал выдавливается в грат, то есть удаля-

ется из зоны контакта, а на смену ему приходит более холодный, то в зоне контакта устанавливается термодинамическое равновесие, при котором температура в зоне контакта остается практически постоянной. На этой стадии скорость удаления материала и, как следствие, скорость осадки обычно также не меняются. Суммарная длина свариваемых частей в направлении, перпендикулярном плоскости сварки, уменьшается на величину, называемую осадкой. Именно в этой фазе и формируется прочное соединение.

4. *Остановка, проковка.* По достижении требуемой величины осадки процесс колебаний останавливается, образцы выравниваются и фиксируются в конечном положении. Затем, чаще всего для снижения уровня остаточных напряжений, может прикладываться проковочное усилие.

Последние две стадии процесса ЛСТ изучены достаточно подробно, и им посвящено большое количество работ с описанием результатов компьютерного и математического моделирования. Первые же две стадии практически не описаны, и в литературе представлен достаточно ограниченный набор соответствующих математических моделей. В подавляющем большинстве случаев ограничиваются результатами компьютерного моделирования в инженерных пакетах. В силу скоротечности процесса ЛСТ (длительность от 1 до 5 с), больших скоростей изменения температуры и наличия больших градиентов вблизи зоны сварки чаще всего предполагается, что первые две стадии не столь важны для прогнозирования качества получаемого соединения. Однако именно на этих стадиях формируется температурное поле, которое в дальнейшем определяет границы и форму зон вокруг сварного шва с различными свойствами материала. При этом для исследования характера влияния различных параметров процесса на распределение температуры в свариваемых образцах результатов компьютерного моделирования часто оказывается недостаточно и требуется построение соответствующих математических моделей, позволяющих проводить аналитический анализ процессов. Настоящая работа посвящена построению математических моделей процессов теплопереноса, протекающих на первых двух стадиях ЛСТ.

## ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОПЕРЕНОСА ПРИ ЛСТ

На первых двух стадиях процесса ЛСТ имеют место следующие явления: трение, упругое деформирование, тепловыделение в зоне контакта и перенос тепла с поверхности контакта внутрь свариваемых образцов.

Для силы трения примем стандартный закон Амонтона–Кулона:

$$F_{\text{тр}} = \mu F, \quad (1)$$

где  $F_{\text{тр}}$  – сила трения,  $\mu$  – коэффициент трения,  $F$  – прижимное усилие. Коэффициент трения будем считать постоянным. Это допущение можно принять в том случае, когда имеет место сухое трение и температура меняется не значительно. В первом приближении это будет верно и для рассматриваемых стадий процесса ЛСТ.

При построении модели теплопереноса при ЛСТ ключевым моментом является оценка пространственно-временного распределения внутреннего тепловыделения в зоне контакта за счет сил трения. Величина этого распределения зависит от характера распределения контактного давления. Поэтому первым этапом построения тепловой модели является построение модели распределения контактного давления.

### Теоретическая оценка распределения контактного давления

Условная схема процесса ЛСТ двух прямоугольных образцов показана на рис. 1. Нижний образец осуществляет плоскопараллельное осциллирующее движение под действием периодической вынуждающей силы  $G(t) = G_0 \sin(\omega t)$ . Верхний образец может перемещаться только в вертикальном направлении и прижимается к нижнему силой  $F$ . Между образцами действует сила трения по закону (1).

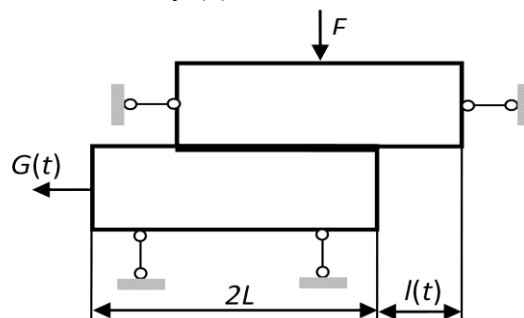
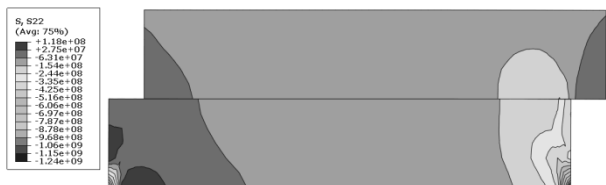


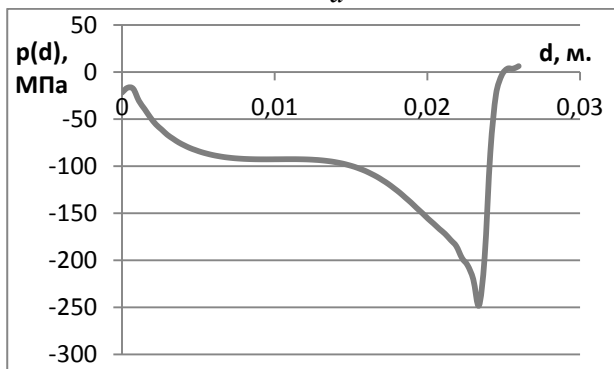
Рис. 1. Условная схема процесса ЛСТ

Для определения характера распределения напряжений в зоне контакта было выполнено компьютерное моделирование начальной стадии процесса ЛСТ в пакете Abaqus. На рис. 2, а для момента времени, соответствующего максимальному смещению свариваемых образцов друг относительно друга, показано поле нормальных напряжений  $\sigma_y$ , а на рис. 2, б приведен график распределения контактного давления. Из рисунка видно, что распределение контактного давления является сильно неравномерным, что обусловливается нарушением продольной симметрии контактной площадки относительно оси приложения равнодействующей прижимной силы  $F$  при взаимном смещении образцов. В результате используемое в большинстве существующих математических моделей теплопереноса предположение о равномерности распределения давления в зоне контакта оказывается очень грубым и требует уточнения.

На рис. 3 приведена схема, принятая для теоретического расчета характерных значений профиля контактного давления: показана упрощенная система сил, действующих на верхний образец в некоторый момент времени, соответствующий движению нижнего образца влево, и принятая прямоугольная декартова система координат  $Oxz$ .

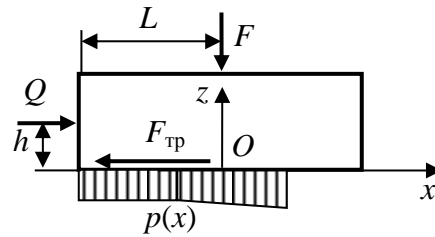


а



б

**Рис. 2.** Результаты расчета в пакете Abaqus: а – распределение вертикальных внутренних напряжений в образцах; б – величина вертикальных внутренних напряжений на нижней границе верхнего образца (d – расстояние от левого нижнего угла вдоль оси  $Ox$ )



**Рис. 3.** Расчетная схема для верхнего образца

Распределение контактного давления будет приближаться в данной работе кусочно-линейной функцией следующего вида:

$$p(x,t) = \begin{cases} p_0(t), & x \in [-L, x^*(t)]; \\ p_0(t) + p_1(x,t), & x \in (x^*(t), L-l(t)]; \\ 0, & x \in (L-l(t), L], \end{cases}$$

$$p_1(x,t) = p_l(t) \frac{x - x^*(t)}{L - l(t) - x^*(t)}. \quad (2)$$

Здесь  $2L$  – длина образца,  $l(t) = A \sin \omega t$  – величина смещения образцов друг относительно друга в момент  $t$ ,  $x^*(t)$  – характерная точка профиля распределения контактного давления, соответствующая переходу с постоянного распределения на линейное по координате.

Параметры функции (2) находятся из условий равновесия (баланса сил и моментов) верхнего образца под действием принятой системы сил, которые приводят к уравнениям

$$\int_{-L}^{L-l(t)} p(x,t) dx = \frac{F}{b}, \quad \int_{-L}^{L-l(t)} p(x,t) x dx = \frac{Qh}{b}, \quad (3)$$

где сила реакции  $Q = F_{тр}$ . Здесь  $b$  – ширина образца и  $h$  – высота точки приложения силы  $Q$  (рис. 3).

Результаты компьютерного моделирования свидетельствуют (см., например, рис. 2, б), что для нахождения координаты  $x^*(t)$  может быть принят эмпирический критерий равенства площадей под постоянной и линейной частями профиля (2), что приводит к уравнению

$$p_0(t)(x^*(t) + L) = (p_0(t) + 0,5 p_l(t))(L - l(t) - x^*(t)). \quad (4)$$

Для упрощения расчетов введем безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \xi^* = \frac{x^*}{L}, \quad \tau = \omega t, \quad \lambda = 1 - \frac{l}{L},$$

$$\rho = \frac{pbL}{F}, \quad \rho_0 = \frac{p_0bL}{F}, \quad \rho_l = \frac{p_lbL}{F}, \quad \nu = \frac{\mu h}{L}.$$

Тогда распределение (2) примет вид

$$\rho(\xi, \tau) = \begin{cases} \rho_0(\tau), & \xi \in [-1, \xi^*(\tau)]; \\ \rho_0(\tau) + \rho_l(\xi, \tau), & \xi \in (\xi^*(\tau), \lambda(\tau)]; \\ 0, & \xi \in (\lambda(\tau), 1], \end{cases}$$

$$\rho_l(\xi, \tau) = \rho_l(\tau) \frac{\xi - \xi^*(\tau)}{\lambda(\tau) - \xi^*(\tau)}, \quad (2')$$

а уравнения (3) и (4) запишутся как

$$\int_{-1}^{\lambda(\tau)} \rho(\xi, \tau) d\xi = 1, \quad \int_{-1}^{\lambda(\tau)} \rho(\xi, \tau) \xi d\xi = \nu, \quad (3')$$

$$\rho_0(\tau)[1 + \xi^*(\tau)] = (\rho_0(\tau) + 0,5\rho_l(\tau))(\lambda(\tau) - \xi^*(\tau)). \quad (4')$$

Из (2')–(4') находим:

$$\rho_0(\tau) = \frac{1}{2(\xi^*(\tau) + 1)},$$

$$\rho_l(\tau) = \frac{1 - \lambda(\tau) + 2\xi^*(\tau)}{(\lambda(\tau) - \xi^*(\tau))(\xi^*(\tau) + 1)}, \quad (5)$$

$$\xi^*(\tau) = \frac{\sigma(\tau)}{2} - 1 + \frac{1}{2} \sqrt{(\lambda(\tau) + 1)^2 + \sigma^2(\tau)},$$

$$\sigma(\tau) = \frac{3}{2}(1 - \lambda(\tau) + 2\nu).$$

На рис. 4 показано сравнение построенной аппроксимации с результатами вычислительного эксперимента, проведенного в пакете Abaqus. Из рисунка видно, что принятая аппроксимация в области больших значений давления дает несколько заниженные значения, поскольку не учитывает падения давления на левой границе образца.

Распределение (2'), (5) справедливо для первой четверти осцилляционного цикла, т.е. для  $\tau \in [0, \pi/2]$ . Распределения для остальных этапов цикла получаются на основе соотношений симметрии:

$$\begin{aligned} \rho(\xi, \tau) &= \rho(\xi, \tau + 2\pi), \\ \rho(\xi, \tau) &= \rho(\xi, \pi - \tau), \\ \rho(-\xi, \tau) &= \rho(\xi, \pi + \tau). \end{aligned} \quad (6)$$

Проведем оценку, насколько сильно полученное распределение контактного давле-

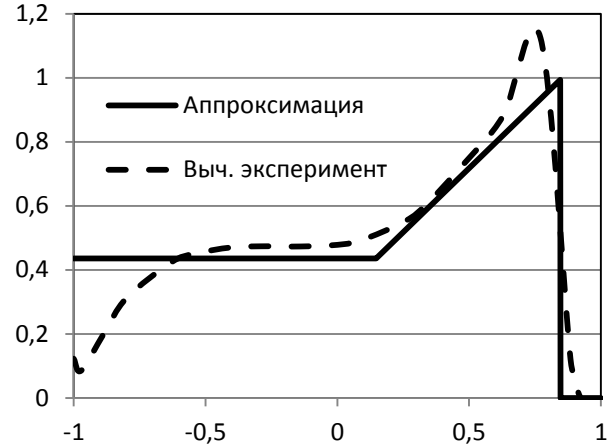


Рис. 4. Сравнение принятой аппроксимации с результатами вычислительного эксперимента

ния отличается от часто используемого при моделировании равномерного распределения

$$\bar{\rho}(t) = \frac{1}{L - l(t)} \frac{F}{b},$$

которое в безразмерных переменных имеет вид

$$\bar{\rho}(\tau) = \frac{1}{1 + \lambda(\tau)}.$$

Максимальное и минимальное давление возникает на краях линии контакта и в центре неподвижного образца при максимальном смещении образцов, т.е. когда  $\tau = \tau_0 = \pi/2$  и  $\lambda(\tau_0) = \lambda_0 = 1 - A/L$ , где  $A$  — амплитуда осцилляций. Тогда

$$\bar{\rho} = \frac{1}{1 + \lambda_0}, \quad \rho_{\min} = \rho_0(\tau_0), \quad \rho_{\max} = \rho_0(\tau_0) + \rho_l(\tau_0)$$

и

$$\delta p_{\min} = 1 - \frac{p_{\min}}{\bar{p}} = 1 - (1 + \lambda_0)\rho_0(\tau_0),$$

$$\delta p_{\max} = \frac{p_{\max}}{\bar{p}} - 1 = (1 + \lambda_0)[\rho_0(\tau_0) + \rho_l(\tau_0)] - 1.$$

Здесь и далее для получения численных оценок будут использоваться значения параметров, соответствующие экспериментам по ЛСТ на малой экспериментальной машине PDS, установленной на территории ПАО «УМПО»:

$$L = 13 \text{ мм}, \quad A = 2 \text{ мм}, \quad \mu = 0,3, \quad h = 2,5 \text{ мм}.$$

В результате находим

$$\delta p_{\min} \approx 0,195, \quad \delta p_{\max} \approx 0,835.$$

Таким образом, использование при моделировании предположения о равномерности давления в зоне контакта приводит почти к двукратному занижению реальных значений давления в отдельных точках, что может привести к ошибкам как в проектировании оснастки, так и в определении оптимальных характеристик самого процесса ЛСТ.

**Оценка тепловыделения в зоне контакта**

Проведем теоретическую оценку температуры в зоне контакта. При этом будем исходить из следующих предположений.

1. Распределение температуры может рассматриваться как одномерное по глубине образцов (т.е. теплообменом с окружающей средой и теплопереносом в плоскости, параллельной плоскости контакта, пренебрегаем – это даст верхнюю оценку значения температуры при условии, что будет рассматриваться самая теплонапряженная точка).

2. Конечностью толщины образцов пренебрегаем (т.е. рассматривается плоская задача; полученные результаты будут справедливы для среднего продольного сечения образца).

3. Коэффициент трения считаем постоянным.

4. Теплофизические свойства материала считаем постоянными (их можно принять минимальными из заданного диапазона, что обеспечит оценку сверху для искомых температур).

5. Материал образцов одинаковый и выделившееся в процессе трения тепло распределяется между образцами поровну.

6. Скорость осадки постоянна, что соответствует установившейся части второй стадии процесса ЛСТ.

При сделанных предположениях плотность теплового потока в зоне контакта определяется классической формулой

$$q(x, t) = \mu p(x, t) A \omega |\cos(\omega t)|, \quad (7)$$

где  $\mu$  – коэффициент трения,  $p(x, t)$  – контактное давление, определяемое (2). В безразмерном виде (7) примет вид

$$\theta(\xi, \tau) = \rho(\xi, \tau) |\cos(\tau)|, \quad \theta = \frac{qbL}{\mu FA \omega}. \quad (7')$$

Определим самую теплонапряженную точку в зоне контакта, т.е. точку, количество выделившегося тепла в которой максимально за цикл:

$$\xi_T = \arg \max_{\xi \in [0, \lambda_0]} \Theta(\xi), \quad \Theta(\xi) = \int_0^{2\pi} \theta(\xi, \tau) d\tau. \quad (8)$$

С учетом соотношений симметрии (6) имеем

$$\Theta(\xi) = 2 \int_0^{\pi/2} [\rho(\xi, \tau) + \rho(-\xi, \tau)] \cos \tau d\tau. \quad (9)$$

Аналитическое представление интеграла (9) для распределения (2'), (5) является весьма громоздким. Поэтому упростим его путем введения малых параметров. Воспользуемся тем, что амплитуда осцилляций на порядок меньше длины образца, поэтому их отношение можно рассматривать как первый малый параметр:

$$\varepsilon = \frac{A}{2L}.$$

Кроме того, высота образца много меньше его длины, поэтому  $\mu h \ll L$  и в качестве второго малого параметра будет выступать  $v$ . Выполняя разложения полученных представлений (5) по этим двум малым параметрам, с точностью до  $O(\varepsilon^2, v^2)$ , получим:

$$\begin{aligned} \xi^*(\tau) &\approx \frac{3}{2}v + \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{4}v\right)\varepsilon \sin \tau, \\ \rho_0(\tau) &\approx \frac{1}{2} - \frac{3}{4}v - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}v\right)\varepsilon \sin \tau, \\ \rho_l(\tau) &\approx 3v + \left(3 + \frac{21}{2}v\right)\varepsilon \sin \tau, \\ \rho_1(\xi, \tau) &\approx 3\xi v + \left(3\xi - 6v + \frac{45}{2}\xi v\right)\varepsilon \sin \tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Подстановка (2') с учетом (10) в (9) дает четыре различные зоны, в каждой из которых реализуется свой закон измерения  $\Theta(\xi)$ :

$$\Theta(\xi) = \begin{cases} \Theta_1, & \xi \in \left[0, \frac{3}{2}v\right]; \\ \Theta_2(\xi), & \xi \in \left[\frac{3}{2}v, \frac{3}{2}v + \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{4}v\right)\varepsilon\right]; \\ \Theta_3(\xi), & \xi \in \left[\frac{3}{2}v + \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{4}v\right)\varepsilon, 1 - 2\varepsilon\right]; \\ \Theta_4(\xi), & \xi \in [1 - 2\varepsilon, 1], \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= 2 - 3\nu - \frac{2 + 3\nu}{8}\varepsilon, \\ \Theta_2(\xi) &= \Theta_1 + \frac{3(2\xi - 3\nu)}{4\varepsilon} \left[ -5\nu\xi + (2 - 3\nu)\xi^2 \right], \\ \Theta_3(\xi) &= \Theta_1 + 6\xi\nu - \frac{3}{2} \left[ 4\nu - (2 + 15\nu)\xi \right] \varepsilon, \\ \Theta_4(\xi) &= \frac{1}{2}\Theta_1 + \frac{1 - \xi}{2\varepsilon} \left[ \frac{7}{8} - \frac{75}{16}\nu + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{13}{8} + \frac{327}{16}\nu \right) \xi - \left( \frac{3}{2} + \frac{45}{4}\nu \right) \xi^2 \right].\end{aligned}$$

График функции  $\Theta(\xi)$  показан на рис. 5. Небольшой скачок  $\Theta(\xi)$  при переходе между второй и третьей зонами является следствием разложения по малым параметрам. Из графика видно, что несмотря на то, что  $\Theta_2(\xi)$  и  $\Theta_4(\xi)$  являются нелинейными функциями  $\xi$ , эта нелинейность выражена весьма незначительно. При этом самой теплонапряженной является точка  $\xi = 1 - 2\varepsilon$ , т.е.  $x = L - A$ . Безразмерная функция плотности теплового потока в этой точке имеет вид

$$\theta_{\max}(\tau) = \cos(\tau) \times \begin{cases} \left[ \rho_0(\tau) + \rho_1(1 - 2\varepsilon, \tau) \right], & \tau \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]; \\ - \left[ \rho_0(\pi - \tau) + \rho_1(1 - 2\varepsilon, \pi - \tau) \right], & \tau \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right]; \\ -\rho_0(\tau - \pi), & \tau \in \left[ \pi, \frac{3\pi}{2} \right]; \\ \rho_0(2\pi - \tau), & \tau \in \left[ \frac{3\pi}{2}, \pi \right], \end{cases} \quad (11)$$

а его среднеинтегральное значение дается формулой

$$\Theta_{\max} = (2 + 3\nu) \left( 1 + \frac{11}{8}\varepsilon \right). \quad (12)$$

На рис. 6 приведен график функции  $\theta_{\max}(\tau)$  и для сравнения показан график функции  $|\cos(\omega t)|$ . Разрыв функции при переходе на вторую половину цикла обусловлен скачком контактного давления, являющегося следствием принятой аппроксимации (2).

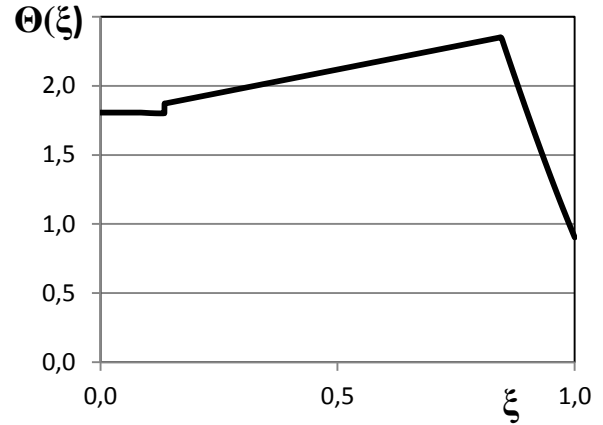


Рис. 5. График безразмерного среднеинтегрального теплового потока в зоне контакта

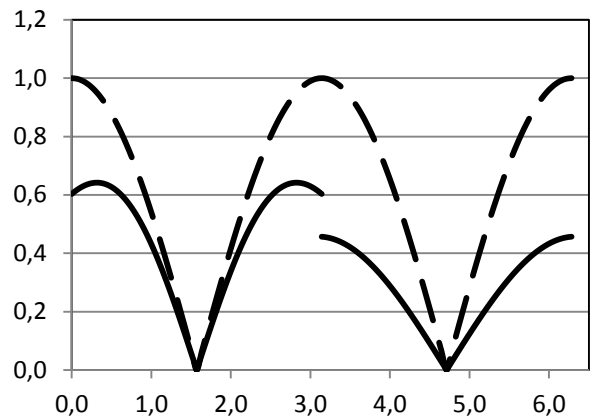


Рис. 6. Временная зависимость безразмерной функции плотности теплового потока в самой теплонапряженной точке зоны контакта

### Моделирование теплопереноса

В одномерном приближении на первой стадии ЛСТ процесс теплопереноса может быть приближенно описан следующей начально-краевой задачей:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T(t, z)}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 T(t, z)}{\partial z^2}, \quad 0 < z < \infty, \quad 0 < t < t_0; \\ T(0, z) &= 0, \quad 0 < z < \infty; \end{aligned} \quad (13)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(t, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{q(t)}{2}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} T(t, z) = 0.$$

Здесь  $a = \lambda / (c\rho)$  – коэффициент температуропроводности,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $T(t, z)$  – температура, отсчитываемая от постоянного начального значения  $T^0$  (обычно, это температура окружающей среды),  $t_0$  – продолжительность первой стадии процесса.

Вторая стадия процесса должна моделироваться как задача с движущейся границей [5]. Пусть  $v$  – скорость осадки. Введем систему координат, движущуюся с постоянной скоростью  $v$ :

$$\xi = z - v(t - t_0), \quad \tau = t - t_0, \quad u = T.$$

Тогда задача, описывающая вторую стадию процесса ЛСТ, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\tau, \xi)}{\partial \tau} - v \frac{\partial u(\tau, \xi)}{\partial \xi} &= a \frac{\partial^2 u(\tau, \xi)}{\partial \xi^2}, \\ 0 < \xi < \infty, \quad 0 < \tau < t_1; \\ u(0, \xi) &= T(t_0, \xi), \quad 0 < \xi < \infty; \\ -\lambda \frac{\partial u(\tau, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} &= \frac{q(\tau + t_0)}{2}, \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} u(\tau, \xi) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $t_1$  – продолжительность второй стадии процесса. Таким образом, общая продолжительность процесса есть  $\bar{t} = t_0 + t_1$ .

Проведем решение поставленных задач.

Применим к задаче (13) преобразование Лапласа по времени [6]:

$$T^*(p, z) \equiv L_t[T(t, z)](p) = \int_0^\infty e^{-pt} T(t, z) dt.$$

Получим:

$$\begin{aligned} pT^*(p, z) &= a \frac{d^2 T^*(p, z)}{dz^2}, \quad 0 < z < \infty; \\ -\lambda \frac{\partial T^*(p, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \frac{q^*(p)}{2}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} T^*(p, z) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Решение задачи (15) в общем случае имеет вид

$$T^*(p, z) = \frac{q^*(p)}{2\lambda} \sqrt{\frac{a}{p}} e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}z}. \quad (16)$$

Обратное преобразование для (16) дает искомое температурное поле [7]:

$$T(t, z) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi\lambda}} \int_0^t \frac{q(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{z^2}{4a(t-\tau)}} d\tau.$$

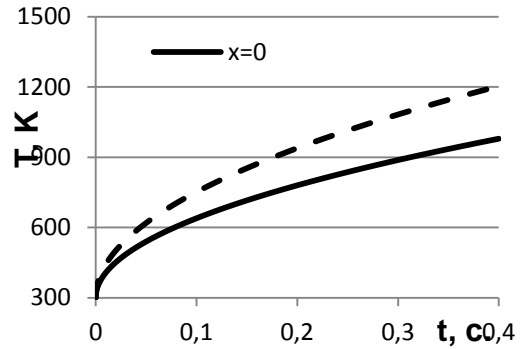


Рис. 7. Изменение температуры в зоне контакта в центре и самой теплонапряженной точке со временем

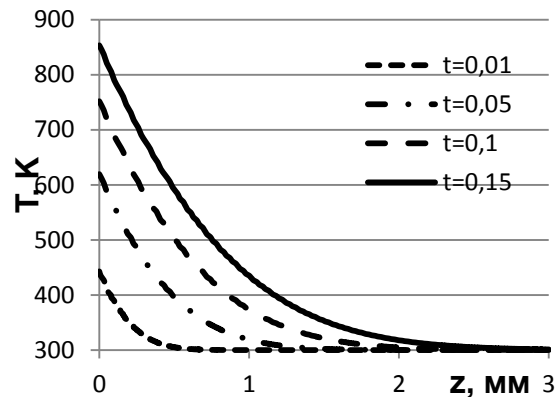


Рис. 8. Изменение температуры по глубине для различных моментов времени

При этом температура в зоне контакта ( $z = 0$ ) представляется интегралом дробного порядка  $\frac{1}{2}$  от теплового потока:

$$T(t, z) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi\lambda}} \int_0^t \frac{q(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Вычисление этих интегралов с функцией  $q(t)$ , соответствующей безразмерной функции (11), представляет собой отдельную самостоятельную задачу. Поэтому приведем здесь более простую теоретическую оценку. Предположим, что осцилляцией теплового потока можно пренебречь и заменить его среднеинтегральным постоянным значением за цикл:

$$q(t) = q_0 \equiv \frac{\mu FA \omega}{2\pi bL} \Theta. \quad (17)$$

Тогда (16) принимает вид

$$T^*(p, z) = \frac{q_0}{2\lambda} \sqrt{\frac{a}{p^3}} e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}z}$$

и обратное преобразование Лапласа дает [8]

$$T(t, z) = \frac{q_0}{2\lambda} \left[ \frac{2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4at}} - z \operatorname{erfc} \left( \frac{z}{2\sqrt{at}} \right) \right]. \quad (18)$$

Для точки контакта ( $z = 0$ ) получаем

$$T(t, 0) = \frac{q_0}{\lambda} \sqrt{\frac{at}{\pi}},$$

т.е. температура в зоне контакта сначала растет по степенному закону с показателем  $1/2$ .

На рис. 7 показан график изменения температуры в зоне контакта (К), построенный для центральной точки  $x = 0$  и самой теплонапряженной точки  $x = L - A$  при следующих значениях параметров (теплофизические свойства титанового сплава ВТ6 взяты для  $300^\circ\text{C}$ ) [9]:

$$\begin{aligned} 2L &= 26 \text{ мм}, \quad b = 13 \text{ мм}, \quad A = 2 \text{ мм}, \quad F = 35 \text{ кН}, \\ \mu &= 0,3, \quad \omega = 2\pi\nu, \quad \nu = 50 \text{ Гц}, \quad T^0 = 300 \text{ К}, \\ \lambda &= 11,7 \text{ Вт/(м К)}, \quad c = 670 \text{ Дж/(кг К)}, \\ \rho &= 4430 \text{ кг/м}^3, \quad a = 3,94 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}. \end{aligned}$$

В этом случае подставляя в (17) качестве  $\Theta$  значения  $\Theta_1$  для точки  $x = 0$  и  $\Theta_{\max}$  из (12) для точки  $x = L - A$ , получаем соответственно  $q_0 \approx 1,15 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2$  и  $q_0 \approx 1,49 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2$ .

Из рис. 7 видно, что температура  $\alpha/\beta$  перехода титана (1156 К) достигается в точке  $x = L - A$  примерно через 0,36 с (18 циклов) после начала осцилляций.

Поскольку рассматриваемая модель является одномерной и не учитывает теплоперенос вдоль оси  $Ox$ , приведенные на рис. 7 профили температуры следует рассматривать как верхнюю и нижнюю оценки границы действительного распределения температуры в образце.

Распределение температуры (18) по глубине в самой теплонапряженной точке для четырех моментов времени (0,01 с, 0,05 с, 0,1 с, 0,15 с) показано на рис. 8. Можно заметить, что даже при прогреве зоны сварки до температуры свыше 800 К, уже на расстоянии 2,5 мм температура имеет первоначальное значение, то есть модель показывает, что процесс нагрева достаточно сильно локализован, что находится в согласии с результатами экспериментов, опубликованными ранее [1–4].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложены математические модели процесса теплопереноса для первых двух стадий процесса линейной сварки трением, учитывающие непостоянный характер распределения давления в зоне контакта.

Предложена модель распределения контактного давления, находящаяся в соответствии с результатами компьютерного моделирования, и проведено ее сравнение со стандартным подходом, использующим равномерное распределение давления в зоне контакта. Показано, что в самой напряженной точке разница между значениями контактного давления, предсказываемого по двум указанным моделям, может достигать 83,5 %.

Построена модель теплопереноса, позволяющая оценить изменение со временем температуры в зоне контакта и по глубине неподвижного образца. Результаты моделирования находятся в соответствии с известными экспериментальными данными [1–4].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Solid state joining of metals by linear friction welding: a literature review** / I. Bhamji [et al.] // *Materials Science and Technology*. 2011. Vol. 278, № 1, p. 150–158. [Bhamji I., et al., "Solid state joining of metals by linear friction welding: a literature review," in *Materials Science and Technology*, vol. 278, no. 1, pp. 150–158, 2011. ]
2. **Linear and rotary friction welding review** / Li Wenya [et al.] // *International Materials Reviews*. 2016. Vol. 61, № 2, p. 71–100. [Wenya Li, et al., "Linear and rotary friction welding review," in *International Materials Reviews*, vol. 61, no. 2, pp. 71–100, 2016. ]
3. **3D modelling of Ti–6Al–4V linear friction welds** / McAndrew A. R. [et al.] // *Science and Technology of Welding and Joining*, 2016, 9 p. [Электронный ресурс]. URL: <http://dx.doi.org/10.1080/13621718.2016.1263439>. Date of access: 01.04.2017. [A.R. McAndrew, et al., "3D modelling of Ti–6Al–4V linear friction welds," *Science and Technology of Welding and Joining*, 2016, 9 p. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1080/13621718.2016.1263439> ]
4. **Vairis A., Frost M.** High frequency linear friction welding of a titanium alloy // *Wear*, 1998, vol. 217, p. 117–131. [A.Vairis, M.Frost, "High frequency linear friction welding of a titanium alloy", in *Wear*, vol. 217, pp. 117–131, 1998. ]
5. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике (для научных работников и инженеров). СПб.: Лань, 2003. 832 с. [G. Korn, T. Korn, *A Handbook on Mathematics (for scientists and engineers)*, (in Russian). SPb.: "Lan", 2003. ]
6. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, 1969. Т. 1. 344 с. [H. Bateman, A. Erdelui, *Tables of integral transforms*. New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1954. ]



7. **Лыков А. В.** Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с. [ A. V. Lykov, *Theory of heat conduction*, (in Russian). М.: "Vysshaya Shkola", 1967. ]

8. **Песин М. С., Фабелинский И. Л.** Пикосекундная спектроскопия и изучение быстротекущих процессов // Успехи физических наук, 1976. Т. 120. Вып. 2. С. 273–307. [ M. S. Pesin, I. L. Fabelinskii, "Picosecond spectroscopy and research on fast processes," in *Successes of physical sciences*, vol. 120, pp. 844-862, 1976. ]

9. **Термическое «разупрочнение» и «упрочнение» титана и его сплава при высоких скоростях ударно-волнового деформирования / Канель Г.И. [и др.] // Физика твердого тела, 2003. Т. 45. Вып. 4. С. 625–629. [ G. I. Kangel, et al., "Thermal "weakening" and "hardening" of titanium and its alloy at high speeds of shock-wave deformation," (in Russian), in *Physics of the Solid State*, vol. 45, no. 4. pp. 625-629, 2003. ]**

#### ОБ АВТОРАХ

**БИКМЕЕВ Александр Тимерзянович**, доцент каф. высокопроизв. вычисл. технологий и систем. Дипл. физик (БГУ, 1995). Канд. физ.-матем. наук по физике конд. состояния (ИФМК УНЦ РАН, 2001). Иссл. в обл. матем. и комп. моделирования.

**ГАЗИЗОВ Рафаил Кавыевич**, проф., зав. каф. высокопроизв. вычисл. технологий и систем. Дипл. математик (БГУ, 1983). Д-р физ.-мат. наук по диф. уравнениям (ИММ Уральск. отд. РАН 1999). Иссл. в обл. группового анализа диф. уравнений и матем. моделирования.

**ЛУКАШУК Станислав Юрьевич**, доцент каф. высокопроизв. вычисл. технологий и систем. Дипл. инженер по авиацион. и ракетн.-косм. теплотехн. (УГАТУ, 1997). Канд. физ.-матем. наук по теплофизике и молекулярн. физике (БГУ, 1999). Иссл. в обл. матем. моделирования.

#### METADATA

**Title:** Mathematical modeling of physical phenomena at a contact area during the linear friction welding process

**Authors:** A. T. Bikmееv<sup>1</sup>, R. K. Gazizov<sup>2</sup>, S. Yu. Lukashuk<sup>3</sup>

**Affiliation:**

Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

**Email:** <sup>1</sup>bikmееv-at@ugatu.su, <sup>2</sup>gazizovrk@gmail.com, <sup>3</sup>isu@ugatu.su

**Language:** Russian.

**Source:** Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 21, no. 3 (77), pp. 3-11, 2017. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

**Abstract:** Linear friction welding is a technology to join materials in a solid state. Heating of a contact area is made due friction between moving parts one along other. Many physical phenomena occur in a short time during the process (friction, elastic and plastic deformation, heat release and heat transfer, microstructural changes and phase transitions, etc.), which is why the mathematical models of this process are practically absent, and published are very simplified. In this paper, we describe the contact pressure model and compare it with the standard estimate. It is shown that the developed model allows obtaining more accurate results. The mathematical model of heating the contact zone and heat transfer to the bulk of the samples is also considered. An expression for determining the evolution of temperature with time is obtained.

**Key words:** Linear friction welding; Contact pressure; Mathematical modeling; small parameter; boundary value problem.

**About authors:**

**BIKMEEV, Aleksandr Timerzyanovich**, assistant professor. Depart. of High Perform. Comput. Technologies and Systems. Physicist (BSU, 1995). PhD in Phys.-Math. Sciences in Physics of Cond. State (IFMC URC RAS, 2001). Research In the area of Mathematical And Computer Modeling.

**GAZIZOV, Rafail Kavyevich**, prof., Head of Depart. of High Perform. Comput. Technologies and Systems. Mathematician (BSU, 1983). Dr. in Phys.-Math. Sciences in diff. Equations (IMM Uralsk Department of the RAS, 1999). Research In the area of Group analysis of diff. Equations and Mathematical Modeling

**LUKASHUK, Stanislav Yurevich**, Associate professor. Depart. of High Perform. Comput. Technologies and Systems. Engineer for Aviation. And missile-space. Teplotehn. (UGATU, 1997). PhD in Phys.-Math. Sciences in thermophysics and molecular physics. Physics (BSU, 1999). Research In the area of Mathematical Modeling.